Feladatmegoldások az A1 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/ősz, 9. hét

1. Egy téglalap alakú, 1×2 méteres kartonpapírból felül nyitott, téglalap alakú dobozt hajtogatunk úgy, hogy a papír négy sarkából négy egybevágó négyzetet vágunk ki, majd felhajtjuk a doboz oldalait. Mekkora négyzeteket kell kivágnunk, hogy a doboz térfogata maximális legyen?

   Megoldás Jelölje a kivágott négyzetek oldalát méterben x. Ekkor a doboz alapjának élei $2-2x$ és $1-2x$, a magassága x. Így a térfogata $V=(2-2x)(1-2x)x=4x^3-6x^2+2x$, ahol $0<x<\frac{1}{2}$. A térfogatnak akkor lehet lokális szélsőértéke, ha $V'(x)=0$, azaz $12x^2-12x+2=0$. Ezen egyenlet megoldásai $x=\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}$. Vegyük észre, hogy az $x=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ eset fizikailag értelmetlen, így marad az $x=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ megoldás. Megvizsgáljuk a derivált előjelét, illetve a térfogat monotonitását.

	$0<x<\frac{3-\sqrt{3}}{6}$	$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$	$\frac{3-\sqrt{3}}{6}<x<\frac{1}{2}$
$V'(x)$	$+$	0	$-$
$V(x)$	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$

   A függvény monotonitásából az is látható, hogy a talált lokális maximum egyben az egész függvény maximuma is, azaz abszolút maximum. Tehát a válasz: $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ méter oldalú négyzeteket kell kivágnunk.

2. Egy épülő atlétikapályán két párhuzamos egyenes szakaszból és az őket összekötő félkörívekből áll a futópálya. Hogyan kell kialakítani a pálya alakját, hogy a futópálya hossza 400 méter legyen, és a lehető legnagyobb területű téglalap alakú focipálya férjen el a belsejében?

   Megoldás Jelölje x és y a focipálya két oldalhosszát méterben úgy, hogy y jelöli azon oldalak hosszát, melyek részei a futópályának is. Ekkor a feltételek szerint $2y+x\pi=400$. Másrészt a focipálya területe $T=xy$. A feltételünkből kifejezve y-t $y=200-\frac{\pi}{2}x$ adódik, így $T=x\left(200-\frac{\pi}{2}x\right)=200x-\frac{\pi}{2}x^2$. Ennek a kifejezésnek keressük a maximumát az $x,y>0$ feltételek mellett, azaz a $0<x<\frac{400}{\pi}$ intervallumon. A terület lokális szélsőértékeit a $T'(x)=0$ feltétel mellett kereshetjük. Mivel $T'(x)=200-\pi x$, így az egyetlen lehetséges lokális szélsőértékhely $x=\frac{200}{\pi}$. Megvizsgálva a derivált előjelét és T monotonitását:

	$0<x<\frac{200}{\pi}$	$\frac{200}{\pi}$	$\frac{200}{\pi}<x<\frac{400}{\pi}$
$T'(x)$	$+$	0	$-$
$T(x)$	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$

   A függvény monotonitása miatt az $x=\frac{200}{\pi}$ helyen a függvénynek abszolút maximuma is van. A focipálya területének maximuma: $T_{\max}=\frac{20000}{\pi}$ m^2.

3. A Populista Párt vezetője tudja, hogy ha hatalomra kerülése esetére a bérek x-szeresére való növelését ígéri meg, akkor a szavazók $30(x-1)^2$ százaléka nem fog hinni neki, viszont a maradék szavazók $50(x-1)$ százaléka a pártra fog szavazni. Hányszoros bérnövekedést kell ígérnie, hogy a lehető legtöbb szavazatot kapja?

   Megoldás Ha a Populista Párt vezetője x-szeres bérnövekedést ígér, akkor $30(x-1)^2$ százalék, tehát az emberek $0,3(x-1)^2$ hányada nem fog hinni neki. A maradék az összes ember $1-0,3(x-1)^2$ hányada. Ezek $50(x-1)$ százaléka, azaz $0,5(x-1)$-szerese fog a pártra szavazni. Tehát a pártra leadott szavazatok száma a teljes (szavazóképes) népesség $(1-0,3(x-1)^2)\cdot 0,5(x-1)$ szerese. Legyen $f(x)=(1-0,3(x-1)^2)\cdot 0,5(x-1)=$

$-0,15x^3 + 0,45x^2 + 0,05x - 0,35$. Ekkor $f'(x) = -0,45x^2 + 0,9x + 0,05$. Az $f'(x) = 0$ egyenlet megoldásai $x_{1,2} = 1 \pm \frac{\sqrt{10}}{3}$. Feltételezhetően a bérek negatív számszorosára változását kizárhatjuk (azaz $x > 0$ feltehető), így egyedül az $x = 1 + \frac{\sqrt{10}}{3}$ gyök jöhet számba. A táblázat:

	$0 < x < 1 + \frac{\sqrt{10}}{3}$	$1 + \frac{\sqrt{10}}{3}$	$1 + \frac{\sqrt{10}}{3} < x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$

A függvénynek most is abszolút maximuma van, így a legtöbb szavazat begyűjtéséhez $\left(1 + \frac{\sqrt{10}}{3}\right)$-szoros bérnövekedést kell ígérni.

4. Egy derékszögű háromszög átfogója 10 cm. Maximum mennyi lehet a területe?

Megoldás Legyen a háromszög két befogója $0 < x, y < 10$. Ekkor a Pitagorasz-tétel alapján $x^2 + y^2 = 100$, azaz $y = \sqrt{100 - x^2}$. A háromszög területe $T = \frac{xy}{2} = \frac{1}{2}x\sqrt{100 - x^2}$. A függvény lehetséges lokális szélsőértéke a $T'(x) = 0$ egyenlet megoldásai. Most $T'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{100 - x^2} + \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2}\left(100 - x^2\right)^{-1/2} \cdot (-2x) = \frac{100-2x^2}{2\sqrt{100-x^2}}$. A kifejezés gyökei $x = \pm 5\sqrt{2}$, amiből fizikailag csak $x = 5\sqrt{2}$ lehetséges. A táblázat:

	$0 < x < 5\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$	$5\sqrt{2} < x < 10$
$T'(x)$	$+$	0	$-$
$T(x)$	$\uparrow$	lok. max.	$\downarrow$

A monotonitási tulajdonságok miatt az $x = 5\sqrt{2}$ helyen a területnek abszolút maximuma is van. Tehát a terület $x = y = 5\sqrt{2}$ esetén maximális, és maximális értéke $T_{\max} = 25$. Megjegyezzük, hogy a feladatra egy geometriai megoldás is adható, ha észrevesszük, hogy a derékszögő háromszög harmadik csúcsa rajta van az átfogó Thalesz-körén, és megpróbáljuk az átfogóhoz tartozó magasságot maximalizálni.

5. Egy egyenes körkúp alapkörének a sugara 2 méter, magassága 5 méter. Határozzuk meg a kúpba írható maximális térfogatú henger adatait!

Megoldás Legyen a henger alapkörének sugara r, magassága m. Vegyük észre, hogy ha a kúpot és a hengert elmetszük egy a tengelyüket tartalmazó síkkal, akkor a sík a kúpot, és a kúpnak a hengeren kívüli, a kúp csúcsához közelebbi részét hasonló háromszögekben metszi. Ezen háromszögek megfelelő oldalainak arányára az $\frac{5}{2} = \frac{5-m}{r}$ össszefüggés adódik, amiből $r = 2 - \frac{2m}{5}$. A henger térfogata $V = r^2\pi m = \left(2 - \frac{2m}{5}\right)^2 m\pi = \frac{4\pi}{25}m^3 - \frac{8\pi}{5}m^2 + 4\pi m$. Ekkor $V'(m) = \frac{12\pi}{25}m^2 - \frac{16\pi}{5}m + 4\pi$, melynek gyökei $m = 5$ és $m = \frac{5}{3}$. Mivel geometriai okok miatt $0 < m < 5$, így ezek közül csak az $m = \frac{5}{3}$ lehet lokális szélsőértékhely. A táblázat:

	$0 < m < \frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3} < m < 5$
$V'(m)$	$+$	0	$-$
$V(m)$	$\uparrow$	absz. max.	$\downarrow$

Így a maximális térfogatú henger adatai: $m = \frac{5}{3}$ méter, $r = \frac{4}{3}$ méter.

6.[hf] Magyarországon a teljes lakosság 1 év alatt összesen 10^{13} forintnyi jövedelmet kap. Tudjuk, hogy ha a keresetek $(100y)\%$-át kéne jövedelemadóként befizetni, akkor a lakosság a befizetendő adó $(100y^3)\%$-át elcsalná (nem fizetné be). Ilyen feltételek mellett mekkorára kéne az adókulcsot állítani, hogy a lehető legtöbb pénz folyjon be?

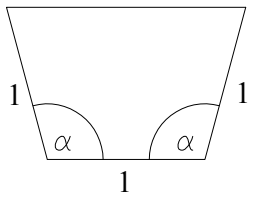
Megoldás A feladat szövege szerint $(100y)\%$-os (azaz y arányú) adókulcs mellett a lakosság a befizetendő adó y^3-szorosát elcsalná, azaz a befizetett adó az összes jövedelem $100y\,(1-y^3)\,\%$-a lenne. Mivel az összes jövedelem a feladat szövegében rögzített (10^{13} forint), így elég az $f(y) = y - y^4$ függvény maximumhelyét megkeresni a $0 < y < 1$ feltétel mellett. Ehhez az $f'(y) = 1 - 4y^3$ kifejezés gyökeit keressük meg: $y = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. A táblázat:

	$0 < y < \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} < m < 1$
$f'(y)$	$+$	0	$-$
$f(y)$	$\uparrow$	absz. max.	$\downarrow$

Azaz a befizetett adó $\frac{100}{\sqrt[3]{4}}\%$-os, azaz kb. $62,996\%$-os adókulcs esetén lesz maximális.

7.[hf] Egy egyenlő szárú trapéz két szára és az alapja 1 cm hosszú. Hogyan kell megválasztani a száraknak az alappal bezárt szögét, hogy a területe maximális legyen?

Megoldás Az ábra jelöléseit használjuk. Ekkor $\frac{\pi}{3} < \alpha < \pi$, ellenkező esetben ugyanis nem kapunk trapézt.



Húzzuk meg a trapéz magasságát az alap valamelyik csúcsából. Ez egy olyan derékszögű háromszöget metsz le a trapézból, melynek átfogója 1, és a két hegyesszöge $\alpha - \frac{\pi}{2}$ és $\pi - \alpha$; így a háromszög két befogója $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ és $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$. Ezek segítségével felírhatóak a trapéz hiányzó adatai, a magassága $\sin\alpha$, az ismeretlen oldalhossza $1 - 2\cos\alpha$. A trapéz területe így $T(\alpha) = \frac{1+(1-2\cos\alpha)}{2}\sin\alpha = \sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha$. Ennek deriváltja $T'(\alpha) = \cos\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = -2\cos^2\alpha + \cos\alpha + 1$. A $T'(\alpha) = 0$ egyenlet megoldásai $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ és $\cos\alpha = 1$. Ebből a vizsgált intervallumon csak $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ lesz a megoldás. A táblázat:

	$\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3} < \alpha < \pi$
$T'(\alpha)$	$+$	0	$-$
$T(\alpha)$	$\uparrow$	absz. max.	$\downarrow$

Azaz a trapéz területe $\frac{2\pi}{3}$, vagyis $120°$-os szögnél lesz maximális.

8.[hf] Lenke elhatározta, hogy feltölti a 10000 literes úszómedencéjét, melyhez a vizet a közeli kútról fogja vödörrel hordani. Tetszőlegesen nagy vödröt választhat a munkához, de tudja, hogy ha egy fordulóban l liter vizet hoz, akkor a forduló $64 + l^2$ másodpercig fog tartani. Hogyan válassza meg l értékét, hogy a lehető leggyorsabban végezzen?

Megoldás Ha Lenke l liter vizet hoz egy fordulóval, akkor $\frac{10000}{l}$ fordulóra lesz szükség. Minthogy egy forduló $64 + l^2$ másodpercig tart, így a hordáshoz szükséges összes idő ebben az esetben $t(l) = \frac{10000}{l} \cdot (64 + l^2) = \frac{640000}{l} + 10000l$ (az utolsó forduló okozta eltérést figyelmen kívül hagyjuk). A lehetséges lokális szélsőértékhelyek a $t'(l) = 0$, azaz a $-\frac{640000}{l^2} + 10000 = 0$ egyenlet megoldásai, ami $l = 8$. A táblázat:

	$0 < l < 8$	8	$8 < l$
$t'(l)$	$-$	0	$+$
$t(l)$	$\downarrow$	absz. min.	$\uparrow$

Így a vízhordás 8 liter nagyságú vödörrel tart a legrövidebb ideig.

9.hf Roland elhatározza, hogy kifesti a szobáját. Persze ehhez előbb a bútorokat többé-kevésbé össze kell tologatnia, hogy mindenütt hozzáférjen a falhoz. Roland tudja, hogy ha t órát fordít a bútorok összetologatására, akkor a festéssel $10(1+1/t)$ óra alatt végez, viszont a festés után megint t órát vesz igénybe a bútorok eredeti helyzetbe való állítása. Hogyan kell t értékét megválasztania, hogy a lehető leghamarabb legyen kész?

Megoldás A feltételek szerint a festésre és a pakolásra fordított idő összege órában $T = 2t + 10\left(1+\frac{1}{t}\right)$, ha t órát fordított pakolásra. Ekkor $T'(t) = 2 - \frac{10}{t^2}$. A $T'(t) = 0$ egyenlet egyetlen megoldása $t = \sqrt{5}$. A táblázat:

	$0 < t < \sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{5} < t$
$T'(t)$	$-$	0	$+$
$T(t)$	$\downarrow$	absz. min.	$\uparrow$

Vagyis $\sqrt{5}$ órát érdemes a pakolással tölteni.

10.hf Egy hajó üzemeltetési költségeit a fűtőanyag-fogyasztás és egyéb kiadások képezik. Az óránként felhasznált fűtőanyag A értéke függ a sebességtől; az összefüggést az $A = 0,03 \cdot v^3$ képlet fejezi ki, ahol v (km/h) a sebesség; az egyéb kiadások B forintot tesznek ki. Határozzuk meg, milyen sebességgel haladjon a hajó, hogy a kilométerenkénti költség a lehető legkisebb legyen. (Vegyük B-t pl. 480 Ft-nak.)

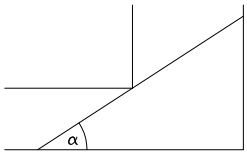
Megoldás Ha $v > 0$ a hajó sebessége, az óránkénti összköltség forintban $0,03 \cdot v^3 + 480$. Egy óra alatt a hajó v km-t tesz meg, így a kilométerenkénti összköltség $C = 0,03 \cdot v^2 + \frac{480}{v}$. Ekkor $C'(v) = 0,06v - \frac{480}{v^2}$, melynek egyetlen gyöke $v = 20$. A táblázat:

	$0 < v < 20$	20	$20 < v$
$C'(v)$	$-$	0	$+$
$C(v)$	$\downarrow$	absz. min.	$\uparrow$

Így akkor lesz a kilométerenkénti költség minimális, ha 20 km/h-s sebességgel halad a hajó.

11.hf Két egymást merőlegesen metsző folyosó szélessége 2,4 m, illetve 1,6 m. Mekkora az a leghosszabb létra, amelyet (vízszintes helyzetben) az egyik folyosóról a másikra át lehet vinni?

Megoldás A fő észrevételünk az lesz, hogy a leghosszabb létra hossza, amelyiket az egyik folyosóról a másikra át lehet vinni, megegyezik az ábrán látható, a vízszintessel α szöget bezáró szakaszok hosszának minimumával $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ esetén. Ez lesz ugyanis a leghosszabb létra, amit a kereszteződésnél a belső sarok körül vízszintesen még éppen el lehet fordítani.



Meggondolható, hogy mivel a két folyosó szélessége 2,4 m és 1,6 m, így (méterben) az ábrán látható szakasz hossza $L(\alpha) = \frac{1,6}{\sin\alpha} + \frac{2,4}{\cos\alpha}$. Ennek deriváltja $L'(\alpha) = -\frac{1,6\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{2,4\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$.

A lehetséges lokális szélsőértékhelyekre $\operatorname{tg}^3\alpha = \frac{2}{3}$ adódik, azaz a vizsgált intervallumon az egyetlen megoldás $\alpha = \arctan\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \approx 41,1398°$. A táblázat:

	$0 < \alpha < \arctan\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$	$\arctan\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$	$\arctan\sqrt[3]{\frac{2}{3}} < \alpha < \frac{\pi}{2}$
$L'(\alpha)$	$-$	0	$+$
$L(\alpha)$	$\downarrow$	absz. min.	$\uparrow$

Vagyis a leghosszabb létra, amit a saroknál el lehet fordítani, $L\left(\arctan\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) \approx 5,6188$ méter hosszú.

12.hf Egy házra olyan ablakokat terveznek, amelyeknek alsó része téglalap alakú, felső része pedig a téglalapra illő félkör. Egy-egy ablak adott kerülete K. Hogyan kell megválasztani az ablakok méreteit, hogy minél több fényt engedjenek át?

Megoldás Legyen az ablakok alsó élének hossza x, és a függőleges éleinek hossza y. Így az ablakok kerülete $K = 2y + x\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$, amiből $y = \frac{K}{2} - x\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$. Az ablakok által beengedett fény az ablakok területével arányos, így elég megkeresni ez utóbbi mennyiség maximumát. A terület $T = xy + x^2\frac{\pi}{8} = x\left(\frac{K}{2} - x\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) + x^2\frac{\pi}{8} = \frac{K}{2}x - x^2\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$. A függvény deriváltja $T'(x) = \frac{K}{2} - x\frac{\pi+4}{4}$. Az egyetlen lehetséges lokális szélsőértékhely $x = \frac{2K}{\pi+4}$. Mivel a feltételek szerint $0 < x < \frac{K}{1+\frac{\pi}{2}} = \frac{2K}{\pi+2}$, így a táblázat:

	$0 < x < \frac{2K}{\pi+4}$	$\frac{2K}{\pi+4}$	$\frac{2K}{\pi+4} < \frac{2K}{\pi+2}$
$T'(x)$	$+$	0	$-$
$T(x)$	$\uparrow$	absz. max.	$\downarrow$

Tehát a maximális fényerősség eléréséhez az ablakok méreteit $x = \frac{2K}{\pi+4}$ és $y = \frac{K}{2} - \frac{2K}{\pi+4}\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\pi+4}K$ módon kell megválasztani.