16. ELŐADÁS: FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLHATÓSÁGA

MOTIVÁCIÓ

Sok gyakorlati kérdés megválaszolásához szükség van egy kívánt értéket véges összegekkel való közelítő eljárásokra.

PÉLDA

Nem egyenes szakaszok (illetve, lapok) által határolt sík-(illetve, tér-)idomok terület-(illetve, térfogat)-számítása.

Ezek az eljárások a matematikában az integrálszámítás körébe tartoznak.

MOTIVÁCIÓ

Sok gyakorlati kérdés megválaszolásához szükség van egy kívánt értéket véges összegekkel való közelítő eljárásokra.

PÉLDA

Nem egyenes szakaszok (illetve, lapok) által határolt sík-(illetve, tér-)idomok terület-(illetve, térfogat)-számítása.

Ezek az eljárások a matematikában az integrálszámítás körébe tartoznak.

MOTIVÁCIÓ

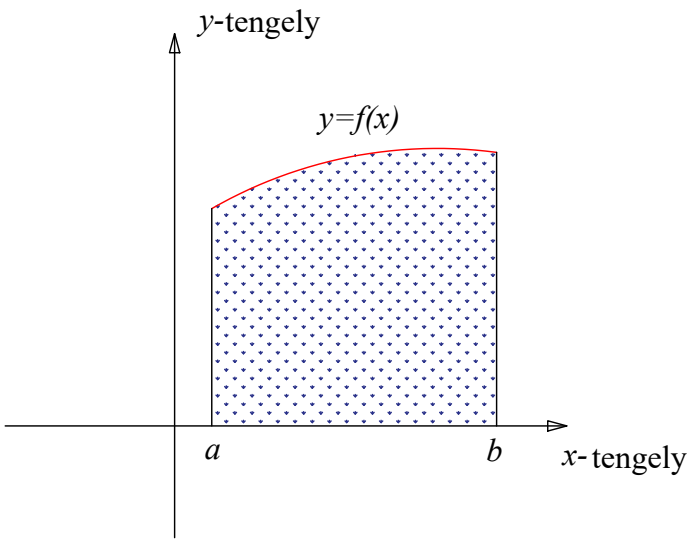
Sok gyakorlati kérdés megválaszolásához szükség van egy kívánt értéket véges összegekkel való közelítő eljárásokra.

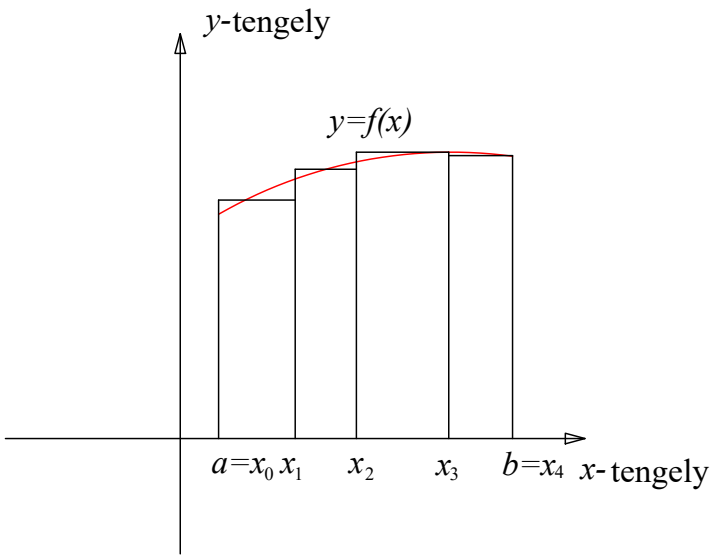
PÉLDA

Nem egyenes szakaszok (illetve, lapok) által határolt sík-(illetve, tér-)idomok terület-(illetve, térfogat)-számítása.

Ezek az eljárások a matematikában az integrálszámítás körébe tartoznak.

MOTIVÁCIÓ


y-tengely
y=f(x)
a
b
x- tengely


y-tengely
y=f(x)
a=x0 x1
x2
x3
b=x4
x- tengely

INTERVALLUMOK FELOSZTÁSA

DEFINÍCIÓ

Egy rögzített $[a, b]$ *intervallum egy* $\mathcal{P}$ *N-részes felosztása:*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b.$$

Ekkor x_k*-t a* k*-adik osztópontnak,* $I_k = [x_{k-1}, x_k]$*-t a* k*-adik részintervallumnak hívjuk.*

DEFINÍCIÓ

A $\mathcal{P}$ *felosztás finomsága a*

$$\delta(\mathcal{P}) = \max_{1 \le k \le N} (x_k - x_{k-1})$$

érték.

INTERVALLUMOK FELOSZTÁSA

DEFINÍCIÓ

Egy rögzített $[a, b]$ *intervallum egy* $\mathcal{P}$ *N-részes felosztása:*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b.$$

Ekkor x_k*-t a k-adik osztópontnak,* $I_k = [x_{k-1}, x_k]$*-t a k-adik részintervallumnak hívjuk.*

DEFINÍCIÓ

A $\mathcal{P}$ *felosztás finomsága a*

$$\delta(\mathcal{P}) = \max_{1 \le k \le N} (x_k - x_{k-1})$$

érték.

INTERVALLUMOK FELOSZTÁSA

DEFINÍCIÓ

Egy rögzített $[a, b]$ *intervallum egy* $\mathcal{P}$ *N-részes felosztása:*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b.$$

Ekkor x_k*-t a k-adik osztópontnak,* $I_k = [x_{k-1}, x_k]$*-t a k-adik részintervallumnak hívjuk.*

DEFINÍCIÓ

A $\mathcal{P}$ *felosztás finomsága a*

$$\delta(\mathcal{P}) = \max_{1 \le k \le N} (x_k - x_{k-1})$$

érték.

INTERVALLUMOK FELOSZTÁSA

DEFINÍCIÓ

Egy rögzített $[a, b]$ *intervallum egy* $\mathcal{P}$ *N-részes felosztása:*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b.$$

Ekkor x_k*-t a k-adik osztópontnak,* $I_k = [x_{k-1}, x_k]$*-t a k-adik részintervallumnak hívjuk.*

DEFINÍCIÓ

A $\mathcal{P}$ *felosztás finomsága a*

$$\delta(\mathcal{P}) = \max_{1 \le k \le N} (x_k - x_{k-1})$$

érték.

ALSÓ ÉS FELSŐ RIEMANN-FÉLE ÖSSZEGEK

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos valós függvény.

JELÖLÉS

Legyen $m_k = \inf_{x \in I_k} f(x)$, $M_k = \sup_{x \in I_k} f(x)$.

DEFINÍCIÓ

Az f függvény $\mathcal{P}$ felosztáshoz tartozó alsó, illetve felső Riemann-féle összege :

$$s_{\mathcal{P}} = \sum_{k=1}^{N} m_k (x_k - x_{k-1})$$

$$S_{\mathcal{P}} = \sum_{k=1}^{N} M_k (x_k - x_{k-1}).$$

ALSÓ ÉS FELSŐ RIEMANN-FÉLE ÖSSZEGEK

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos valós függvény.

JELÖLÉS

Legyen $m_k = \inf_{x \in I_k} f(x)$, $M_k = \sup_{x \in I_k} f(x)$.

DEFINÍCIÓ

Az f függvény $\mathcal{P}$ felosztáshoz tartozó alsó, illetve felső Riemann-féle összege :

$$s_{\mathcal{P}} = \sum_{k=1}^{N} m_k (x_k - x_{k-1})$$

$$S_{\mathcal{P}} = \sum_{k=1}^{N} M_k (x_k - x_{k-1}).$$

ALSÓ ÉS FELSŐ RIEMANN-FÉLE ÖSSZEGEK

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos valós függvény.

JELÖLÉS

Legyen $m_k = \inf_{x \in I_k} f(x)$, $M_k = \sup_{x \in I_k} f(x)$.

DEFINÍCIÓ

Az f függvény $\mathcal{P}$ felosztáshoz tartozó alsó, illetve felső Riemann-féle összege :

$$s_{\mathcal{P}} = \sum_{k=1}^{N} m_k (x_k - x_{k-1})$$

$$S_{\mathcal{P}} = \sum_{k=1}^{N} M_k (x_k - x_{k-1}).$$

ALSÓ ÉS FELSŐ RIEMANN-FÉLE ÖSSZEGEK

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos valós függvény.

JELÖLÉS

Legyen $m_k = \inf_{x \in I_k} f(x)$, $M_k = \sup_{x \in I_k} f(x)$.

DEFINÍCIÓ

Az f függvény $\mathcal{P}$ felosztáshoz tartozó alsó, illetve felső Riemann-féle összege :

$$s_{\mathcal{P}} = \sum_{k=1}^{N} m_k (x_k - x_{k-1})$$

$$S_{\mathcal{P}} = \sum_{k=1}^{N} M_k (x_k - x_{k-1}).$$

ALSÓ ÉS FELSŐ RIEMANN-FÉLE ÖSSZEGEK

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy korlátos valós függvény.

JELÖLÉS

Legyen $m_k = \inf_{x \in I_k} f(x)$, $M_k = \sup_{x \in I_k} f(x)$.

DEFINÍCIÓ

Az f függvény $\mathcal{P}$ felosztáshoz tartozó alsó, illetve felső Riemann-féle összege :

$$s_{\mathcal{P}} = \sum_{k=1}^{N} m_k (x_k - x_{k-1})$$

$$S_{\mathcal{P}} = \sum_{k=1}^{N} M_k (x_k - x_{k-1}).$$

EGYENLŐTLENSÉGEK RIEMANN-FÉLE ÖSSZEGEK KÖZÖTT

ÁLLÍTÁS

Minden $\mathcal{P}$ felosztásra teljesül, hogy $s_{\mathcal{P}} \leq S_{\mathcal{P}}$.

Bizonyítás. Mivel minden k esetén $m_k \leq M_k$ és $x_k - x_{k-1} > 0$, azért nyilvánvaló.

ÁLLÍTÁS

Ha egy $\mathcal{P}$ felosztásból egy $\mathcal{P}'$ felosztás véges sok osztópont hozzávételével keletkezik, akkor

$$s_{\mathcal{P}} \leq s_{\mathcal{P}'} \leq S_{\mathcal{P}'} \leq S_{\mathcal{P}}.$$

Bizonyítás. Geometriailag ‘nyilvánvaló’.

EGYENLŐTLENSÉGEK RIEMANN-FÉLE ÖSSZEGEK KÖZÖTT

ÁLLÍTÁS

Minden $\mathcal{P}$ felosztásra teljesül, hogy $s_{\mathcal{P}} \leq S_{\mathcal{P}}$.

Bizonyítás. Mivel minden k esetén $m_k \leq M_k$ és $x_k - x_{k-1} > 0$, azért nyilvánvaló.

ÁLLÍTÁS

Ha egy $\mathcal{P}$ felosztásból egy $\mathcal{P}'$ felosztás véges sok osztópont hozzávételével keletkezik, akkor

$$s_{\mathcal{P}} \leq s_{\mathcal{P}'} \leq S_{\mathcal{P}'} \leq S_{\mathcal{P}}.$$

Bizonyítás. Geometriailag ‘nyilvánvaló’.

EGYENLŐTLENSÉGEK RIEMANN-FÉLE ÖSSZEGEK KÖZÖTT

ÁLLÍTÁS

Minden $\mathcal{P}$ felosztásra teljesül, hogy $s_{\mathcal{P}} \leq S_{\mathcal{P}}$.

Bizonyítás. Mivel minden k esetén $m_k \leq M_k$ és $x_k - x_{k-1} > 0$, azért nyilvánvaló.

ÁLLÍTÁS

Ha egy $\mathcal{P}$ felosztásból egy $\mathcal{P}'$ felosztás véges sok osztópont hozzávételével keletkezik, akkor

$$s_{\mathcal{P}} \leq s_{\mathcal{P}'} \leq S_{\mathcal{P}'} \leq S_{\mathcal{P}}.$$

Bizonyítás. Geometriailag ‘nyilvánvaló’.

EGYENLŐTLENSÉGEK RIEMANN-FÉLE ÖSSZEGEK KÖZÖTT

ÁLLÍTÁS

Minden $\mathcal{P}$ felosztásra teljesül, hogy $s_{\mathcal{P}} \leq S_{\mathcal{P}}$.

Bizonyítás. Mivel minden k esetén $m_k \leq M_k$ és $x_k - x_{k-1} > 0$, azért nyilvánvaló.

ÁLLÍTÁS

Ha egy $\mathcal{P}$ felosztásból egy $\mathcal{P}'$ felosztás véges sok osztópont hozzávételével keletkezik, akkor

$$s_{\mathcal{P}} \leq s_{\mathcal{P}'} \leq S_{\mathcal{P}'} \leq S_{\mathcal{P}}.$$

Bizonyítás. Geometriailag ‘nyilvánvaló’.

KÜLÖNBÖZŐ FELOSZTÁSOKHOZ TARTOZÓ RIEMANN-FÉLE ÖSSZEGEK

ÁLLÍTÁS

Bármely $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ felosztások esetén

$$s_{\mathcal{P}_1} \leq S_{\mathcal{P}_2}.$$

Bizonyítás. Tekintsük azon $\mathcal{P}_3$ felosztást, amelyet $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ osztópontjainak egyesítésével nyerünk. Ekkor $\mathcal{P}_3$ mind $\mathcal{P}_1$-ből, mind $\mathcal{P}_2$-ből megkapható véges sok új osztópont hozzávételével. Ezért: $s_{\mathcal{P}_1} \leq s_{\mathcal{P}_3} \leq S_{\mathcal{P}_3} \leq S_{\mathcal{P}_2}$.

KÜLÖNBÖZŐ FELOSZTÁSOKHOZ TARTOZÓ RIEMANN-FÉLE ÖSSZEGEK

ÁLLÍTÁS

Bármely $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ felosztások esetén

$$s_{\mathcal{P}_1} \leq S_{\mathcal{P}_2}.$$

Bizonyítás. Tekintsük azon $\mathcal{P}_3$ felosztást, amelyet $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ osztópontjainak egyesítésével nyerünk. Ekkor $\mathcal{P}_3$ mind $\mathcal{P}_1$-ből, mind $\mathcal{P}_2$-ből megkapható véges sok új osztópont hozzávételével. Ezért: $s_{\mathcal{P}_1} \leq s_{\mathcal{P}_3} \leq S_{\mathcal{P}_3} \leq S_{\mathcal{P}_2}$.

KÜLÖNBÖZŐ FELOSZTÁSOKHOZ TARTOZÓ RIEMANN-FÉLE ÖSSZEGEK

ÁLLÍTÁS

Bármely $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ felosztások esetén

$$s_{\mathcal{P}_1} \leq S_{\mathcal{P}_2}.$$

Bizonyítás. Tekintsük azon $\mathcal{P}_3$ felosztást, amelyet $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ osztópontjainak egyesítésével nyerünk. Ekkor $\mathcal{P}_3$ mind $\mathcal{P}_1$-ből, mind $\mathcal{P}_2$-ből megkapható véges sok új osztópont hozzávételével. Ezért: $s_{\mathcal{P}_1} \leq s_{\mathcal{P}_3} \leq S_{\mathcal{P}_3} \leq S_{\mathcal{P}_2}$.

KÜLÖNBÖZŐ FELOSZTÁSOKHOZ TARTOZÓ RIEMANN-FÉLE ÖSSZEGEK

ÁLLÍTÁS

Bármely $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ felosztások esetén

$$s_{\mathcal{P}_1} \leq S_{\mathcal{P}_2}.$$

Bizonyítás. Tekintsük azon $\mathcal{P}_3$ felosztást, amelyet $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ osztópontjainak egyesítésével nyerünk. Ekkor $\mathcal{P}_3$ mind $\mathcal{P}_1$-ből, mind $\mathcal{P}_2$-ből megkapható véges sok új osztópont hozzávételével. Ezért: $s_{\mathcal{P}_1} \leq s_{\mathcal{P}_3} \leq S_{\mathcal{P}_3} \leq S_{\mathcal{P}_2}$.

ALSÓ ÉS FELSŐ INTEGRÁL LÉTEZÉSE

Legyen az f függvény rögzített és a $\mathcal{P}$ felosztás változó. Jelölje

$$\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}, \quad \{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$$

az összes lehetséges $\mathcal{P}$ felosztáshoz tartozó alsó, illetve felső Riemann-féle összegek halmazát.

ÁLLÍTÁS

Az $\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak létezik a h legkisebb felső korlátja. Hasonlóan, az $\{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak létezik a H legnagyobb alsó korlátja. Továbbá: $h \leq H$.

Bizonyítás. Egy tetszőleges rögzített $\mathcal{P}_0$ felosztás esetén $S_{\mathcal{P}_0}$ felső korlátja az $\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak, tehát utóbbinak létezik legkisebb felső korlátja. Ugyanígy, $s_{\mathcal{P}_0}$ alsó korlátja az $\{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak, tehát utóbbinak létezik legnagyobb alsó korlátja. Mivel az $\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaz bármely eleme alsó korlátja az $\{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak, azért $h \leq H$.

ALSÓ ÉS FELSŐ INTEGRÁL LÉTEZÉSE

Legyen az f függvény rögzített és a $\mathcal{P}$ felosztás változó. Jelölje

$$\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}, \quad \{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$$

az összes lehetséges $\mathcal{P}$ felosztáshoz tartozó alsó, illetve felső Riemann-féle összegek halmazát.

ÁLLÍTÁS

Az $\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak létezik a h legkisebb felső korlátja. Hasonlóan, az $\{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak létezik a H legnagyobb alsó korlátja. Továbbá: $h \leq H$.

Bizonyítás. Egy tetszőleges rögzített $\mathcal{P}_0$ felosztás esetén $S_{\mathcal{P}_0}$ felső korlátja az $\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak, tehát utóbbinak létezik legkisebb felső korlátja. Ugyanígy, $s_{\mathcal{P}_0}$ alsó korlátja az $\{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak, tehát utóbbinak létezik legnagyobb alsó korlátja. Mivel az $\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaz bármely eleme alsó korlátja az $\{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak, azért $h \leq H$.

ALSÓ ÉS FELSŐ INTEGRÁL LÉTEZÉSE

Legyen az f függvény rögzített és a $\mathcal{P}$ felosztás változó. Jelölje

$$\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}, \quad \{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$$

az összes lehetséges $\mathcal{P}$ felosztáshoz tartozó alsó, illetve felső Riemann-féle összegek halmazát.

ÁLLÍTÁS

Az $\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak létezik a h legkisebb felső korlátja. Hasonlóan, az $\{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak létezik a H legnagyobb alsó korlátja. Továbbá: $h \leq H$.

Bizonyítás. Egy tetszőleges rögzített $\mathcal{P}_0$ felosztás esetén $S_{\mathcal{P}_0}$ felső korlátja az $\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak, tehát utóbbinak létezik legkisebb felső korlátja. Ugyanígy, $s_{\mathcal{P}_0}$ alsó korlátja az $\{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak, tehát utóbbinak létezik legnagyobb alsó korlátja. Mivel az $\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaz bármely eleme alsó korlátja az $\{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak, azért $h \leq H$.

ALSÓ ÉS FELSŐ INTEGRÁL LÉTEZÉSE

Legyen az f függvény rögzített és a $\mathcal{P}$ felosztás változó. Jelölje

$$\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}, \quad \{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$$

az összes lehetséges $\mathcal{P}$ felosztáshoz tartozó alsó, illetve felső Riemann-féle összegek halmazát.

ÁLLÍTÁS

Az $\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak létezik a h legkisebb felső korlátja. Hasonlóan, az $\{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak létezik a H legnagyobb alsó korlátja. Továbbá: $h \leq H$.

Bizonyítás. Egy tetszőleges rögzített $\mathcal{P}_0$ felosztás esetén $S_{\mathcal{P}_0}$ felső korlátja az $\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak, tehát utóbbinak létezik legkisebb felső korlátja. Ugyanígy, $s_{\mathcal{P}_0}$ alsó korlátja az $\{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak, tehát utóbbinak létezik legnagyobb alsó korlátja. Mivel az $\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaz bármely eleme alsó korlátja az $\{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak, azért $h \leq H$.

ALSÓ ÉS FELSŐ INTEGRÁL LÉTEZÉSE

Legyen az f függvény rögzített és a $\mathcal{P}$ felosztás változó. Jelölje

$$\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}, \quad \{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$$

az összes lehetséges $\mathcal{P}$ felosztáshoz tartozó alsó, illetve felső Riemann-féle összegek halmazát.

ÁLLÍTÁS

Az $\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak létezik a h legkisebb felső korlátja. Hasonlóan, az $\{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak létezik a H legnagyobb alsó korlátja. Továbbá: $h \leq H$.

Bizonyítás. Egy tetszőleges rögzített $\mathcal{P}_0$ felosztás esetén $S_{\mathcal{P}_0}$ felső korlátja az $\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak, tehát utóbbinak létezik legkisebb felső korlátja. Ugyanígy, $s_{\mathcal{P}_0}$ alsó korlátja az $\{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak, tehát utóbbinak létezik legnagyobb alsó korlátja. Mivel az $\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaz bármely eleme alsó korlátja az $\{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak, azért $h \leq H$.

ALSÓ ÉS FELSŐ INTEGRÁL LÉTEZÉSE

Legyen az f függvény rögzített és a $\mathcal{P}$ felosztás változó. Jelölje

$$\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}, \quad \{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$$

az összes lehetséges $\mathcal{P}$ felosztáshoz tartozó alsó, illetve felső Riemann-féle összegek halmazát.

ÁLLÍTÁS

Az $\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak létezik a h legkisebb felső korlátja. Hasonlóan, az $\{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak létezik a H legnagyobb alsó korlátja. Továbbá: $h \leq H$.

Bizonyítás. Egy tetszőleges rögzített $\mathcal{P}_0$ felosztás esetén $S_{\mathcal{P}_0}$ felső korlátja az $\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak, tehát utóbbinak létezik legkisebb felső korlátja. Ugyanígy, $s_{\mathcal{P}_0}$ alsó korlátja az $\{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak, tehát utóbbinak létezik legnagyobb alsó korlátja. Mivel az $\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaz bármely eleme alsó korlátja az $\{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak, azért $h \leq H$.

ALSÓ ÉS FELSŐ INTEGRÁL LÉTEZÉSE

Legyen az f függvény rögzített és a $\mathcal{P}$ felosztás változó. Jelölje

$$\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}, \quad \{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$$

az összes lehetséges $\mathcal{P}$ felosztáshoz tartozó alsó, illetve felső Riemann-féle összegek halmazát.

ÁLLÍTÁS

Az $\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak létezik a h legkisebb felső korlátja. Hasonlóan, az $\{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak létezik a H legnagyobb alsó korlátja. Továbbá: $h \leq H$.

Bizonyítás. Egy tetszőleges rögzített $\mathcal{P}_0$ felosztás esetén $S_{\mathcal{P}_0}$ felső korlátja az $\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak, tehát utóbbinak létezik legkisebb felső korlátja. Ugyanígy, $s_{\mathcal{P}_0}$ alsó korlátja az $\{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak, tehát utóbbinak létezik legnagyobb alsó korlátja. Mivel az $\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaz bármely eleme alsó korlátja az $\{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak, azért $h \leq H$.

ALSÓ ÉS FELSŐ INTEGRÁL LÉTEZÉSE

Legyen az f függvény rögzített és a $\mathcal{P}$ felosztás változó. Jelölje

$$\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}, \quad \{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$$

az összes lehetséges $\mathcal{P}$ felosztáshoz tartozó alsó, illetve felső Riemann-féle összegek halmazát.

ÁLLÍTÁS

Az $\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak létezik a h legkisebb felső korlátja. Hasonlóan, az $\{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak létezik a H legnagyobb alsó korlátja. Továbbá: $h \leq H$.

Bizonyítás. Egy tetszőleges rögzített $\mathcal{P}_0$ felosztás esetén $S_{\mathcal{P}_0}$ felső korlátja az $\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak, tehát utóbbinak létezik legkisebb felső korlátja. Ugyanígy, $s_{\mathcal{P}_0}$ alsó korlátja az $\{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak, tehát utóbbinak létezik legnagyobb alsó korlátja. Mivel az $\{s_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaz bármely eleme alsó korlátja az $\{S_{\mathcal{P}}\}_{\mathcal{P}}$ halmaznak, azért $h \leq H$.

ALSÓ ÉS FELSŐ INTEGRÁL

DEFINÍCIÓ

Az előző állításban szereplő h, illetve H értékeket f Riemann-féle alsó, illetve felső integráljának nevezzük.

JELÖLÉS

Az f függvény $[a, b]$ intervallumhoz tartozó alsó és felső integrálját rendre

$$\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f(x)dx \text{ és } \overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

jelöli.

ALSÓ ÉS FELSŐ INTEGRÁL

DEFINÍCIÓ

Az előző állításban szereplő h, illetve H értékeket f Riemann-féle alsó, illetve felső integráljának nevezzük.

JELÖLÉS

Az f függvény $[a, b]$ *intervallumhoz tartozó alsó és felső integrálját rendre*

$$\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f(x)dx \text{ és } \overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

jelöli.

MINDEN HATÁRON TÚL FINOMODÓ FELOSZTÁSSOROZATOK

Minden $i \in \mathbb{N}$ esetén legyenek $\mathcal{P}_i$ felosztásai az $[a, b]$ intervallumnak.

DEFINÍCIÓ

Azt mondjuk, hogy a $\{\mathcal{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ felosztássorozat minden határon túl finomodó, ha

$$\lim_{i\to\infty} \delta(\mathcal{P}_i) = 0.$$

ÁLLÍTÁS

Bármely minden határon túl finomodó $\{\mathcal{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ felosztássorozat esetén

$$\lim_{i\to\infty} s_{\mathcal{P}_i} = \underline{\int_a^b} f, \quad \lim_{i\to\infty} S_{\mathcal{P}_i} = \overline{\int_a^b} f.$$

MINDEN HATÁRON TÚL FINOMODÓ FELOSZTÁSSOROZATOK

Minden $i \in \mathbb{N}$ esetén legyenek $\mathcal{P}_i$ felosztásai az $[a, b]$ intervallumnak.

DEFINÍCIÓ

Azt mondjuk, hogy a $\{\mathcal{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ felosztássorozat minden határon túl finomodó, ha

$$\lim_{i\to\infty} \delta(\mathcal{P}_i) = 0.$$

ÁLLÍTÁS

Bármely minden határon túl finomodó $\{\mathcal{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ felosztássorozat esetén

$$\lim_{i\to\infty} s_{\mathcal{P}_i} = \underline{\int_a^b} f, \quad \lim_{i\to\infty} S_{\mathcal{P}_i} = \overline{\int_a^b} f.$$

MINDEN HATÁRON TÚL FINOMODÓ FELOSZTÁSSOROZATOK

Minden $i \in \mathbb{N}$ esetén legyenek $\mathcal{P}_i$ felosztásai az $[a, b]$ intervallumnak.

DEFINÍCIÓ

Azt mondjuk, hogy a $\{\mathcal{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ felosztássorozat minden határon túl finomodó, ha

$$\lim_{i\to\infty} \delta(\mathcal{P}_i) = 0.$$

ÁLLÍTÁS

Bármely minden határon túl finomodó $\{\mathcal{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ felosztássorozat esetén

$$\lim_{i\to\infty} s_{\mathcal{P}_i} = \underline{\int_a^b} f, \quad \lim_{i\to\infty} S_{\mathcal{P}_i} = \overline{\int_a^b} f.$$

INTEGRÁLHATÓ FÜGGVÉNYEK

DEFINÍCIÓ

Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *korlátos függvény Riemann-integrálható, ha* $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. *Ekkor ezt a közös értéket* f*-nek az* $[a, b]$*-n vett integráljának nevezzük. Jelölése:*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx.$$

JELÖLÉS

Ha $a < b$ *és* f *Riemann-integrálható* $[a, b]$*-on, akkor*

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \qquad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

INTEGRÁLHATÓ FÜGGVÉNYEK

DEFINÍCIÓ

Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény Riemann-integrálható, ha $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. Ekkor ezt a közös értéket f-nek az $[a, b]$-n vett integráljának nevezzük. Jelölése:

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx.$$

JELÖLÉS

Ha $a < b$ és f Riemann-integrálható $[a, b]$-on, akkor

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \qquad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

INTEGRÁLHATÓ FÜGGVÉNYEK

DEFINÍCIÓ

Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény Riemann-integrálható, ha $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. Ekkor ezt a közös értéket f-nek az $[a, b]$-n vett integráljának nevezzük. Jelölése:

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx.$$

JELÖLÉS

Ha $a < b$ és f Riemann-integrálható $[a, b]$-on, akkor

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \qquad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

INTEGRÁLHATÓ FÜGGVÉNYEK

DEFINÍCIÓ

Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *korlátos függvény Riemann-integrálható, ha* $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. *Ekkor ezt a közös értéket* f*-nek az* $[a, b]$*-n vett integráljának nevezzük. Jelölése:*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx.$$

JELÖLÉS

Ha $a < b$ *és* f *Riemann-integrálható* $[a, b]$*-on, akkor*

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \qquad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

INTEGRÁLHATÓ FÜGGVÉNYEK

DEFINÍCIÓ

Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *korlátos függvény Riemann-integrálható, ha* $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. *Ekkor ezt a közös értéket* f*-nek az* $[a, b]$*-n vett integráljának nevezzük. Jelölése:*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx.$$

JELÖLÉS

Ha $a < b$ *és* f *Riemann-integrálható* $[a, b]$*-on, akkor*

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \qquad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

INTEGRÁLHATÓ FÜGGVÉNYEK

DEFINÍCIÓ

Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *korlátos függvény Riemann-integrálható, ha* $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. *Ekkor ezt a közös értéket* f*-nek az* $[a, b]$*-n vett integráljának nevezzük. Jelölése:*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx.$$

JELÖLÉS

Ha $a < b$ *és* f *Riemann-integrálható* $[a, b]$*-on, akkor*

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \qquad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

INTEGRÁLHATÓSÁG JELLEMZÉSE

ÁLLÍTÁS

Egy f korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható $[a, b]$-n, ha valamely (vagy bármely) minden határon túl finomodó $\{\mathcal{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ felosztássorozat esetén

$$\lim_{i\to\infty} s_{\mathcal{P}_i} = \lim_{i\to\infty} S_{\mathcal{P}_i}.$$

Bizonyítás. Láttuk, hogy bármely minden határon túl finomodó $\{\mathcal{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ felosztássorozat esetén a két határérték $\left(\underline{\int_a^b} f\right)$-hez, illetve $\left(\overline{\int_a^b} f\right)$-hez tart.

INTEGRÁLHATÓSÁG JELLEMZÉSE

ÁLLÍTÁS

Egy f korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható $[a, b]$-n, ha valamely (vagy bármely) minden határon túl finomodó $\{\mathcal{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ felosztássorozat esetén

$$\lim_{i\to\infty} s_{\mathcal{P}_i} = \lim_{i\to\infty} S_{\mathcal{P}_i}.$$

Bizonyítás. Láttuk, hogy bármely minden határon túl finomodó $\{\mathcal{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ felosztássorozat esetén a két határérték $\left(\underline{\int_a^b} f\right)$-hez, illetve $\left(\overline{\int_a^b} f\right)$-hez tart.

INTEGRÁLHATÓSÁG JELLEMZÉSE

ÁLLÍTÁS

Egy f korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható $[a, b]$-n, ha valamely (vagy bármely) minden határon túl finomodó $\{\mathcal{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ felosztássorozat esetén

$$\lim_{i\to\infty} s_{\mathcal{P}_i} = \lim_{i\to\infty} S_{\mathcal{P}_i}.$$

Bizonyítás. Láttuk, hogy bármely minden határon túl finomodó $\{\mathcal{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ felosztássorozat esetén a két határérték $\left(\underline{\int_a^b} f\right)$-hez, illetve $\left(\overline{\int_a^b} f\right)$-hez tart.

PÉLDA: KONSTANS FÜGGVÉNY RIEMANN-INTEGRÁLJA

ÁLLÍTÁS

$$\int_a^b c dx = c(b-a).$$

Bizonyítás. Minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén $m_k = c = M_k$ minden $1 \leq k \leq N$-re, így

$$\begin{aligned} s_{\mathcal{P}} = S_{\mathcal{P}} &= \sum_{k=1}^{N} c(x_k - x_{k-1}) \\ &= c \sum_{k=1}^{N} (x_k - x_{k-1}) \\ &= c(b-a). \end{aligned}$$

PÉLDA: KONSTANS FÜGGVÉNY RIEMANN-INTEGRÁLJA

ÁLLÍTÁS

$$\int_a^b c dx = c(b-a).$$

Bizonyítás. Minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén $m_k = c = M_k$ minden $1 \leq k \leq N$-re, így

$$s_{\mathcal{P}} = S_{\mathcal{P}} = \sum_{k=1}^{N} c(x_k - x_{k-1})$$

$$= c \sum_{k=1}^{N} (x_k - x_{k-1})$$

$$= c(b-a).$$

PÉLDA: KONSTANS FÜGGVÉNY RIEMANN-INTEGRÁLJA

ÁLLÍTÁS

$$\int_a^b c dx = c(b-a).$$

Bizonyítás. Minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén $m_k = c = M_k$ minden $1 \leq k \leq N$-re, így

$$s_{\mathcal{P}} = S_{\mathcal{P}} = \sum_{k=1}^{N} c(x_k - x_{k-1})$$

$$= c \sum_{k=1}^{N} (x_k - x_{k-1})$$

$$= c(b-a).$$

PÉLDA: KONSTANS FÜGGVÉNY RIEMANN-INTEGRÁLJA

ÁLLÍTÁS

$$\int_a^b c dx = c(b-a).$$

Bizonyítás. Minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén $m_k = c = M_k$ minden $1 \leq k \leq N$-re, így

$$\begin{aligned} s_{\mathcal{P}} = S_{\mathcal{P}} &= \sum_{k=1}^{N} c(x_k - x_{k-1}) \\ &= c \sum_{k=1}^{N} (x_k - x_{k-1}) \\ &= c(b-a). \end{aligned}$$

PÉLDA: KONSTANS FÜGGVÉNY RIEMANN-INTEGRÁLJA

ÁLLÍTÁS

$$\int_a^b c dx = c(b-a).$$

Bizonyítás. Minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén $m_k = c = M_k$ minden $1 \leq k \leq N$-re, így

$$\begin{aligned} s_{\mathcal{P}} = S_{\mathcal{P}} &= \sum_{k=1}^{N} c(x_k - x_{k-1}) \\ &= c \sum_{k=1}^{N} (x_k - x_{k-1}) \\ &= c(b-a). \end{aligned}$$

TÉGLÁNYÖSSZEGEK

Legyen $\mathcal{P}$ egy felosztás. Minden $1 \leq k \leq N$ esetén válasszunk egy $\xi_k \in I_k$ elemet.

DEFINÍCIÓ

A $\mathcal{P}$ felosztáshoz és $\xi_k \in I_k$ választásokhoz tartozó téglányösszeg vagy integrálközelítő összeg a

$$\sigma_{\mathcal{P}} = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

kifejezés.

Minden $\mathcal{P}$ felosztás és $\xi_k \in I_k$ választás esetén

$$s_{\mathcal{P}} \leq \sigma_{\mathcal{P}} \leq S_{\mathcal{P}}.$$

TÉGLÁNYÖSSZEGEK

Legyen $\mathcal{P}$ egy felosztás. Minden $1 \leq k \leq N$ esetén válasszunk egy $\xi_k \in I_k$ elemet.

DEFINÍCIÓ

A $\mathcal{P}$ felosztáshoz és $\xi_k \in I_k$ választásokhoz tartozó téglányösszeg vagy integrálközelítő összeg a

$$\sigma_{\mathcal{P}} = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

kifejezés.

Minden $\mathcal{P}$ felosztás és $\xi_k \in I_k$ választás esetén

$$s_{\mathcal{P}} \leq \sigma_{\mathcal{P}} \leq S_{\mathcal{P}}.$$

TÉGLÁNYÖSSZEGEK

Legyen $\mathcal{P}$ egy felosztás. Minden $1 \leq k \leq N$ esetén válasszunk egy $\xi_k \in I_k$ elemet.

DEFINÍCIÓ

A $\mathcal{P}$ felosztáshoz és $\xi_k \in I_k$ választásokhoz tartozó téglányösszeg vagy integrálközelítő összeg a

$$\sigma_{\mathcal{P}} = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

kifejezés.

Minden $\mathcal{P}$ felosztás és $\xi_k \in I_k$ választás esetén

$$s_{\mathcal{P}} \leq \sigma_{\mathcal{P}} \leq S_{\mathcal{P}}.$$

TÉGLÁNYÖSSZEGEK

Legyen $\mathcal{P}$ egy felosztás. Minden $1 \leq k \leq N$ esetén válasszunk egy $\xi_k \in I_k$ elemet.

DEFINÍCIÓ

A $\mathcal{P}$ felosztáshoz és $\xi_k \in I_k$ választásokhoz tartozó téglányösszeg vagy integrálközelítő összeg a

$$\sigma_{\mathcal{P}} = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

kifejezés.

Minden $\mathcal{P}$ felosztás és $\xi_k \in I_k$ választás esetén

$$s_{\mathcal{P}} \leq \sigma_{\mathcal{P}} \leq S_{\mathcal{P}}.$$

TÉGLÁNYÖSSZEGEK ÉS RIEMANN-INTEGRÁL

ÁLLÍTÁS

Egy f korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható $[a, b]$-n I integrállal, ha valamely minden határon túl finomodó $\{\mathcal{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ felosztássorozat és minden hozzá vett $\xi_1, \ldots, \xi_N$ választás esetén

$$\lim_{i\to\infty} \sigma_{\mathcal{P}_i} = I.$$

TÉGLÁNYÖSSZEGEK ÉS RIEMANN-INTEGRÁL

ÁLLÍTÁS

Egy f korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható $[a, b]$-n I integrállal, ha valamely minden határon túl finomodó $\{\mathcal{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ felosztássorozat és minden hozzá vett $\xi_1, \ldots, \xi_N$ választás esetén

$$\lim_{i\to\infty} \sigma_{\mathcal{P}_i} = I.$$

TÉGLÁNYÖSSZEGEK ÉS RIEMANN-INTEGRÁL

ÁLLÍTÁS

Egy f korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható $[a, b]$-n I integrállal, ha valamely minden határon túl finomodó $\{\mathcal{P}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ felosztássorozat és minden hozzá vett $\xi_1, \ldots, \xi_N$ választás esetén

$$\lim_{i\to\infty} \sigma_{\mathcal{P}_i} = I.$$

EGYENLETESEN FOLYTONOS FÜGGVÉNYEK

Legyen I egy tetszőleges (zárt vagy nyílt, véges vagy végtelen) intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ egy valós függvény.

DEFINÍCIÓ

Azt mondjuk, hogy f egyenletesen folytonos I-n, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy valahányszor $x, y \in I$ teljesíti a $|x - y| < \delta$ feltételt, teljesül

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

MEGJEGYZÉS

A különbség a folytonosság definíciójához képest az, hogy itt nem rögzítjük előre az x pontot, hanem mind x mind y szabadon változhat I-ben.

Ebből azonnal látszik, hogy minden egyenletesen folytonos függvény egyúttal folytonos is.

EGYENLETESEN FOLYTONOS FÜGGVÉNYEK

Legyen I egy tetszőleges (zárt vagy nyílt, véges vagy végtelen) intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ egy valós függvény.

DEFINÍCIÓ

Azt mondjuk, hogy f egyenletesen folytonos I-n, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy valahányszor $x, y \in I$ teljesíti a $|x - y| < \delta$ feltételt, teljesül

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

MEGJEGYZÉS

A különbség a folytonosság definíciójához képest az, hogy itt nem rögzítjük előre az x pontot, hanem mind x mind y szabadon változhat I-ben.

Ebből azonnal látszik, hogy minden egyenletesen folytonos függvény egyúttal folytonos is.

EGYENLETESEN FOLYTONOS FÜGGVÉNYEK

Legyen I egy tetszőleges (zárt vagy nyílt, véges vagy végtelen) intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ egy valós függvény.

DEFINÍCIÓ

Azt mondjuk, hogy f egyenletesen folytonos I-n, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy valahányszor $x, y \in I$ teljesíti a $|x - y| < \delta$ feltételt, teljesül

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

MEGJEGYZÉS

A különbség a folytonosság definíciójához képest az, hogy itt nem rögzítjük előre az x pontot, hanem mind x mind y szabadon változhat I-ben.

Ebből azonnal látszik, hogy minden egyenletesen folytonos függvény egyúttal folytonos is.

EGYENLETESEN FOLYTONOS FÜGGVÉNYEK

Legyen I egy tetszőleges (zárt vagy nyílt, véges vagy végtelen) intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ egy valós függvény.

DEFINÍCIÓ

Azt mondjuk, hogy f egyenletesen folytonos I-n, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy valahányszor $x, y \in I$ teljesíti a $|x - y| < \delta$ feltételt, teljesül

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

MEGJEGYZÉS

A különbség a folytonosság definíciójához képest az, hogy itt nem rögzítjük előre az x pontot, hanem mind x mind y szabadon változhat I-ben.

Ebből azonnal látszik, hogy minden egyenletesen folytonos függvény egyúttal folytonos is.

EGYENLETESEN FOLYTONOS FÜGGVÉNYEK

Legyen I egy tetszőleges (zárt vagy nyílt, véges vagy végtelen) intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ egy valós függvény.

DEFINÍCIÓ

Azt mondjuk, hogy f egyenletesen folytonos I-n, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy valahányszor $x, y \in I$ teljesíti a $|x - y| < \delta$ feltételt, teljesül

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

MEGJEGYZÉS

A különbség a folytonosság definíciójához képest az, hogy itt nem rögzítjük előre az x pontot, hanem mind x mind y szabadon változhat I-ben.

Ebből azonnal látszik, hogy minden egyenletesen folytonos függvény egyúttal folytonos is.

EGYENLETESEN FOLYTONOS FÜGGVÉNYEK

Legyen I egy tetszőleges (zárt vagy nyílt, véges vagy végtelen) intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ egy valós függvény.

DEFINÍCIÓ

Azt mondjuk, hogy f egyenletesen folytonos I-n, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy valahányszor $x, y \in I$ teljesíti a $|x - y| < \delta$ feltételt, teljesül

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

MEGJEGYZÉS

A különbség a folytonosság definíciójához képest az, hogy itt nem rögzítjük előre az x pontot, hanem mind x mind y szabadon változhat I-ben.

Ebből azonnal látszik, hogy minden egyenletesen folytonos függvény egyúttal folytonos is.

EGYENLETESEN FOLYTONOS FÜGGVÉNYEK

Legyen I egy tetszőleges (zárt vagy nyílt, véges vagy végtelen) intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ egy valós függvény.

DEFINÍCIÓ

Azt mondjuk, hogy f egyenletesen folytonos I-n, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy valahányszor $x, y \in I$ teljesíti a $|x - y| < \delta$ feltételt, teljesül

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

MEGJEGYZÉS

A különbség a folytonosság definíciójához képest az, hogy itt nem rögzítjük előre az x pontot, hanem mind x mind y szabadon változhat I-ben.

Ebből azonnal látszik, hogy minden egyenletesen folytonos függvény egyúttal folytonos is.

EGYENLETESEN FOLYTONOS FÜGGVÉNYEK

Legyen I egy tetszőleges (zárt vagy nyílt, véges vagy végtelen) intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ egy valós függvény.

DEFINÍCIÓ

Azt mondjuk, hogy f egyenletesen folytonos I-n, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy valahányszor $x, y \in I$ teljesíti a $|x - y| < \delta$ feltételt, teljesül

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

MEGJEGYZÉS

A különbség a folytonosság definíciójához képest az, hogy itt nem rögzítjük előre az x pontot, hanem mind x mind y szabadon változhat I-ben.

Ebből azonnal látszik, hogy minden egyenletesen folytonos függvény egyúttal folytonos is.

KORLÁTOS, ZÁRT INTERVALLUMON FOLYTONOS FÜGGVÉNY EGYENLETESEN FOLYTONOS

ÁLLÍTÁS

Ha f folytonos $[a, b]$-on, akkor itt egyenletesen folytonos is.

Bizonyítás. Tegyük fel az ellenkezőjét: létezik olyan $\varepsilon_0 > 0$, amelyre minden $\delta = \frac{1}{n}$ esetén léteznek $x_n, y_n \in [a, b]$ amelyre $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ és

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Ekkor létezik olyan n' részsorozata $\mathbb{N}$-nek, amelyre $x_{n'}$ és $y_{n'}$ konvergálnak valamely $x^* \in [a, b]$ és $y^* \in [a, b]$ értékekhez. Mivel $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ azért $x^* = y^*$. De f folytonossága miatt

$$\lim_{n' \to \infty} f(x_{n'}) = f(x^*), \qquad \lim_{n' \to \infty} f(y_{n'}) = f(y^*).$$

Ez ellentmond annak, hogy $|f(x_{n'}) - f(y_{n'})| \geq \varepsilon_0$.

KORLÁTOS, ZÁRT INTERVALLUMON FOLYTONOS FÜGGVÉNY EGYENLETESEN FOLYTONOS

ÁLLÍTÁS

Ha f folytonos $[a, b]$-on, akkor itt egyenletesen folytonos is.

Bizonyítás. Tegyük fel az ellenkezőjét: létezik olyan $\varepsilon_0 > 0$, amelyre minden $\delta = \frac{1}{n}$ esetén léteznek $x_n, y_n \in [a, b]$ amelyre $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ és

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Ekkor létezik olyan n' részsorozata $\mathbb{N}$-nek, amelyre $x_{n'}$ és $y_{n'}$ konvergálnak valamely $x^* \in [a, b]$ és $y^* \in [a, b]$ értékekhez. Mivel $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ azért $x^* = y^*$. De f folytonossága miatt

$$\lim_{n' \to \infty} f(x_{n'}) = f(x^*), \qquad \lim_{n' \to \infty} f(y_{n'}) = f(y^*).$$

Ez ellentmond annak, hogy $|f(x_{n'}) - f(y_{n'})| \geq \varepsilon_0$.

KORLÁTOS, ZÁRT INTERVALLUMON FOLYTONOS FÜGGVÉNY EGYENLETESEN FOLYTONOS

ÁLLÍTÁS

Ha f folytonos $[a, b]$-on, akkor itt egyenletesen folytonos is.

Bizonyítás. Tegyük fel az ellenkezőjét: létezik olyan $\varepsilon_0 > 0$, amelyre minden $\delta = \frac{1}{n}$ esetén léteznek $x_n, y_n \in [a, b]$ amelyre $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ és

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Ekkor létezik olyan n' részsorozata $\mathbb{N}$-nek, amelyre $x_{n'}$ és $y_{n'}$ konvergálnak valamely $x^* \in [a, b]$ és $y^* \in [a, b]$ értékekhez. Mivel $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ azért $x^* = y^*$. De f folytonossága miatt

$$\lim_{n' \to \infty} f(x_{n'}) = f(x^*), \qquad \lim_{n' \to \infty} f(y_{n'}) = f(y^*).$$

Ez ellentmond annak, hogy $|f(x_{n'}) - f(y_{n'})| \geq \varepsilon_0$.

KORLÁTOS, ZÁRT INTERVALLUMON FOLYTONOS FÜGGVÉNY EGYENLETESEN FOLYTONOS

ÁLLÍTÁS

Ha f folytonos $[a, b]$-on, akkor itt egyenletesen folytonos is.

Bizonyítás. Tegyük fel az ellenkezőjét: létezik olyan $\varepsilon_0 > 0$, amelyre minden $\delta = \frac{1}{n}$ esetén léteznek $x_n, y_n \in [a, b]$ amelyre $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ és

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Ekkor létezik olyan n' részsorozata $\mathbb{N}$-nek, amelyre $x_{n'}$ és $y_{n'}$ konvergálnak valamely $x^* \in [a, b]$ és $y^* \in [a, b]$ értékekhez. Mivel $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ azért $x^* = y^*$. De f folytonossága miatt

$$\lim_{n' \to \infty} f(x_{n'}) = f(x^*), \qquad \lim_{n' \to \infty} f(y_{n'}) = f(y^*).$$

Ez ellentmond annak, hogy $|f(x_{n'}) - f(y_{n'})| \geq \varepsilon_0$.

KORLÁTOS, ZÁRT INTERVALLUMON FOLYTONOS FÜGGVÉNY EGYENLETESEN FOLYTONOS

ÁLLÍTÁS

Ha f folytonos $[a, b]$-on, akkor itt egyenletesen folytonos is.

Bizonyítás. Tegyük fel az ellenkezőjét: létezik olyan $\varepsilon_0 > 0$, amelyre minden $\delta = \frac{1}{n}$ esetén léteznek $x_n, y_n \in [a, b]$ amelyre $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ és

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Ekkor létezik olyan n' részsorozata $\mathbb{N}$-nek, amelyre $x_{n'}$ és $y_{n'}$ konvergálnak valamely $x^* \in [a, b]$ és $y^* \in [a, b]$ értékekhez. Mivel $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ azért $x^* = y^*$. De f folytonossága miatt

$$\lim_{n' \to \infty} f(x_{n'}) = f(x^*), \qquad \lim_{n' \to \infty} f(y_{n'}) = f(y^*).$$

Ez ellentmond annak, hogy $|f(x_{n'}) - f(y_{n'})| \geq \varepsilon_0$.

KORLÁTOS, ZÁRT INTERVALLUMON FOLYTONOS FÜGGVÉNY EGYENLETESEN FOLYTONOS

ÁLLÍTÁS

Ha f folytonos $[a, b]$-on, akkor itt egyenletesen folytonos is.

Bizonyítás. Tegyük fel az ellenkezőjét: létezik olyan $\varepsilon_0 > 0$, amelyre minden $\delta = \frac{1}{n}$ esetén léteznek $x_n, y_n \in [a, b]$ amelyre $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ és

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Ekkor létezik olyan n' részsorozata $\mathbb{N}$-nek, amelyre $x_{n'}$ és $y_{n'}$ konvergálnak valamely $x^* \in [a, b]$ és $y^* \in [a, b]$ értékekhez. Mivel $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ azért $x^* = y^*$. De f folytonossága miatt

$$\lim_{n' \to \infty} f(x_{n'}) = f(x^*), \quad \lim_{n' \to \infty} f(y_{n'}) = f(y^*).$$

Ez ellentmond annak, hogy $|f(x_{n'}) - f(y_{n'})| \geq \varepsilon_0$.

KORLÁTOS, ZÁRT INTERVALLUMON FOLYTONOS FÜGGVÉNY EGYENLETESEN FOLYTONOS

ÁLLÍTÁS

Ha f folytonos $[a, b]$-on, akkor itt egyenletesen folytonos is.

Bizonyítás. Tegyük fel az ellenkezőjét: létezik olyan $\varepsilon_0 > 0$, amelyre minden $\delta = \frac{1}{n}$ esetén léteznek $x_n, y_n \in [a, b]$ amelyre $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ és

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Ekkor létezik olyan n' részsorozata $\mathbb{N}$-nek, amelyre $x_{n'}$ és $y_{n'}$ konvergálnak valamely $x^* \in [a, b]$ és $y^* \in [a, b]$ értékekhez. Mivel $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ azért $x^* = y^*$. De f folytonossága miatt

$$\lim_{n' \to \infty} f(x_{n'}) = f(x^*), \qquad \lim_{n' \to \infty} f(y_{n'}) = f(y^*).$$

Ez ellentmond annak, hogy $|f(x_{n'}) - f(y_{n'})| \geq \varepsilon_0$.

KORLÁTOS, ZÁRT INTERVALLUMON FOLYTONOS FÜGGVÉNY RIEMANN-INTEGRÁLHATÓ

TÉTEL

Ha f folytonos $[a, b]$-on, akkor ott Riemann-integrálható.

Bizonyítás. Rögzítsünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ értéket. Ekkor, mivel f egyenletesen folytonos, létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $|x - y| < \delta$ esetén teljesül

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Legyen $\mathcal{P}$ egy tetszőleges, δ-nál finomabb felosztása $[a, b]$-nak. Weierstrass tétele miatt f felveszi szélsőértékeit minden I_k részintervallumon.

KORLÁTOS, ZÁRT INTERVALLUMON FOLYTONOS FÜGGVÉNY RIEMANN-INTEGRÁLHATÓ

TÉTEL

Ha f folytonos $[a, b]$-on, akkor ott Riemann-integrálható.

Bizonyítás. Rögzítsünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ értéket. Ekkor, mivel f egyenletesen folytonos, létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $|x - y| < \delta$ esetén teljesül

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Legyen $\mathcal{P}$ egy tetszőleges, δ-nál finomabb felosztása $[a, b]$-nak. Weierstrass tétele miatt f felveszi szélsőértékeit minden I_k részintervallumon.

KORLÁTOS, ZÁRT INTERVALLUMON FOLYTONOS FÜGGVÉNY RIEMANN-INTEGRÁLHATÓ

TÉTEL

Ha f folytonos $[a, b]$-on, akkor ott Riemann-integrálható.

Bizonyítás. Rögzítsünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ értéket. Ekkor, mivel f egyenletesen folytonos, létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $|x - y| < \delta$ esetén teljesül

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Legyen $\mathcal{P}$ egy tetszőleges, δ-nál finomabb felosztása $[a, b]$-nak. Weierstrass tétele miatt f felveszi szélsőértékeit minden I_k részintervallumon.

KORLÁTOS, ZÁRT INTERVALLUMON FOLYTONOS FÜGGVÉNY RIEMANN-INTEGRÁLHATÓ

TÉTEL

Ha f folytonos $[a, b]$-on, akkor ott Riemann-integrálható.

Bizonyítás. Rögzítsünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ értéket. Ekkor, mivel f egyenletesen folytonos, létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $|x - y| < \delta$ esetén teljesül

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Legyen $\mathcal{P}$ egy tetszőleges, δ-nál finomabb felosztása $[a, b]$-nak. Weierstrass tétele miatt f felveszi szélsőértékeit minden I_k részintervallumon.

KORLÁTOS, ZÁRT INTERVALLUMON FOLYTONOS FÜGGVÉNY RIEMANN-INTEGRÁLHATÓ

TÉTEL

Ha f folytonos $[a, b]$-on, akkor ott Riemann-integrálható.

Bizonyítás. Rögzítsünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ értéket. Ekkor, mivel f egyenletesen folytonos, létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $|x - y| < \delta$ esetén teljesül

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Legyen $\mathcal{P}$ egy tetszőleges, δ-nál finomabb felosztása $[a, b]$-nak. Weierstrass tétele miatt f felveszi szélsőértékeit minden I_k részintervallumon.

KORLÁTOS, ZÁRT INTERVALLUMON FOLYTONOS FÜGGVÉNY RIEMANN-INTEGRÁLHATÓ, BIZONYÍTÁS

Bizonyítás. Innen

$$
\begin{aligned}
S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}} &= \sum_{k=1}^{N} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \\
&< \sum_{k=1}^{N} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_k - x_{k-1}) \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{N} (x_k - x_{k-1}) \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Tehát minden $\varepsilon > 0$ esetén $\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \varepsilon$, azaz $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$.

KORLÁTOS, ZÁRT INTERVALLUMON FOLYTONOS FÜGGVÉNY RIEMANN-INTEGRÁLHATÓ, BIZONYÍTÁS

Bizonyítás. Innen

$$S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}} = \sum_{k=1}^{N} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$< \sum_{k=1}^{N} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_k - x_{k-1})$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{N} (x_k - x_{k-1})$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Tehát minden $\varepsilon > 0$ esetén $\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \varepsilon$, azaz $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$.

KORLÁTOS, ZÁRT INTERVALLUMON FOLYTONOS FÜGGVÉNY RIEMANN-INTEGRÁLHATÓ, BIZONYÍTÁS

Bizonyítás. Innen

$$
\begin{aligned}
S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}} &= \sum_{k=1}^{N} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \\
&< \sum_{k=1}^{N} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_k - x_{k-1}) \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{N} (x_k - x_{k-1}) \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Tehát minden $\varepsilon > 0$ esetén $\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \varepsilon$, azaz $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$.

KORLÁTOS, ZÁRT INTERVALLUMON FOLYTONOS FÜGGVÉNY RIEMANN-INTEGRÁLHATÓ, BIZONYÍTÁS

Bizonyítás. Innen

$$
\begin{aligned}
S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}} &= \sum_{k=1}^{N} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \\
&< \sum_{k=1}^{N} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_k - x_{k-1}) \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{N} (x_k - x_{k-1}) \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Tehát minden $\varepsilon > 0$ esetén $\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \varepsilon$, azaz $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$.

KORLÁTOS, ZÁRT INTERVALLUMON FOLYTONOS FÜGGVÉNY RIEMANN-INTEGRÁLHATÓ, BIZONYÍTÁS

Bizonyítás. Innen

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}} &= \sum_{k=1}^{N} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &< \sum_{k=1}^{N} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_k - x_{k-1}) \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{N} (x_k - x_{k-1}) \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Tehát minden $\varepsilon > 0$ esetén $\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \varepsilon$, azaz $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$.

KORLÁTOS, ZÁRT INTERVALLUMON FOLYTONOS FÜGGVÉNY RIEMANN-INTEGRÁLHATÓ, BIZONYÍTÁS

Bizonyítás. Innen

$$
\begin{aligned}
S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}} &= \sum_{k=1}^{N} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \\
&< \sum_{k=1}^{N} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_k - x_{k-1}) \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{N} (x_k - x_{k-1}) \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Tehát minden $\varepsilon > 0$ esetén $\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f < \varepsilon$, azaz $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$.

KORLÁTOS, ZÁRT INTERVALLUMON MONOTON FÜGGVÉNY RIEMANN-INTEGRÁLHATÓ

TÉTEL

Ha f monoton $[a, b]$-n, akkor ott Riemann-integrálható.

Bizonyítás. Feltehető, hogy pl. f monoton növekvő. Ekkor minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén $M_k = f(x_k)$, $m_k = f(x_{k-1})$, és

$$S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}} = \sum_{k=1}^{N} (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1})$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\delta(\mathcal{P}) = (f(b) - f(a))\delta(\mathcal{P}).$$

Amennyiben tehát $\delta(\mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$, akkor

$$S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}} < \varepsilon.$$

KORLÁTOS, ZÁRT INTERVALLUMON MONOTON FÜGGVÉNY RIEMANN-INTEGRÁLHATÓ

TÉTEL

Ha f monoton $[a, b]$-n, akkor ott Riemann-integrálható.

Bizonyítás. Feltehető, hogy pl. f monoton növekvő. Ekkor minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén $M_k = f(x_k), m_k = f(x_{k-1})$, és

$$S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}} = \sum_{k=1}^{N} (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1})$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\delta(\mathcal{P}) = (f(b) - f(a))\delta(\mathcal{P}).$$

Amennyiben tehát $\delta(\mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$, akkor

$$S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}} < \varepsilon.$$

KORLÁTOS, ZÁRT INTERVALLUMON MONOTON FÜGGVÉNY RIEMANN-INTEGRÁLHATÓ

TÉTEL

Ha f monoton $[a, b]$-n, akkor ott Riemann-integrálható.

Bizonyítás. Feltehető, hogy pl. f monoton növekvő. Ekkor minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén $M_k = f(x_k), m_k = f(x_{k-1})$, és

$$S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}} = \sum_{k=1}^{N} (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1})$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\delta(\mathcal{P}) = (f(b) - f(a))\delta(\mathcal{P}).$$

Amennyiben tehát $\delta(\mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$, akkor

$$S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}} < \varepsilon.$$

KORLÁTOS, ZÁRT INTERVALLUMON MONOTON FÜGGVÉNY RIEMANN-INTEGRÁLHATÓ

TÉTEL

Ha f monoton $[a, b]$-n, akkor ott Riemann-integrálható.

Bizonyítás. Feltehető, hogy pl. f monoton növekvő. Ekkor minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén $M_k = f(x_k), m_k = f(x_{k-1})$, és

$$S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}} = \sum_{k=1}^{N} (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1})$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\delta(\mathcal{P}) = (f(b) - f(a))\delta(\mathcal{P}).$$

Amennyiben tehát $\delta(\mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$, akkor

$$S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}} < \varepsilon.$$

KORLÁTOS, ZÁRT INTERVALLUMON MONOTON FÜGGVÉNY RIEMANN-INTEGRÁLHATÓ

TÉTEL

Ha f monoton $[a, b]$-n, akkor ott Riemann-integrálható.

Bizonyítás. Feltehető, hogy pl. f monoton növekvő. Ekkor minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén $M_k = f(x_k), m_k = f(x_{k-1})$, és

$$S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}} = \sum_{k=1}^{N} (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1})$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\delta(\mathcal{P}) = (f(b) - f(a))\delta(\mathcal{P}).$$

Amennyiben tehát $\delta(\mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$, akkor

$$S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}} < \varepsilon.$$

KORLÁTOS, ZÁRT INTERVALLUMON MONOTON FÜGGVÉNY RIEMANN-INTEGRÁLHATÓ

TÉTEL

Ha f monoton $[a, b]$-n, akkor ott Riemann-integrálható.

Bizonyítás. Feltehető, hogy pl. f monoton növekvő. Ekkor minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén $M_k = f(x_k), m_k = f(x_{k-1})$, és

$$S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}} = \sum_{k=1}^{N} (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1})$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\delta(\mathcal{P}) = (f(b) - f(a))\delta(\mathcal{P}).$$

Amennyiben tehát $\delta(\mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$, akkor

$$S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}} < \varepsilon.$$

KORLÁTOS, ZÁRT INTERVALLUMON MONOTON FÜGGVÉNY RIEMANN-INTEGRÁLHATÓ

TÉTEL

Ha f monoton $[a, b]$-n, akkor ott Riemann-integrálható.

Bizonyítás. Feltehető, hogy pl. f monoton növekvő. Ekkor minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén $M_k = f(x_k), m_k = f(x_{k-1})$, és

$$S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}} = \sum_{k=1}^{N} (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1})$$
$$\leq \sum_{k=1}^{N} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\delta(\mathcal{P}) = (f(b) - f(a))\delta(\mathcal{P}).$$

Amennyiben tehát $\delta(\mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$, akkor

$$S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}} < \varepsilon.$$

KORLÁTOS, ZÁRT INTERVALLUMON MONOTON FÜGGVÉNY RIEMANN-INTEGRÁLHATÓ

TÉTEL

Ha f monoton $[a, b]$-n, akkor ott Riemann-integrálható.

Bizonyítás. Feltehető, hogy pl. f monoton növekvő. Ekkor minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén $M_k = f(x_k), m_k = f(x_{k-1})$, és

$$S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}} = \sum_{k=1}^{N} (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1})$$
$$\leq \sum_{k=1}^{N} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\delta(\mathcal{P}) = (f(b) - f(a))\delta(\mathcal{P}).$$

Amennyiben tehát $\delta(\mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$, akkor

$$S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}} < \varepsilon.$$

KORLÁTOS, ZÁRT INTERVALLUMON MONOTON FÜGGVÉNY RIEMANN-INTEGRÁLHATÓ

TÉTEL

Ha f monoton $[a, b]$-n, akkor ott Riemann-integrálható.

Bizonyítás. Feltehető, hogy pl. f monoton növekvő. Ekkor minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén $M_k = f(x_k), m_k = f(x_{k-1})$, és

$$S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}} = \sum_{k=1}^{N} (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1})$$
$$\leq \sum_{k=1}^{N} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\delta(\mathcal{P}) = (f(b) - f(a))\delta(\mathcal{P}).$$

Amennyiben tehát $\delta(\mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$, akkor

$$S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}} < \varepsilon.$$

A RIEMANN-INTEGRÁL MONOTONITÁSA

ÁLLÍTÁS

Legyen $a < b$ és minden $x \in [a, b]$ esetén $f(x) \geq 0$. Ekkor

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Bizonyítás. Minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén $m_k \geq 0$ minden $1 \leq k \leq N$-re, ahonnan

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \geq \sum_{k=1}^{N} m_k(x_k - x_{k-1}) \geq 0.$$

A RIEMANN-INTEGRÁL MONOTONITÁSA

ÁLLÍTÁS

Legyen $a < b$ és minden $x \in [a, b]$ esetén $f(x) \geq 0$. Ekkor

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Bizonyítás. Minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén $m_k \geq 0$ minden $1 \leq k \leq N$-re, ahonnan

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \geq \sum_{k=1}^{N} m_k(x_k - x_{k-1}) \geq 0.$$

A RIEMANN-INTEGRÁL MONOTONITÁSA

ÁLLÍTÁS

Legyen $a < b$ és minden $x \in [a, b]$ esetén $f(x) \geq 0$. Ekkor

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Bizonyítás. Minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén $m_k \geq 0$ minden $1 \leq k \leq N$-re, ahonnan

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \geq \sum_{k=1}^{N} m_k(x_k - x_{k-1}) \geq 0.$$

A RIEMANN-INTEGRÁL MONOTONITÁSA

ÁLLÍTÁS

Legyen $a < b$ és minden $x \in [a, b]$ esetén $f(x) \geq 0$. Ekkor

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Bizonyítás. Minden $\mathcal{P}$ felosztás esetén $m_k \geq 0$ minden $1 \leq k \leq N$-re, ahonnan

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \geq \sum_{k=1}^{N} m_k(x_k - x_{k-1}) \geq 0.$$

VÉGES SOK PONTBAN KÜLÖNBÖZŐ FÜGGVÉNYEK RIEMANN-INTEGRÁLJA

ÁLLÍTÁS

Ha f Riemann-integrálható $[a, b]$-on, és g olyan valós függvény $[a, b]$-on, amelyre léteznek olyan $a \leq c_1 < \cdots < c_n \leq b$ értékek, hogy minden $x \notin \{c_1, \ldots, c_n\}$ esetén $f(x) = g(x)$, akkor g is Riemann-integrálható $[a, b]$-on, és

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

VÉGES SOK PONTBAN KÜLÖNBÖZŐ FÜGGVÉNYEK RIEMANN-INTEGRÁLJA

ÁLLÍTÁS

Ha f Riemann-integrálható $[a, b]$-on, és g olyan valós függvény $[a, b]$-on, amelyre léteznek olyan $a \leq c_1 < \cdots < c_n \leq b$ értékek, hogy minden $x \notin \{c_1, \ldots, c_n\}$ esetén $f(x) = g(x)$, akkor g is Riemann-integrálható $[a, b]$-on, és

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

VÉGES SOK PONTBAN KÜLÖNBÖZŐ FÜGGVÉNYEK RIEMANN-INTEGRÁLJA

ÁLLÍTÁS

Ha f Riemann-integrálható $[a, b]$-on, és g olyan valós függvény $[a, b]$-on, amelyre léteznek olyan $a \leq c_1 < \cdots < c_n \leq b$ értékek, hogy minden $x \notin \{c_1, \ldots, c_n\}$ esetén $f(x) = g(x)$, akkor g is Riemann-integrálható $[a, b]$-on, és

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

VÉGES SOK PONTBAN KÜLÖNBÖZŐ FÜGGVÉNYEK RIEMANN-INTEGRÁLJA

ÁLLÍTÁS

Ha f Riemann-integrálható $[a, b]$-on, és g olyan valós függvény $[a, b]$-on, amelyre léteznek olyan $a \leq c_1 < \cdots < c_n \leq b$ értékek, hogy minden $x \notin \{c_1, \ldots, c_n\}$ esetén $f(x) = g(x)$, akkor g is Riemann-integrálható $[a, b]$-on, és

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

VÉGES SOK PONTBAN KÜLÖNBÖZŐ FÜGGVÉNYEK RIEMANN-INTEGRÁLJA

Bizonyítás: Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és legyen K felső korlátja $|f - g|$-nek $[a, b]$-n. Jelölje $s_{\mathcal{P}}(f)$ és $s_{\mathcal{P}}(g)$ rendre f és g alsó integrálközelítő összegeit, és vezessük be hasonlóan az $S_{\mathcal{P}}(f)$ és $S_{\mathcal{P}}(g)$ jelölést. Válasszunk egy olyan $\mathcal{P}_m$ minden határon túl finomodó felosztássorozatot, melyre $\delta(\mathcal{P}_m) < \frac{1}{m}$. Ekkor

$$s_{\mathcal{P}_m}(f) - K \cdot n \cdot \frac{1}{m} \leq s_{\mathcal{P}_m}(g) \leq S_{\mathcal{P}_m}(g) \leq S_{\mathcal{P}_m}(f) + K \cdot n \cdot \frac{1}{m}$$

Mivel f integrálható és $\mathcal{P}_m$ minden határon túl finomodó felosztássorozat, a rendőr-elvből következik az állítás.

VÉGES SOK PONTBAN KÜLÖNBÖZŐ FÜGGVÉNYEK RIEMANN-INTEGRÁLJA

Bizonyítás: Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és legyen K felső korlátja $|f - g|$-nek $[a, b]$-n. Jelölje $s_{\mathcal{P}}(f)$ és $s_{\mathcal{P}}(g)$ rendre f és g alsó integrálközelítő összegeit, és vezessük be hasonlóan az $S_{\mathcal{P}}(f)$ és $S_{\mathcal{P}}(g)$ jelölést. Válasszunk egy olyan $\mathcal{P}_m$ minden határon túl finomodó felosztássorozatot, melyre $\delta(\mathcal{P}_m) < \frac{1}{m}$. Ekkor

$$s_{\mathcal{P}_m}(f) - K \cdot n \cdot \frac{1}{m} \leq s_{\mathcal{P}_m}(g) \leq S_{\mathcal{P}_m}(g) \leq S_{\mathcal{P}_m}(f) + K \cdot n \cdot \frac{1}{m}$$

Mivel f integrálható és $\mathcal{P}_m$ minden határon túl finomodó felosztássorozat, a rendőr-elvből következik az állítás.

VÉGES SOK PONTBAN KÜLÖNBÖZŐ FÜGGVÉNYEK RIEMANN-INTEGRÁLJA

Bizonyítás: Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és legyen K felső korlátja $|f - g|$-nek $[a, b]$-n. Jelölje $s_{\mathcal{P}}(f)$ és $s_{\mathcal{P}}(g)$ rendre f és g alsó integrálközelítő összegeit, és vezessük be hasonlóan az $S_{\mathcal{P}}(f)$ és $S_{\mathcal{P}}(g)$ jelölést. Válasszunk egy olyan $\mathcal{P}_m$ minden határon túl finomodó felosztássorozatot, melyre $\delta(\mathcal{P}_m) < \frac{1}{m}$. Ekkor

$$s_{\mathcal{P}_m}(f) - K \cdot n \cdot \frac{1}{m} \leq s_{\mathcal{P}_m}(g) \leq S_{\mathcal{P}_m}(g) \leq S_{\mathcal{P}_m}(f) + K \cdot n \cdot \frac{1}{m}$$

Mivel f integrálható és $\mathcal{P}_m$ minden határon túl finomodó felosztássorozat, a rendőr-elvből következik az állítás.

VÉGES SOK PONTBAN KÜLÖNBÖZŐ FÜGGVÉNYEK RIEMANN-INTEGRÁLJA

Bizonyítás: Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és legyen K felső korlátja $|f - g|$-nek $[a, b]$-n. Jelölje $s_{\mathcal{P}}(f)$ és $s_{\mathcal{P}}(g)$ rendre f és g alsó integrálközelítő összegeit, és vezessük be hasonlóan az $S_{\mathcal{P}}(f)$ és $S_{\mathcal{P}}(g)$ jelölést. Válasszunk egy olyan $\mathcal{P}_m$ minden határon túl finomodó felosztássorozatot, melyre $\delta(\mathcal{P}_m) < \frac{1}{m}$. Ekkor

$$s_{\mathcal{P}_m}(f) - K \cdot n \cdot \frac{1}{m} \leq s_{\mathcal{P}_m}(g) \leq S_{\mathcal{P}_m}(g) \leq S_{\mathcal{P}_m}(f) + K \cdot n \cdot \frac{1}{m}$$

Mivel f integrálható és $\mathcal{P}_m$ minden határon túl finomodó felosztássorozat, a rendőr-elvből következik az állítás.

VÉGES SOK PONTBAN KÜLÖNBÖZŐ FÜGGVÉNYEK RIEMANN-INTEGRÁLJA

Bizonyítás: Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és legyen K felső korlátja $|f - g|$-nek $[a, b]$-n. Jelölje $s_{\mathcal{P}}(f)$ és $s_{\mathcal{P}}(g)$ rendre f és g alsó integrálközelítő összegeit, és vezessük be hasonlóan az $S_{\mathcal{P}}(f)$ és $S_{\mathcal{P}}(g)$ jelölést. Válasszunk egy olyan $\mathcal{P}_m$ minden határon túl finomodó felosztássorozatot, melyre $\delta(\mathcal{P}_m) < \frac{1}{m}$. Ekkor

$$s_{\mathcal{P}_m}(f) - K \cdot n \cdot \frac{1}{m} \leq s_{\mathcal{P}_m}(g) \leq S_{\mathcal{P}_m}(g) \leq S_{\mathcal{P}_m}(f) + K \cdot n \cdot \frac{1}{m}$$

Mivel f integrálható és $\mathcal{P}_m$ minden határon túl finomodó felosztássorozat, a rendőr-elvből következik az állítás.

VÉGES SOK PONTBAN KÜLÖNBÖZŐ FÜGGVÉNYEK RIEMANN-INTEGRÁLJA

Bizonyítás: Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és legyen K felső korlátja $|f - g|$-nek $[a, b]$-n. Jelölje $s_{\mathcal{P}}(f)$ és $s_{\mathcal{P}}(g)$ rendre f és g alsó integrálközelítő összegeit, és vezessük be hasonlóan az $S_{\mathcal{P}}(f)$ és $S_{\mathcal{P}}(g)$ jelölést. Válasszunk egy olyan $\mathcal{P}_m$ minden határon túl finomodó felosztássorozatot, melyre $\delta(\mathcal{P}_m) < \frac{1}{m}$. Ekkor

$$s_{\mathcal{P}_m}(f) - K \cdot n \cdot \frac{1}{m} \leq s_{\mathcal{P}_m}(g) \leq S_{\mathcal{P}_m}(g) \leq S_{\mathcal{P}_m}(f) + K \cdot n \cdot \frac{1}{m}$$

Mivel f integrálható és $\mathcal{P}_m$ minden határon túl finomodó felosztássorozat, a rendőr-elvből következik az állítás.

RIEMANN-INTEGRÁLHATÓSÁG RÉSZINTERVALLUMON

ÁLLÍTÁS

Tegyük fel, hogy f Riemann-integrálható $[a, b]$-on és $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Ekkor f Riemann-integrálható $[\alpha, \beta]$-on is.

Bizonyítás. Rögzített $\varepsilon > 0$ esetén válasszunk olyan $\delta > 0$ értéket, amelyre $[a, b]$ bármely, δ-nál finomabb $\mathcal{P}$ felosztása esetén

$$S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}} < \varepsilon.$$

Ekkor $[\alpha, \beta]$ akármelyik δ-nál finomabb $\mathcal{P}'$ felosztása kiterjeszthető új osztópontok felvételével $[a, b]$ egy δ-nál finomabb $\mathcal{P}$ felosztásává. Könnyen látható, hogy

$$S_{\mathcal{P}'} - s_{\mathcal{P}'} \leq S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}}.$$

RIEMANN-INTEGRÁLHATÓSÁG RÉSZINTERVALLUMON

ÁLLÍTÁS

Tegyük fel, hogy f Riemann-integrálható $[a, b]$-on és $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Ekkor f Riemann-integrálható $[\alpha, \beta]$-on is.

Bizonyítás. Rögzített $\varepsilon > 0$ esetén válasszunk olyan $\delta > 0$ értéket, amelyre $[a, b]$ bármely, δ-nál finomabb $\mathcal{P}$ felosztása esetén

$$S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}} < \varepsilon.$$

Ekkor $[\alpha, \beta]$ akármelyik δ-nál finomabb $\mathcal{P}'$ felosztása kiterjeszthető új osztópontok felvételével $[a, b]$ egy δ-nál finomabb $\mathcal{P}$ felosztásává. Könnyen látható, hogy

$$S_{\mathcal{P}'} - s_{\mathcal{P}'} \leq S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}}.$$

RIEMANN-INTEGRÁLHATÓSÁG RÉSZINTERVALLUMON

ÁLLÍTÁS

Tegyük fel, hogy f Riemann-integrálható $[a, b]$-on és $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Ekkor f Riemann-integrálható $[\alpha, \beta]$-on is.

Bizonyítás. Rögzített $\varepsilon > 0$ esetén válasszunk olyan $\delta > 0$ értéket, amelyre $[a, b]$ bármely, δ-nál finomabb $\mathcal{P}$ felosztása esetén

$$S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}} < \varepsilon.$$

Ekkor $[\alpha, \beta]$ akármelyik δ-nál finomabb $\mathcal{P}'$ felosztása kiterjeszthető új osztópontok felvételével $[a, b]$ egy δ-nál finomabb $\mathcal{P}$ felosztásává. Könnyen látható, hogy

$$S_{\mathcal{P}'} - s_{\mathcal{P}'} \leq S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}}.$$

RIEMANN-INTEGRÁLHATÓSÁG RÉSZINTERVALLUMON

ÁLLÍTÁS

Tegyük fel, hogy f Riemann-integrálható $[a, b]$-on és $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Ekkor f Riemann-integrálható $[\alpha, \beta]$-on is.

Bizonyítás. Rögzített $\varepsilon > 0$ esetén válasszunk olyan $\delta > 0$ értéket, amelyre $[a, b]$ bármely, δ-nál finomabb $\mathcal{P}$ felosztása esetén

$$S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}} < \varepsilon.$$

Ekkor $[\alpha, \beta]$ akármelyik δ-nál finomabb $\mathcal{P}'$ felosztása kiterjeszthető új osztópontok felvételével $[a, b]$ egy δ-nál finomabb $\mathcal{P}$ felosztásává. Könnyen látható, hogy

$$S_{\mathcal{P}'} - s_{\mathcal{P}'} \leq S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}}.$$

RIEMANN-INTEGRÁLHATÓSÁG RÉSZINTERVALLUMON

ÁLLÍTÁS

Tegyük fel, hogy f Riemann-integrálható $[a, b]$-on és $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Ekkor f Riemann-integrálható $[\alpha, \beta]$-on is.

Bizonyítás. Rögzített $\varepsilon > 0$ esetén válasszunk olyan $\delta > 0$ értéket, amelyre $[a, b]$ bármely, δ-nál finomabb $\mathcal{P}$ felosztása esetén

$$S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}} < \varepsilon.$$

Ekkor $[\alpha, \beta]$ akármelyik δ-nál finomabb $\mathcal{P}'$ felosztása kiterjeszthető új osztópontok felvételével $[a, b]$ egy δ-nál finomabb $\mathcal{P}$ felosztásává. Könnyen látható, hogy

$$S_{\mathcal{P}'} - s_{\mathcal{P}'} \leq S_{\mathcal{P}} - s_{\mathcal{P}}.$$

RIEMANN-INTEGRÁLHATÓSÁG INTERVALLUMOK EGYESÍTÉSÉN

ÁLLÍTÁS

Legyenek $a < b < c$ és tegyük fel, hogy f Riemann-integrálható $[a, b]$-n és $[b, c]$-n. Ekkor f Riemann-integrálható $[a, c]$-n is, és

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

RIEMANN-INTEGRÁLHATÓSÁG INTERVALLUMOK EGYESÍTÉSÉN

ÁLLÍTÁS

Legyenek $a < b < c$ és tegyük fel, hogy f Riemann-integrálható $[a, b]$-n és $[b, c]$-n. Ekkor f Riemann-integrálható $[a, c]$-n is, és

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

RIEMANN-INTEGRÁLHATÓSÁG INTERVALLUMOK EGYESÍTÉSÉN

ÁLLÍTÁS

Legyenek $a < b < c$ és tegyük fel, hogy f Riemann-integrálható $[a, b]$-n és $[b, c]$-n. Ekkor f Riemann-integrálható $[a, c]$-n is, és

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

RIEMANN-INTEGRÁLHATÓSÁG INTERVALLUMOK EGYESÍTÉSÉN

Bizonyítás. Legyenek $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ felosztásai $[a, b]$-nek és $[b, c]$-nek. Tekintsük $[a, c]$-nak azt a $\mathcal{P}_0$ felosztását, amelynek osztópontjai $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ osztópontjainak egyesítése. Ekkor, amint $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ minden határon túl finomodik, úgy ugyanez igaz $\mathcal{P}_0$-ra is. Továbbá minden $\mathcal{P}_0$-hoz tartozó téglányösszeg megkapható egy $\mathcal{P}_1$-hez és egy $\mathcal{P}_2$-höz tartozó téglányösszeg összegeként. Minthogy utóbbiak tetszőleges ξ_k választások esetén rendre $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$-hez és $\int_b^c f(x)\mathrm{d}x$-hez tartanak, megkapjuk a kívánt összefüggést.

RIEMANN-INTEGRÁLHATÓSÁG INTERVALLUMOK EGYESÍTÉSÉN

Bizonyítás. Legyenek $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ felosztásai $[a, b]$-nek és $[b, c]$-nek. Tekintsük $[a, c]$-nak azt a $\mathcal{P}_0$ felosztását, amelynek osztópontjai $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ osztópontjainak egyesítése. Ekkor, amint $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ minden határon túl finomodik, úgy ugyanez igaz $\mathcal{P}_0$-ra is. Továbbá minden $\mathcal{P}_0$-hoz tartozó téglányösszeg megkapható egy $\mathcal{P}_1$-hez és egy $\mathcal{P}_2$-höz tartozó téglányösszeg összegeként. Minthogy utóbbiak tetszőleges ξ_k választások esetén rendre $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$-hez és $\int_b^c f(x)\mathrm{d}x$-hez tartanak, megkapjuk a kívánt összefüggést.

RIEMANN-INTEGRÁLHATÓSÁG INTERVALLUMOK EGYESÍTÉSÉN

Bizonyítás. Legyenek $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ felosztásai $[a, b]$-nek és $[b, c]$-nek. Tekintsük $[a, c]$-nak azt a $\mathcal{P}_0$ felosztását, amelynek osztópontjai $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ osztópontjainak egyesítése. Ekkor, amint $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ minden határon túl finomodik, úgy ugyanez igaz $\mathcal{P}_0$-ra is. Továbbá minden $\mathcal{P}_0$-hoz tartozó téglányösszeg megkapható egy $\mathcal{P}_1$-hez és egy $\mathcal{P}_2$-höz tartozó téglányösszeg összegeként. Minthogy utóbbiak tetszőleges ξ_k választások esetén rendre $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$-hez és $\int_b^c f(x)\mathrm{d}x$-hez tartanak, megkapjuk a kívánt összefüggést.

RIEMANN-INTEGRÁLHATÓSÁG INTERVALLUMOK EGYESÍTÉSÉN

Bizonyítás. Legyenek $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ felosztásai $[a, b]$-nek és $[b, c]$-nek. Tekintsük $[a, c]$-nak azt a $\mathcal{P}_0$ felosztását, amelynek osztópontjai $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ osztópontjainak egyesítése. Ekkor, amint $\mathcal{P}_1$ és $\mathcal{P}_2$ minden határon túl finomodik, úgy ugyanez igaz $\mathcal{P}_0$-ra is. Továbbá minden $\mathcal{P}_0$-hoz tartozó téglányösszeg megkapható egy $\mathcal{P}_1$-hez és egy $\mathcal{P}_2$-höz tartozó téglányösszeg összegeként. Minthogy utóbbiak tetszőleges ξ_k választások esetén rendre $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$-hez és $\int_b^c f(x)\mathrm{d}x$-hez tartanak, megkapjuk a kívánt összefüggést.

A RIEMANN-INTEGRÁL LINEARITÁSA, I.

Tegyük fel, hogy f Riemann-integrálható $[a, b]$-on, és legyen $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

ÁLLÍTÁS

Ekkor cf is Riemann-integrálható $[a, b]$-on, és

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

Bizonyítás. Azonnal következik a

$$m_k(cf) = cm_k(f), \quad M_k(cf) = cM_k(f)$$

összefüggésekből.

A RIEMANN-INTEGRÁL LINEARITÁSA, I.

Tegyük fel, hogy f Riemann-integrálható $[a, b]$-on, és legyen $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

ÁLLÍTÁS

Ekkor cf is Riemann-integrálható $[a, b]$-on, és

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

Bizonyítás. Azonnal következik a

$$m_k(cf) = cm_k(f), \quad M_k(cf) = cM_k(f)$$

összefüggésekből.

A RIEMANN-INTEGRÁL LINEARITÁSA, I.

Tegyük fel, hogy f Riemann-integrálható $[a, b]$-on, és legyen $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

ÁLLÍTÁS

Ekkor cf is Riemann-integrálható $[a, b]$-on, és

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

Bizonyítás. Azonnal következik a

$$m_k(cf) = cm_k(f), \quad M_k(cf) = cM_k(f)$$

összefüggésekből.

A RIEMANN-INTEGRÁL LINEARITÁSA, I.

Tegyük fel, hogy f Riemann-integrálható $[a, b]$-on, és legyen $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

ÁLLÍTÁS

Ekkor cf is Riemann-integrálható $[a, b]$-on, és

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

Bizonyítás. Azonnal következik a

$$m_k(cf) = cm_k(f), \quad M_k(cf) = cM_k(f)$$

összefüggésekből.

A RIEMANN-INTEGRÁL LINEARITÁSA, II.

Tegyük fel, hogy az f és g függvények Riemann-integrálhatók $[a, b]$-on.

ÁLLÍTÁS

Ekkor $f + g$ is Riemann-integrálható $[a, b]$-on, és

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Bizonyítás. Az $f + g$ függvény akármelyik $\mathcal{P}$ felosztáshoz és ξ_k választáshoz tartozó téglányösszege megkapható az f és g függvények ugyanazon $\mathcal{P}$ felosztáshoz és ξ_k választáshoz tartozó téglányösszegeinek összegeként. Mivel utóbbiak tetszőleges ξ_k választások esetén rendre $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$-hez és $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$-hez tartanak, amint $\mathcal{P}$ minden határon túl finomodik, így kapjuk a kívánt összefüggést.

A RIEMANN-INTEGRÁL LINEARITÁSA, II.

Tegyük fel, hogy az f és g függvények Riemann-integrálhatók $[a, b]$-on.

ÁLLÍTÁS

Ekkor $f + g$ is Riemann-integrálható $[a, b]$-on, és

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Bizonyítás. Az $f + g$ függvény akármelyik $\mathcal{P}$ felosztáshoz és ξ_k választáshoz tartozó téglányösszege megkapható az f és g függvények ugyanazon $\mathcal{P}$ felosztáshoz és ξ_k választáshoz tartozó téglányösszegeinek összegeként. Mivel utóbbiak tetszőleges ξ_k választások esetén rendre $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$-hez és $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$-hez tartanak, amint $\mathcal{P}$ minden határon túl finomodik, így kapjuk a kívánt összefüggést.

A RIEMANN-INTEGRÁL LINEARITÁSA, II.

Tegyük fel, hogy az f és g függvények Riemann-integrálhatók $[a, b]$-on.

ÁLLÍTÁS

Ekkor $f + g$ is Riemann-integrálható $[a, b]$-on, és

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Bizonyítás. Az $f + g$ függvény akármelyik $\mathcal{P}$ felosztáshoz és ξ_k választáshoz tartozó téglányösszege megkapható az f és g függvények ugyanazon $\mathcal{P}$ felosztáshoz és ξ_k választáshoz tartozó téglányösszegeinek összegeként. Mivel utóbbiak tetszőleges ξ_k választások esetén rendre $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$-hez és $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$-hez tartanak, amint $\mathcal{P}$ minden határon túl finomodik, így kapjuk a kívánt összefüggést.

A RIEMANN-INTEGRÁL LINEARITÁSA, II.

Tegyük fel, hogy az f és g függvények Riemann-integrálhatók $[a, b]$-on.

ÁLLÍTÁS

Ekkor $f + g$ is Riemann-integrálható $[a, b]$-on, és

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Bizonyítás. Az $f + g$ függvény akármelyik $\mathcal{P}$ felosztáshoz és ξ_k választáshoz tartozó téglányösszege megkapható az f és g függvények ugyanazon $\mathcal{P}$ felosztáshoz és ξ_k választáshoz tartozó téglányösszegeinek összegeként. Mivel utóbbiak tetszőleges ξ_k választások esetén rendre $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$-hez és $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$-hez tartanak, amint $\mathcal{P}$ minden határon túl finomodik, így kapjuk a kívánt összefüggést.

A RIEMANN-INTEGRÁL LINEARITÁSA, II.

Tegyük fel, hogy az f és g függvények Riemann-integrálhatók $[a, b]$-on.

ÁLLÍTÁS

Ekkor $f + g$ is Riemann-integrálható $[a, b]$-on, és

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Bizonyítás. Az $f + g$ függvény akármelyik $\mathcal{P}$ felosztáshoz és ξ_k választáshoz tartozó téglányösszege megkapható az f és g függvények ugyanazon $\mathcal{P}$ felosztáshoz és ξ_k választáshoz tartozó téglányösszegeinek összegeként. Mivel utóbbiak tetszőleges ξ_k választások esetén rendre $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$-hez és $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$-hez tartanak, amint $\mathcal{P}$ minden határon túl finomodik, így kapjuk a kívánt összefüggést.

A RIEMANN-INTEGRÁL LINEARITÁSA, II.

Tegyük fel, hogy az f és g függvények Riemann-integrálhatók $[a, b]$-on.

ÁLLÍTÁS

Ekkor $f + g$ is Riemann-integrálható $[a, b]$-on, és

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Bizonyítás. Az $f + g$ függvény akármelyik $\mathcal{P}$ felosztáshoz és ξ_k választáshoz tartozó téglányösszege megkapható az f és g függvények ugyanazon $\mathcal{P}$ felosztáshoz és ξ_k választáshoz tartozó téglányösszegeinek összegeként. Mivel utóbbiak tetszőleges ξ_k választások esetén rendre $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$-hez és $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$-hez tartanak, amint $\mathcal{P}$ minden határon túl finomodik, így kapjuk a kívánt összefüggést.

RIEMANN-INTEGRÁLHATÓ FÜGGVÉNYEK SZORZATA ÉS HÁNYADOSA INTEGRÁLHATÓ

ÁLLÍTÁS

Tegyük fel, hogy az f és g függvények Riemann-integrálhatók $[a, b]$-n. Ekkor az fg függvény Riemann-integrálható $[a, b]$-n. Továbbá ha létezik olyan $m > 0$, amelyre minden $x \in [a, b]$ esetén $g(x) \geq m$, akkor $\frac{f}{g}$ is Riemann-integrálható $[a, b]$-on.

RIEMANN-INTEGRÁLHATÓ FÜGGVÉNYEK SZORZATA ÉS HÁNYADOSA INTEGRÁLHATÓ

ÁLLÍTÁS

Tegyük fel, hogy az f és g függvények Riemann-integrálhatók $[a, b]$-n. Ekkor az fg függvény Riemann-integrálható $[a, b]$-n. Továbbá ha létezik olyan $m > 0$, amelyre minden $x \in [a, b]$ esetén $g(x) \geq m$, akkor $\frac{f}{g}$ is Riemann-integrálható $[a, b]$-on.

RIEMANN-INTEGRÁLHATÓ FÜGGVÉNYEK SZORZATA ÉS HÁNYADOSA INTEGRÁLHATÓ

ÁLLÍTÁS

Tegyük fel, hogy az f és g függvények Riemann-integrálhatók $[a, b]$-n. Ekkor az fg függvény Riemann-integrálható $[a, b]$-n. Továbbá ha létezik olyan $m > 0$, amelyre minden $x \in [a, b]$ esetén $g(x) \geq m$, akkor $\frac{f}{g}$ is Riemann-integrálható $[a, b]$-on.