Feladatmegoldások az A1 (VBK) tárgy hallgatói számára
2022/23/ősz, 3. hét

1. Vizsgálja meg monotonitás és korlátosság szempontjából az alábbi sorozatokat:

   a) $a_n = \frac{3n-2}{2n+3}$ b)^{hf} $b_n = \frac{n-4}{n+3}$ c) $c_n = \frac{(-1)^n}{n+3}$ d)^{hf} $d_n = n^2 - 3n + 2$

Megoldás a) $a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)-2}{2(n+1)+3} - \frac{3n-2}{2n+3} = \frac{(3n+1)(2n+3)-(3n-2)(2n+5)}{(2n+5)(2n+3)} = \frac{13}{(2n+5)(2n+3)}$. Mivel n pozitív egész, így a fenti kifejezés n minden értékére pozitív, azaz (a_n) szigorúan növő. Emiatt (a_n) alulról korlátos, és $\inf(a_n) = a_1 = \frac{1}{5}$. Másrészt, $a_n = \frac{\frac{3}{2}(2n+3)-\frac{13}{2}}{2n+3} = \frac{3}{2} - \frac{13}{4n+6}$, azaz minden n-re $a_n \leq \frac{3}{2}$, vagyis $\frac{3}{2}$ felső korlát. Az átalakításból az is látszik, hogy ha n elegendően nagy, a_n tetszőlegesen megközelíti $\frac{3}{2}$-et, azaz $\sup(a_n) = \frac{3}{2}$. *Megjegyzések:*

- A felülről korlátosságra vonatkozó gondolatmenet kikerülhető, ha kiszámoljuk a sorozat határértékét $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}$, és észrevesszük, hogy a határérték létezése miatt (a_n) korlátos, és alkalmazzuk azt a tételt, hogy monoton növő és korlátos sorozatnál $\sup(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}$.
- Az a_n-re vonatkozó (második) átalakítás azt is mutatja, hogy (a_n) szigorúan növő, így ennek felhasználásával a megoldás első fele elhagyható.

b) Most $b_{n+1} - b_n = \frac{n-3}{n+4} - \frac{n-4}{n+3} = \frac{7}{(n+3)(n+4)} > 0$. Így (b_n) szigorúan növő. Azaz $\inf(b_n) = b_1 = -\frac{3}{4}$ és $b_n = 1 - \frac{7}{n+4}$ miatt $\sup(b_n) = 1$.
c) Mivel a sorozat váltakozó előjelű, így nem monoton. Másrészt, ha n páros, akkor $c_n = \frac{1}{n+3}$ egy szigorúan csökkenő, pozitív számok alkotta részsorozat, és ha n páratlan, akkor $c_n = -\frac{1}{n+3}$ egy negatív számok alkotta, szigorúan növő részsorozat. Emiatt (c_n) korlátos, és $\inf(c_n) = c_1 = -\frac{1}{4}$, valamint $\sup(c_n) = c_2 = \frac{1}{5}$.
d) $d_{n+1} - d_n = 2n - 2 \geq 0$, de mivel $n = 1$ esetén a kifejezés 0, így (d_n) növő, de nem szigorúan, amiből $\inf(d_n) = d_1 = 0$ is következik. Másrészt $d_n = (n-1)(n-2)$ a gyöktényezős alak felhasználásával, így láthatóan (d_n) nem korlátos felülről. Ez utóbbi észrevétel igazolható (d_n) határértékének kiszámolásával is.

2. Határozzuk meg a határértékeket, és keressünk n_ε küszöböt ε-hoz a definíció alapján!

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-1}{4n+99}$ b)^{hf} $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n+4}{2n-1}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-6}{6n^2+16}$

Megoldás a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-1}{4n+99} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3-\frac{1}{n}}{4+\frac{99}{n}} = \dfrac{3}{4}$, azaz a határérték $\frac{3}{4}$. Most legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és oldjuk meg a $\left|\frac{3n-1}{4n+99} - \frac{3}{4}\right| < \varepsilon$ egyenlőtlenséget n-re. Ebből, a megfelelő algebrai átalakításokat elvégezve rendre a $\left|-\frac{301}{4(4n+99)}\right| < \varepsilon$, $\frac{301}{4\varepsilon} < 4n + 99$ és $\frac{301-396\varepsilon}{16\varepsilon} < n$ egyenlőtlenségeket kapjuk. A konvergens sorozat előadáson szereplő definíciója alapján így pl. az $n_\varepsilon = \frac{301-396\varepsilon}{16\varepsilon}$ választás megfelelő.
b) Most $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n+4}{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7+\frac{4}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \dfrac{7}{2}$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és oldjuk meg a $\left|\frac{7n+4}{2n-1} - \frac{7}{2}\right| < \varepsilon$ egyenlőtlenséget. Ennek megoldása $\frac{15+2\varepsilon}{4\varepsilon} < n$, azaz az $n_\varepsilon = \frac{15+2\varepsilon}{4\varepsilon}$ választás megfelelő.
c) A határérték $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}-\frac{6}{n^2}}{6+\frac{16}{n^2}} = 0$. Vizsgáljuk meg a szokásos $\left|\frac{n-6}{6n^2+16}\right| < \varepsilon$ egyenlőtlenséget, ahol $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Először is, kössük ki, hogy $n \geq 6$: mivel mi minden ε-ra elegendően nagy megoldásokat akarunk csak keresni, az nem lényeges számunkra, hogy az $n = 1, 2, 3, 4, 5$ értékek megoldások-e. A kikötésünk eredményeképpen a bal oldali tört nem lehet negatív, azaz

az abszolút érték elhagyható, melyből a $0 < 6\varepsilon n^2 - n + 6 - 16\varepsilon$ másodfokú egyenlőtlenséget kapjuk. Ennek megoldása az $n > \frac{1+\sqrt{1-144\varepsilon+384\varepsilon^2}}{12\varepsilon}$ vagy az $n < \frac{1-\sqrt{1-144\varepsilon+384\varepsilon^2}}{12\varepsilon}$ egyenlőtlenséget kielégítő n értékek. Mivel mi $n > n_\varepsilon$ alakú megoldásokat keresünk, az első feltételt használjuk n_ε megadásához. Minthogy kikötöttük az $n \geq 6$ feltételt, ezt is garantálnunk kell, így az $n_\varepsilon = \max\left\{6, \frac{1+\sqrt{1-144\varepsilon+384\varepsilon^2}}{12\varepsilon}\right\}$ választást tudjuk tenni. Megjegyezzük, hogy bizonyos $\varepsilon > 0$ értékekre előfordulhat, hogy $1 - 144\varepsilon + 384\varepsilon^2$ negatív, azaz az n_ε-ra adott választásunk értelmetlen. Mivel elegendően kicsi ε esetén $1 - 144\varepsilon + 384\varepsilon^2 > 0$ mindig teljesül, így ezekben az esetekben a küszöböt választhatjuk valamelyik elegendően kicsi ε-hoz tartozó küszöbnek.

3.[hf] Lenkétől vizsgán megkérdezik a sorozat konvergenciájának fogalmát. Ezt válaszolja:
„Az a_n sorozat pontosan akkor konvergens, ha létezik olyan a szám, amelyhez a_n egyre közelebb kerül.” Meg fog bukni?
Lenke az ismételt vizsgán is ugyanezt a kérdést kapja. Most így felel:
„Az a_n sorozat pontosan akkor tart a-hoz, ha $|a_n - a|$ tart 0-hoz.” Most átmegy?

Megoldás Bár az $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$ sorozat konvergens és határértéke nulla, a fenti sorozat elemei nem kerülnek egyre közelebb nullához. Azaz az első állítás hamis. Másrészt, az előadáson elhangzottak alapján $|a_n - a|$ pontosan akkor tart nullához, ha $a_n - a$ tart nullához. Így a második állítás következik a határértékre vonatkozó műveleti azonosságokból és a konstans sorozat határértékéből, azaz az állítás igaz. (Ami a feladatban szereplő kérdéseket illeti, az első vizsgán Lenke feltehetően megbukott, mert megismételte a vizsgát. Az, hogy másodszor átmegy-e, természetesen attól is függ, hogy a többi kérdésre milyen választ ad.)

4. A gonosz varázsló minden nap arannyá változtatja a Földön lévő vízmennyiség felét. Mennyi idő múlva csökken a vízkészlet 1 pohárnyi alá? (A Földön kb. $1386 \cdot 10^6$ km^3 víz van.)
[hf] Mennyi idő múlva marad csak 1 vízmolekula?

Megoldás Jelölje a_n az n-edik nap (végén) mért vízmennyiséget literben. Mivel egy 1 km^3 = 10^{12} dm^3 = 10^{12} l, így a feltételek szerint $a_0 = 1386 \cdot 10^{18} = 1,386 \cdot 10^{21}$. Ha minden nap az aznapi vízmennyiség felére csökken, akkor $a_n = \frac{a_0}{2^n}$. Számoljunk egy 2 dl-es pohárral. Ekkor az $a_n < 0,2$ egyenlőtlenséget kell megoldanunk, melynek megoldása $n \geq 73$. Így a 73. nap végén lesz először a vízmennyiség egy pohár víznél kevesebb. Jelölje most b_n az n-edik nap végén mért vízmennyiséget a vízmolekulák számában. Mivel 1 liter víz kb. $3,35 \cdot 10^{25}$ vízmolekulából áll (ez kiszámolható a 1 liter víz és egy mol víz tömegéből), $b_n = \frac{b_0}{2^n}$, ahol $b_0 = 4,64 \cdot 10^{46}$. A $b_n \leq 1$ egyenlőtlenség megoldásából $n > 155$ adódik, azaz a 156. nap végén lesz 1 vízmolekula.

5. Számoljuk ki a határértékeket:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{-1}}{1+n^{-2}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^5 - 216n^2 + n - 2}{-n^8 + 500n^4 + 86}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{22} + 18n^{18}}{8n^{22} - 4n^2}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + 82n^{47} + 23610}{-14n^{25} + 2n^8 + 3}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^n + 401n + 402}{2^{2n} + n - 88}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!}{(5-2n)n!}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n-3} - \sqrt{n+9}\right)$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n^2+5n-3} - \sqrt{2n^2-n}\right)$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{25n! + n^{25}}{25n^n}$

Megoldás a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{-1}}{1+n^{-2}} = \dfrac{0}{1+0} = 0$, mivel $\frac{1}{n} \to 0$, és $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \to 0$ a szorzatokra vonatkozó műveleti azonosságok miatt.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^5 - 216n^2 + n - 2}{-n^8 + 500n^4 + 86} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^5\left(1 - \frac{216}{n^3} + \frac{1}{n^4} - \frac{2}{n^5}\right)}{n^8\left(-1 + 500\frac{1}{n^4} + \frac{86}{n^8}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - \frac{216}{n^3} + \frac{1}{n^4} - \frac{2}{n^5}}{n^3\left(-1 + 500\frac{1}{n^4} + \frac{86}{n^8}\right)} = 0$, felhasználva, hogy „$\frac{1}{-\infty} = 0$”.

c) Az előző feladatban szereplő átalakításokkal $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{22} + 18n^{18}}{8n^{22} - 4n^2} = \dfrac{1}{8}$.

d) Most $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n + 82n^{47} + 23610}{-14n^{25} + 2n^8 + 3} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2^n}{n^{25}} \cdot \frac{1 + 82\frac{n^{47}}{2^n} + \frac{23610}{2^n}}{-14 + 2\frac{1}{n^{17}} + \frac{3}{n^{25}}}\right) = -\infty$, mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^{25}} = \infty$.

e) Az előző feladat átalakításaival $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^n + 401n + 402}{2^{2n} + n - 88} = \infty$.

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(5-2n)n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{(5-2n)}$, így az eddigiekhez hasonlóan kihozható, hogy a határérték $-\frac{1}{2}$.

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n-3} - \sqrt{n+9}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n}\left(\sqrt{4 - \dfrac{3}{n}} - \sqrt{1 + \dfrac{9}{n}}\right)\right) = \infty$

h) A nevező gyöktelenítésével $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n^2 + 5n - 3} - \sqrt{2n^2 - n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n-3}{\sqrt{2n^2+5n-3} + \sqrt{2n^2-n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{6 - \frac{3}{n}}{\sqrt{2 + \frac{5}{n} - \frac{3}{n^2}} + \sqrt{2 - \frac{1}{n}}} = \frac{6}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{25n! + n^{25}}{25n^n} = 0$, a d) és e) feladathoz hasonlóan levezetve.

6. Igaz? Hamis?

a) ha $a_n \to a$, akkor $a_n^2 \to a^2$

b) ha $a_n^2 \to a^2$, akkor $a_n \to a$

c) ha $a_n > 0$ és $b_n \to \infty$, akkor $a_n b_n \to \infty$

Megoldás a) Igaz, következik a határérték műveleti azonosságaiból.
b) Hamis, ellenpélda rá pl. az $a_n = (-1)^n$ sorozat, vagy akár az $a_n = 1$ sorozat $a = -1$ esetén.
c) Hamis, legyen pl. $a_n = \frac{1}{n}$ és $b_n = n$.

7.[hf] Számold ki a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{2/3} + 8n^{\sqrt{3}} + \sqrt{n} + 12}{n^2 + 5n - 7}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{-2} + 4}{2n^{-3} - 1}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{9\sqrt[3]{n} - 3\sqrt{2n} + 1}{\sqrt[4]{n} + \sqrt{3n}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_{10}(n^2) + 3}{\log_3(n) - 1}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 2^n + 3^n}{n^{2n} - 3n^2}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7^n + n^7 + 7}{2^{2n} + (2n)^2 + 2}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^4 + 2n} - n^2\right)$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3 - 3n + 3} - \sqrt[3]{n^3 + 123n^2 - 1}\right)$

Megoldás a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{2/3} + 8n^{\sqrt{3}} + \sqrt{n} + 12}{n^2 + 5n - 7} = 0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{-2} + 4}{2n^{-3} - 1} = -4$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{9\sqrt[3]{n} - 3\sqrt{2n} + 1}{\sqrt[4]{n} + \sqrt{3n}} = \dfrac{-3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = -\sqrt{6}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log_{10}(n^2) + 3}{\log_3(n) - 1} = \dfrac{2}{\log_3 10} = 2\log_{10} 3$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 2^n + 3^n}{n^{2n} - 3n^2} = 0$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7^n + n^7 + 7}{2^{2n} + (2n)^2 + 2} = \infty$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^4 + 2n} - n^2\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{\sqrt{n^4 + 2n} + n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} = 0$

h) A nevező gyöktelenítéséhez itt az $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ azonosságot használjuk fel.

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3 - 3n + 3} - \sqrt[3]{n^3 + 123n^2 - 1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-123n^2 - 3n + 4}{(n^3-3n+3)^{2/3} + (n^3-3n+3)^{1/3}(n^3+123n^2-1)^{1/3} + (n^3+123n^2-1)^{2/3}} =$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-123 - \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}}{\left(1 - \frac{3}{n^2} + \frac{3}{n^3}\right)^{2/3} + \left(1 - \frac{3}{n^2} + \frac{3}{n^3}\right)^{1/3}\left(1 + \frac{123}{n} - \frac{1}{n^3}\right)^{1/3} + \left(1 + \frac{123}{n} - \frac{1}{n^3}\right)^{2/3}} = \frac{-123}{3} = -41$