Feladatmegoldások az A1 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/ősz, 5. hét

1. Mely sorok konvergensek és divergensek? (Használjuk a majoráns- és minoráns-elvet.)

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2}$ b)^{hf} $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n+2}{n^7}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7n^3-7}{n^5+2n^4}$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3-n+3}{3n^4+2n^2+7}$

e)^{hf} $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3-n+3}{2n^5+2n^2+6}$ f)^{hf} $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^{n+1}}{1+6^{n-1}}$ g)^{hf} $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}$ h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}}$

Megoldás Első észrevételünk, hogy a feladatban szereplő sorok mind pozitív tagú sorok, így a majoráns- és minoráns-elv alkalmazható rájuk.

a) Mivel $\frac{2n+1}{n^2} > \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens, így a minoráns-elv alapján $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2}$.

b) A $\frac{5n+2}{n^7} \leq \frac{7}{n^6}$ egyenlőtlenség alapján, mivel $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7}{n^6} = 7\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$ konvergens, a majoráns-elvet alkalmazva $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n+2}{n^7}$ konvergens.

c) Most a $\frac{7n^3-7}{n^5+2n^4} \leq \frac{7}{n^2}$ egyenlőtlenséget használjuk, és a majoráns-elv alapján azt kapjuk, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7n^3-7}{n^5+2n^4}$ konvergens.

d) A $\frac{2n^3-n+3}{3n^4+2n^2+7} \geq \frac{n^3}{12n^4} = \frac{1}{12n}$ egyenlőtlenség és a minoráns-elv alapján a sor divergens.

e) A $\frac{n^3-n+3}{2n^5+2n^2+6} \leq \frac{4n^3}{n^5} = \frac{4}{n^2}$ egyenlőtlenség és a majoráns-elv alapján a sor konvergens.

f) $\frac{2^n+3^{n+1}}{1+6^{n-1}} \leq \frac{6\cdot 3^n}{\frac{1}{6}\cdot 6^n} = \frac{36}{2^n}$, így a sor konvergens.

g) $\frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}} \geq \frac{1}{2n}$, így a sor divergens.

h) $\frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}} \geq \frac{1}{2n}$, így a sor divergens.

2. Mely sorok konvergensek és divergensek? (Használjuk a gyök- és hányadoskritériumot.)

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^{n-2}}{(n+1)!}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^{3n}}{n^4}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{4n+1}\right)^{3n^2}$ d)^{hf} $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n^5 2^{3n+1}}$

e)^{hf} $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}n^7}{3^{2n+1}}$ f)^{hf} $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5)3^{n-1}}{5^{n+1}}$ g)^{hf} $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)4^{n-1}}{(n+5)\cdot n!}$ h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$

i)^{hf} $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+3}{3n+1}\right)^{n^2}$

Megoldás Mivel a sorok mind pozitív tagú sorok, a gyök- és hényadoskritériumok alkalmazhatóak rájuk.

a) A hányadoskritériumot alkalmazzuk. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{7^{n-1}}{(n+2)!}}{\frac{7^{n-2}}{(n+1)!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{7}{n+2} = 0 < 1$, azaz a sor konvergens.

b) A gyökkritériumot alkalmazzuk. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{5^{3n}}{n^4}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^3}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^4} = 125 > 1$, azaz a sor divergens.

c) A gyökkritériumot alkalmazzuk.
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{4n}{4n+1}\right)^{3n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{4n}{4n+1}\right)^{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)^{4n+1}\right)^{\frac{3n}{4n+1}} = \left(e^{-1}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{e^{\frac{3}{4}}} < 1$, azaz a sor konvergens.

d) A gyökkritériumot alkalmazzuk. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{2n}}{n^5 2^{3n+1}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^2}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^5 2^3 \sqrt[n]{2}} = \frac{1}{2} < 1$, azaz a sor konvergens.

e) A hányadoskritériumot alkalmazzuk. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{3n+3}(n+1)^7}{3^{2n+3}}}{\frac{2^{3n}n^7}{3^{2n+1}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^3(n+1)^7}{n^7 3^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{8}{9}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^7 = \frac{8}{9} < 1$, azaz a sor konvergens.

f) Most $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{5} < 1$, azaz a sor konvergens.
g) A hányadoskritérium alapján $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$, azaz a sor konvergens.
h) A hányadoskritérium alapján $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n\cdot(n+2)}{(n+1)^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$, és a sor konvergens.
i) Most a gyökkritérium alapján $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{\frac{2}{3}} > 1$, azaz a sor divergens.

3. Igaz? Hamis?

a) Ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, akkor $a_n \to 0$.

b) Ha $a_n \to 0$, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens.

c) Ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens , akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergens.

Megoldás a) Igaz, előadáson bizonyítottuk.
b) Beláttuk előadáson, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor erre ellenpélda, azaz az állítás nem igaz. c) Ha a sor pozitív tagú, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergenciájából következik, hogy $0 \le a_n < 1$ teljesül véges sok tag kivételével. Azaz ekkor $0 \le a_n^2 < a_n$ véges sok tag kivételével. Minthogy véges sok tag megváltoztatása nem befolyásolja a konvergenciát, a majoráns-elvet alkalmazva azt kapjuk, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergens. Ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nem pozitív tagú, akkor a fenti érv nem alkalmazható, sőt, az állítás nem igaz. Példa erre a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ sor, ami Leibniz-sor, azaz konvergens, de a négyzetek összegére a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sort kapjuk, ami divergens.

4. Abszolút konvergensek? Feltételesen konvergensek? Divergensek?

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$ c)^{hf} $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2}$

d)^{hf} $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^n+1}$ e)^{hf} $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{3n-2}$ f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{n+5}\right)^n$

Megoldás a) A sor váltakozó előjelű, a $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ sorozat szigorúan csökkenő, és $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, tehát a sor Leinbiz-sor, és konvergens. Másrészt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergens az előadáson tanultak alapján, így a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ sor feltételesen konvergens.
b) Vegyük észre, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \neq 0$, azaz a sor nem teljesíti a konvergencia szükséges feltételét, így divergens.
c) Az a) feladat gondolatmenete alapján a sor feltételesen konvergens.
d) A $\frac{2^n}{3^n+1} \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$ becslést és a majoráns-elvet alkalmazva azt kapjuk, hogy a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n+1}$ sor konvergens, így az eredeti sor abszolút konvergens.
e) Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-2} = \frac{2}{3} \neq 0$, a sor divergens.
f) Most $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+5}\right)^n = e^{-4} \neq 0$, azaz a sor divergens.