A klasszikus mechanika matematikai módszerei

2016. április 1.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Ez a jegyzet az „A klasszikus mechanika matematikai módszerei” (tárgykód: BMETE93MM12) tárgyhoz készült, és a newtoni mechanika két átfogalmazását (és általánosítását), a Lagrange- és a Hamilton-mechanikát mutatja be a differenciálgeometria fogalmaira építve. Az anyag összeállításához nagy segítségét nyújtottak az alábbi könyvek, amelyek egyben ajánlott olvasmányok is:

[1] T. Matolcsi, ‘Spacetime Without Reference Frames’, Akadémiai Kiadó, Budapest (1993)

[2] V. I. Arnold, ‘A mechanika matematikai módszerei’, Műszaki Könyvkiadó, Budapest (1985)

[3] R. Abraham, J. E. Marsden, ‘Foundations of Mechanics’, Addison-Wesley Publishing Company, lnc.

Az 1 rész először a téridő fogalmát és a Newton-egyenlet koordinátamentes alakját tárgyalja [1] eleje alapján, azt kissé leegyszerűsítva. Ezt a Hamilton-féle variációs elv, illetve a variációszámítás alapjainak bemutatása követi. Belátjuk, hogy a hatás stacionárius pontjai éppen az Euler-Lagrange-egyenletek megoldásai, illetve egy megfelelően választott Lagrange-függvény mellett ezek a Newton-egyenlettel egyeznek meg. A sokaságokra való általánosításhoz jó motivációt ad a Lagrange-függvény koordinátatranszformáció alatti viselkedése, illetve – [2, 17. szakasz] mintájára – a holonom kényszer mint idealizált „visszatérítő erő”. Ezzel kapcsolatban bebizonyítjuk az ott csak kimondott tételt, miszerint ha a visszatérítő erőtér végtelenhez tart, akkor a mozgás tart egy olyan függvényhez, amit a kényszerfelületre megszorított Lagrange-függvényhez tartozó Euler-Lagrange-egyenlet megoldása (kinetikus mínusz potenciális energia típusú Lagrange-függvény esetén).

A 2 rész tartalmazza a Lagrange-mechanika sokaságokra való általánosítását és a Legendre-transzformációt. A 3 rész a Hamilton-rendszereket tárgyalja szimplektikus sokaságokon, különös tekintettel a szimmetriák és megmaradó mennyiségek szerepére a megoldások vizsgálatában. Ezek a részek főként [3] 3. és 4. fejezeteiből válogatnak, de az eltérő sorrend miatt helyenként az állítások más bizonyítással szerepelnek.

A szokásos analízis és lineáris algebra tárgyakon túlmutató, de az anyag elsajátításához szükséges ismereteket az A, B és C részek foglalják össze (bizonyítások nélkül). Ezen belül B és C esetében főként [3] első részére támaszkodtam, kivéve a konnexiókról szóló szakaszt.

Vrana Péter

1. fejezet

Newtoni mechanika

1.1. Téridő, Galilei-transzformációk

A klasszikus mechanika alapvető fogalma a téridő. Amikor egy „eseményhez” hozzárendeljük a téridő egy pontját, azt a hétköznapi nyelven úgy fejezzük ki, hogy az esemény „akkor” és „ott” történik. Ahhoz, hogy a téridő fogalmához kielégítő matematikai modellt találjunk, figyelembe kell venni néhány kísérleti tényt[1]:

1. Két eseményről egyértelműen eldönthető, hogy egyidejűek-e vagy sem, illetve melyik történt előbb. Ha az A esemény B előtt történt, B pedig C előtt, akkor A is C előtt történt.

2. Pontosabban: értelmes arról beszélni, hogy az A esemény mennyivel történt a B esemény előtt. Az események között eltelt időket összeadhatjuk, és valós számokkal szorozhatjuk.

3. Egy adott eseménnyel egyidejű események összességén értelmezhető a relatív helyzet, ezeket összeadhatjuk, valós számokkal szorozhatjuk. A relatív helyzetek három dimenziós vektorteret alkotnak.

4. Egyidejű eseménypároknak értelmezhető távolsága.

5. Értelmezhető az egyenes vonalú egyenletes mozgás fogalma. Két ilyen mozgást végző test relatív helyzete egyenletesen változik.

6. Két nem egyidejű eseményhez pontosan egy egyenes vonalú egyenletes mozgás tartozik, amely mindkettőn áthalad.

Vegyük észre, hogy a fenti felsorolásban már tettünk bizonyos lépéseket az absztrakció felé: szigorúan véve mindet fel lehetne bontani még elemibb tapasztalatokra, vagy éppen nem is jogos tapasztalatnak tekinteni. Az utóbbira példa az eltelt idő valós számmal szorzásának lehetősége, amit a leggondosabb kísérlet sem lehet képes alátámasztani.

Ezen tapasztalatok indokolják a következő definíciót:

[1] A pontosabb mérések azt mutatják, hogy ezek a „kísérleti tények” valójában csak közelítőleg teljesülnek. Az egyidejűség fogalma nem létezik (ennek felismerése vezetett a speciális relativitáselmélethez), illetve a téridő két pontja között létezhet több időszerű geodetikus, azaz olyan világvonal, amelyen magára hagyott test halad (az általános relativitáselméletben).

1.1.1. Definíció. $(\mathbf{M}, \mathbf{I}, \mathbf{t}, D, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *nemrelativisztikus téridő-modell* (röviden téridő), ha $\mathbf{M}$ affin tér az M négydimenziós valós vektortér felett, $\mathbf{I}$ affin tér az I egydimenziós irányított valós vektortér felett, $\mathbf{t} : \mathbf{M} \to \mathbf{I}$ affin leképezés a $t : M \to I$ szürjektív leképezés felett, D egydimenziós irányított valós vektortér, és $E := \ker t$ jelöléssel $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to D \otimes D$ pozitív definit bilineáris leképezés.

Itt D és I szerepe az, hogy a távolságok és időtartamok ezen vektorterek elemei. Az egyszerűség kedvéért rögzíthettük volna mindkettőt egyszerűen $\mathbb{R}$-nek, de a különböző vektorterek használata azt hangsúlyozza, hogy nincsen értelme összeadni egy távolságot egy időtartammal.

A következőkben azt mutatjuk meg, hogy lényegében egyetlen téridő létezik. Az állítás pontos kimondásához először definiáljuk két téridő között az izomorfizmusokat.

1.1.2. Definíció. Legyen $(\mathbf{M}_1, \mathbf{I}_1, \mathbf{t}_1, D_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ és $(\mathbf{M}_2, \mathbf{I}_2, \mathbf{t}_2, D_2, \langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ két téridő. Egy $\mathbf{G} : \mathbf{M}_1 \to \mathbf{M}_2$ leképezés *izomorfizmus*, ha affin bijekció, és létezik egy $d : D_1 \to D_2$ irányítástartó lineáris és egy $\mathbf{c} : \mathbf{I}_1 \to \mathbf{I}_2$ irányítástartó affin bijekció, amelyekre a következők teljesülnek:

1. $\mathbf{c} \circ \mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2 \circ \mathbf{G}$
2. Ha $u, v \in E_1$, akkor $d \otimes d(\langle u, v\rangle_1) = \langle G(u), G(v)\rangle_2$.

A definíció alapján látható, hogy egy izomorfizmus inverze és izomorfizmusok kompozíciója is izomorfizmus.

A számolásokat megkönnyíti, ha egy konkrét téridő modellel dolgozunk:

1.1.3. Definíció. A *standard téridő* alatt az $(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}, \mathbf{t}, \mathbb{R}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ötöst értjük, ahol $\mathbf{t}(\tau, x, y, z) = \tau$, ennek megfelelően E azonosítható az $\mathbb{R}^3$ térrel, és

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \tag{1.1}$$

1.1.4. Állítás. *Bármely két téridő izomorf (azaz létezik közöttük izomorfizmus).*

Bizonyítás. Elég azt megmutatni, hogy tetszőleges téridő izomorf a standard téridővel. Legyen a téridő $(\mathbf{M}, \mathbf{I}, \mathbf{t}, D, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ és válasszunk $m \in D$ és $s \in I$ szigorúan pozitív elemeket, egy $o \in \mathbf{M}$ pontot és egy $w \in t^{-1}(s)$ vektort. Válasszunk továbbá olyan $e_1, e_2, e_3 \in E$ vektorokat, amelyekre $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} m \otimes m$ teljesül, ahol δ a Kronecker-delta. Ekkor képezhetjük a következő leképezéseket:

$$\mathbf{G} : \mathbb{R}^4 \to \mathbf{M} \qquad \mathbf{G}(\tau, x, y, z) = o + \tau w + x e_1 + y e_2 + z e_3 \tag{1.2}$$

$$\mathbf{c} : \mathbb{R} \to \mathbf{I} \qquad \mathbf{c}(\tau) = \mathbf{t}(o) + \tau s \tag{1.3}$$

$$d : \mathbb{R} \to D \qquad d(\lambda) = \lambda m \tag{1.4}$$

Ezekre a definícióban megkövetelt tulajdonságok teljesülnek, tehát $\mathbf{G}$ valóban izomorfizmus. $\square$

Ha egy tetszőleges téridő és a standard téridő között rögzítünk egy konkrét izomorfizmust, az fizikailag a következőket jelenti:

1. választunk egy távolság- és egy időegységet (mértékegység), a távolságokat és időtartamokat ezek többszöröseiként fejezünk ki

2. választunk egy origót, azaz a téridő egy kitüntetett pontját
3. az origóval egyidejű események terében választunk három páronként egymásra merőleges irányt (a koordinátatengelyek pozitív felét)
4. választunk egy sebességet: az ilyen sebességű pontok (x, y, z) koordinátája időben állandó.

Egy tömegpont mozgását úgy tudjuk jellemezni, hogy megadjuk a téridő azon pontjait, ahol (és amikor) a test jelen van. Ezen pontok között nem lehetnek egyidejűek, tehát azt is megtehetjük, hogy $\mathbf{I}$ egy részhalmazán megadunk egy leképezést az $\mathbf{M}$ térbe, ami a $\mathbf{t}$ leképezéssel komponálva a részhalmaz identitását adja. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy ez a részhalmaz az egész $\mathbf{I}$.

A pont mozgása tehát azonosítható egy $x : \mathbf{I} \to \mathbf{M}$ leképezéssel, amire $\mathbf{t} \circ x = \mathrm{id}_{\mathbf{I}}$. Azt is feltesszük, hogy x kétszer folytonosan differenciálható. x képét a tömegpont *világvonalának* nevezzük.

1.1.5. Példa. x pontosan akkor ír le egyenes vonalú egyenletes mozgást, ha affin leképezés.

Ha $x : \mathbf{I} \to \mathbf{M}$ világvonal, akkor jelölje $\dot{x} : \mathbf{I} \to M \otimes I^*$ a deriváltfüggvényét. A $\mathbf{t} \circ x = \mathrm{id}_{\mathbf{I}}$ egyenlőség mindkét oldalát deriválva adódik, hogy $\tau \in \mathbf{I}$ esetén $\dot{x}(\tau) \in (t \otimes \mathrm{id}_{I^*})^{-1}(\mathrm{id}_I) =: \mathbf{V}(\mathbf{M})$. Az utóbbi halmaz elemei a *sebességek*.

Vegyük észre, hogy a sebességek terén nincsen belső szorzat, így a sebesség nagysága vagy két sebesség által bezárt szög nem értelmes. Viszont két sebesség különbsége $E \otimes I^*$ eleme, így ezeknek létezik egy ($D \otimes D \otimes I^* \otimes I^*$ értékű) belső szorzata. Hasonlóan létezik a második deriváltak (azaz a gyorsulások) terén is belső szorzat, ez a tér azonosítható az $E \otimes I^* \otimes I^*$ térrel.

Speciálisan a standard téridőn egyszerűbb objektumokkal is dolgozhatunk. Nem nehéz látni, hogy ezen a világvonalak és az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ kétszer folytonosan differenciálható függvények között bijekciót lehet megadni. Ha $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ilyen, akkor $x(\tau) := (\tau, \xi(\tau)) \in \mathbb{R}^4$ világvonal (az $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$ felbontás szerinti blokk-vektor alakban). $\mathbf{V}(\mathbb{R}^4)$ ezek deriváltjaiból áll, tehát $\mathbb{R}^4$ azon elemeiből, amelyek első koordinátája 1, a pillanatnyi sebesség másik három koordinátája pedig ξ deriváltja.

A téridő struktúrája kitünteti $\mathbf{M}$ affin transzformációinak egy csoportját, a Galilei-csoportot. Ezt a tér- és időbeli eltolások, a tér forgatásai és a „Galilei-boost” leképezések generálják. Az utóbbira úgy gondolhatunk, hogy egy adott eseménnyel egyidejű pontokat fixen hagyunk, de a sebességeket egy adott konstanssal megváltoztatjuk.

1.1.6. Definíció. Ha $\mathbf{M}$ téridő, akkor $\mathrm{G}(\mathbf{M})$ jelölje azon $\mathbf{g} : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ ($g : M \to M$ felett) affin bijekciók halmazát, amelyre a következők teljesülnek:

1. $t \circ g = t$
2. $g|_E$ irányítástartó izometria.

$\mathrm{G}(\mathbf{M})$ az $\mathbf{M}$ *Galilei-csoportja.*

A definícióban a $g|_E$ leképezésre kirótt követelmény értelmes, mivel $t \circ g = t$ alapján $g(E) = E$.

A $\mathrm{G}(\mathbf{M})$ csoportra úgy is gondolhatunk, mint absztrakt Lie-csoport, amely kitüntetett módon hat affin bijekciókkal az $\mathbf{M}$ téren. Ha $\mathbf{g} \in \mathrm{G}(\mathbf{M})$, akkor létezik egy egyértelmű $\mathbf{f} : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ affin bijekció, amire $\mathbf{t} \circ \mathbf{g} = \mathbf{f} \circ \mathbf{t}$. a $\mathbf{g} \mapsto \mathbf{f}$ hozzárendelés csoport-homomorfizmus.

Ennek segítségével megadhatjuk $\mathrm{G}(\mathbf{M})$ egy hatását a világvonalakon is, ha az x világvonalhoz a $\mathbf{g} \cdot x := \mathbf{g} \circ x \circ \mathbf{f}^{-1}$ világvonalat rendeljük. A Galilei-csoport jelentőségét az adja, hogy ha $x_1, \ldots, x_n$ olyan világvonalak összessége, amik által leírt mozgások együttes bekövetkezését a fizika törvényei lehetővé teszik, akkor ez a $\mathbf{g} \cdot x_1, \ldots, \mathbf{g} \cdot x_n$ világvonalakra is igaz. Ez a *Galilei-féle relativitási elv.*

1.1.7. Állítás. *Ha* $\mathbf{G} : \mathbf{M}_1 \to \mathbf{M}_2$ *izomorfizmus,* $\mathbf{g} \in \mathrm{G}(\mathbf{M}_1)$*, akkor* $\mathbf{G} \circ \mathbf{g} \circ \mathbf{G}^{-1} \in \mathrm{G}(\mathbf{M}_2)$. *Az így kapott* $\mathrm{G}(\mathbf{M}_1) \to \mathrm{G}(\mathbf{M}_2)$ *leképezés csoport-izomorfizmus.*

Bizonyítás. A $\mathbf{g} \mapsto \mathbf{G} \circ \mathbf{g} \circ \mathbf{G}^{-1}$ leképezés invertálható és kompozíciót kompozícióba visz, tehát elég az első állítást belátni.

Legyen $\mathbf{c} : \mathbf{I}_1 \to \mathbf{I}_2$ és $d : D_1 \to D_2$ az izomorfizmus definíciójában szereplő tulajdonságú leképezések. Ekkor $\mathbf{c} \circ \mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2 \circ \mathbf{G}$ miatt $c \circ t_1 = t_2 \circ G$ is igaz, így ha $\mathbf{g} \in \mathrm{G}(\mathbf{M}_1)$, akkor $t_1 \circ g = t_1$ alapján

$$
\begin{aligned}
t_2 \circ (G \circ g \circ G^{-1}) &= c \circ t_1 \circ g \circ G^{-1} \\
&= c \circ t_1 \circ G^{-1} \\
&= c \circ c^{-1} \circ t_2 \\
&= t_2.
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

$G(E_1) = E_2$ miatt $G \circ g \circ G^{-1}\big|_{E_2} = G|_{E_1} \circ g|_{E_1} \circ G|_{E_1}^{-1}$, így mivel $G|_{E_1}$ irányítástartó, $G \circ g \circ G^{-1}\big|_{E_2}$ is az. Másrészt ha $u, v \in E_2$, akkor

$$
\begin{aligned}
\langle (G \circ g \circ G^{-1})u, (G \circ g \circ G^{-1})v \rangle_2 &= d \otimes d(\langle g(G^{-1}u), g(G^{-1}v) \rangle_1) \\
&= d \otimes d(\langle G^{-1}u, G^{-1}v \rangle_1) \\
&= \langle u, v \rangle_1,
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

tehát $G \circ g \circ G^{-1}\big|_{E_2}$ izometria. □

Az viszont nem igaz, hogy minden $\mathbf{M} \to \mathbf{M}$ izomorfizmus $\mathrm{G}(\mathbf{M})$ eleme. Ez pontosan akkor teljesül, ha $c = \mathrm{id}_I$ és $d = \mathrm{id}_E$.

Az 1.1.4 és az 1.1.7 állítások alapján elegendő a standard téridő Galilei-csoportját meghatározni.

1.1.8. Állítás. $\mathbf{g} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *pontosan akkor automorfizmusa a standard téridőnek, ha létezik olyan* $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *lineáris leképezés és* $b \in \mathbb{R}^4$ *vektor, amire* $\mathbf{g}(x) = Ax + b$*, és* A *blokk-mátrix alakja az* $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$ *felbontásban*

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & O \end{bmatrix},
\tag{1.7}
$$

ahol $O \in \mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$*.*

Bizonyítás. Ha $\mathbf{g}$ automorfizmus, akkor affin leképezés, tehát létezik $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineáris leképezés és $b \in \mathbb{R}^4$, amivel $\mathbf{g}(x) = Ax + b$. Írjuk az előbbit blokkmátrix alakba

$$
A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},
\tag{1.8}
$$

módon az $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$ felbontás szerint. t mátrixa $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, így a $t \circ g = t$ feltétel azt jelenti, hogy

$$\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\end{bmatrix}, \tag{1.9}$$

tehát $A_{11} = 1$ és $A_{12} = 0$. Másrészt $g|_E$ mátrixa A_{22}, tehát ennek valóban $\mathrm{SO}(3, \mathbb{R})$ egy elemének kell lennie.

A gondolatmenetből az is látszik, hogy az összes ilyen alakú A tetszőleges b mellett automorfizmust ad meg. $\square$

1.2. Pontrendszerre vonatkozó Newton-egyenlet

Az előző szakaszban a téridővel és a mozgások kinematikai leírásával foglalkoztunk. Most rátérünk annak vizsgálatára, hogy milyenek a ténylegesen megvalósuló mozgások. Ehhez több tömegpont világvonalát kell együttesen vizsgálnunk. Az első gondolatunk az lehet, hogy ezt egy $x : \mathbf{I} \to \mathbf{M}^n$ leképezéssel célszerű azonosítani, de nem ez a legtermészetesebb választás, hiszen a különböző pontok világvonalait ugyanazzal a közös idővel paraméterezzük. Például a standard téridő használata mellett ez úgy jelentkezne, hogy $x(t)$ koordinátái közül n darab egyenlő lenne t-vel. Ehelyett elegendő a téridők szorzatának egy affin alterét tekinteni:

1.2.1. Definíció. Legyen $(\mathbf{M}, \mathbf{I}, \mathbf{t}, D, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ téridő. Ekkor n pont *együttes térideje* az

$$\mathbf{M}(n) := \{(m_1, \ldots, m_n) | \mathbf{t}(m_1) = \cdots = \mathbf{t}(m_n)\} \tag{1.10}$$

tér. Erre kiterjeszthető a $\mathbf{t}$ leképezés $\mathbf{t}(m_1, \ldots, m_n) := \mathbf{t}(m_1)$ módon.

Egy $x : \mathbf{I} \to \mathbf{M}(n)$ leképezés n pont *együttes világvonala*, ha kétszer folytonosan differenciálható és $\mathbf{t} \circ x = \mathrm{id}_{\mathbf{I}}$.

Vegyük észre, hogy a $\mathrm{G}(\mathbf{M})$ csoport hat $\mathbf{M}(n)$-en is $\mathbf{g} \cdot (m_1, \ldots, m_n) = (\mathbf{g}(m_1), \ldots, \mathbf{g}(m_n))$ módon, és az együttes világvonalakon is a világvonalakhoz hasonlóan.

Egy együttes világvonal deriváltja olyan n-es, amelynek minden eleme $\mathbf{V}(\mathbf{M})$ eleme, tehát $\dot{x} : \mathbf{I} \to \mathbf{V}(\mathbf{M})^n$.

A mozgások dinamikai vizsgálatának kiindulópontja a Newton-egyenlet. Ez azt a kísérleti tényt rögzíti, hogy egy pontrendszer mozgása másodrendű explicit differenciálegyenletet elégít ki, azaz a gyorsulások kifejezhetőek a helyek és sebességek, valamint az idő függvényében. Pontosabban: az egyes testekre ható erő függ ezektől, míg az erő és egy az adott testre jellemző állandó, a tömeg hányadosa a gyorsulás. A továbbiakban F egy egydimenziós irányított vektorteret jelöl ($\mathbb{R}$ felett). Az I és a D terekhez hasonlóan ennek is mindössze annyi a szerepe, hogy hangsúlyozza azt a tényt, hogy távolságokat vagy időtartamokat nem lehet erőkkel összehasonlítani.

1.2.2. Definíció. Egy $f : \mathbf{M}(n) \times (\mathbf{V}(\mathbf{M})^n) \to (E \otimes D^* \otimes F)^n$ folytonos függvényt *erőtörvénynek* nevezünk.

Legyenek adottak az $m_1, \ldots, m_n \in F \otimes D^* \otimes I \otimes I$ pozitív elemek. Azt mondjuk, hogy az $x = (x_1, \ldots, x_n)$ együttes világvonal kielégíti a *Newton-egyenletet* az $m_1, \ldots, m_n$ *tömegekkel*, ha minden $\tau \in \mathbf{I}$ esetén

$$f(x(\tau), \dot{x}(\tau)) = (m_1 \ddot{x}_1, \ldots, m_n \ddot{x}_n) \tag{1.11}$$

A továbbiakban a téridőn mindig választunk egy koordinátarendszert, azaz rögzítünk egy $\mathbf{M} \to \mathbb{R}^4$ izomorfizmust a standard téridővel. Ez indukál egy koordinátaválasztást $\mathbf{M}(n)$-en és a $\mathbf{V}(\mathbf{M})$ téren is. Egy világvonal ugyanis ilyenkor megadható egy $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3n}$, $\xi(\tau) = (\xi_1(\tau), \ldots, \xi_n(\tau))$ leképezéssel, ahol $\xi_i(\tau) \in \mathbb{R}^3$. Ekkor $\dot{\xi} \in \mathbf{V}(\mathbf{M})^n = \mathbb{R}^{3n}$ írható, és hasonlóan $\dot{\xi}_i \in \mathbb{R}^3$. Ha emellett az $F = \mathbb{R}$ választással is élünk, akkor $m_i \in \mathbb{R}$ és $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}^{3n}$, és a Newton-egyenlet egy $3n$ változós közönséges differenciál-egyenlet lesz a ξ_i függvények komponenseire nézve:

$$\begin{aligned} f_1(\tau, \xi_1(\tau), \ldots, \xi_n(\tau), \dot{\xi}_1(\tau), \ldots, \dot{\xi}_n(\tau)) &= m_1 \ddot{\xi}_1(\tau) \\ &\vdots \\ f_n(\tau, \xi_1(\tau), \ldots, \xi_n(\tau), \dot{\xi}_1(\tau), \ldots, \dot{\xi}_n(\tau)) &= m_n \ddot{\xi}_n(\tau) \end{aligned} \tag{1.12}$$

Ha az erőtörvény tetszőleges lehetne, akkor a klasszikus mechanika nem nagyon különbözne a közönséges differenciálegyenletek elméletétől. A tapasztalat azonban azt mutatja, hogy a ténylegesen előforduló erőtörvények alakja nagyon speciális. Az egyik alapvető feltétel, aminek eleget tesznek, az a már említett Galilei-féle relativitási elv, ami koordinátás alakban úgy fejezhető ki, hogy az f_i függvények értéke

1. nem változik, ha az első argumentumot megváltoztatjuk
2. nem változik, ha a következő n (vektor-)argumentumhoz ugyanazt a b vektort adjuk
3. nem változik, ha az utolsó n (vektor-)argumentumhoz ugyanazt a v vektort adjuk
4. az O transzformáció szerint változik, ha minden vektorargumentumot ugyanezzel az $O \in \mathrm{SO}(3)$ elemmel transzformáljuk.

Fontos azonban megjegyezni, hogy a gyakorlatban mégis érdemes olyan erőtörvényekkel foglalkozni, amelyekre ezek a szimmetriák nem, vagy csak részben teljesülnek. Ennek oka, hogy ilyen egyenletrendszerekhez juthatunk valódi fizikai rendszerek limeszeként. Egy egyszerű példa a földfelszín egy pontjának közelében lévő (kisméretű) test mozgása, a szabadesés, aminek során a Föld elmozdulása elhanyagolható, de ha azt a leírásból eltávolítjuk, akkor a testre állandó lefelé mutató erő hat, ami nyilvánvalóan nem forgásszimmetrikus. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a Galilei-féle relativitási elv zárt rendszerekre vonatkozik, de a gyakorlatban fontosak az olyan rendszerek is, amelyek még közelítőleg sem zártak.

Egy erőtörvényt *konzervatívnak* nevezünk, ha létezik olyan $U : \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, amivel $f(\tau, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) = -\operatorname{grad} U(x_1, \ldots, x_n)$. Az ilyen tulajdonságú erőtörvények azért érdekesek, mert a hozzájuk tartozó Newton-egyenlet megoldásainak állandó az energiája:

1.2.3. Állítás. *Legyen $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3n} \times \mathbb{R}^{3n} \to \mathbb{R}^{3n}$ konzervatív erőtörvény, $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3n}$ a megfelelő Newton-egyenlet megoldása $m_1, \ldots, m_n$ tömegekkel. Tekintsük az*

$$E(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i^2 + U(x_1, \ldots, x_n) \tag{1.13}$$

függvényt. Ekkor $E \circ \xi$ konstans.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}E(\xi(\tau)) &= \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\xi}_i(\tau)\ddot{\xi}_i(\tau) + \sum_{i=1}^{n}(\operatorname{grad}_{x_i} U)(\xi(\tau))\dot{\xi}_i(\tau) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(m_i\ddot{\xi}_i(\tau) - f_i(\tau,\xi(\tau),\dot{\xi}(\tau))\right)\dot{\xi}_i(\tau) = 0\end{aligned} \tag{1.14}$$

□

Az ehhez hasonló megmaradási tételek kereséséhez nyújtanak segítséget a mechanika különféle átfogalmazásai. Ezek eredeti formájukban a Newton-egyenlettel ekvivalens egyenletrendszerek, ám jelentős általánosításra adnak lehetőséget.

1.3. Hamilton-elv, Euler-Lagrange egyenletek

Ebben a szakaszban a Newton-egyenlet megoldásainak egy történeti szempontból fontos jellemzéséről, a *Hamilton-elvről* lesz szó. Ennek lényege, hogy megadható a lehetséges világvonalak terén egy olyan funkcionál, a *hatás*, amelynek a stacionárius pontjai éppen a mozgásegyenlet megoldásai. Példaként az egydimenziós $m\ddot{x}(t) = -U'(x(t))$ egyenletet vegyük, és vezessük be az $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$L(\xi, v) = \frac{m}{2}v^2 - U(\xi) \tag{1.15}$$

Lagrange-függvényt. Ekkor a hatás

$$S(x) = \int_{t_1}^{t_2} L(x(t), \dot{x}(t))\,\mathrm{d}t \tag{1.16}$$

alakú, ahol x olyan differenciálható függvény, amire $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$ valamilyen rögzített x_1, x_2, t_1, t_2 értékekre.

Az olyan problémákkal, amelyekben a fentihez hasonló integrálként kifejezhető funkcionál szélsőértékeit keressük egy alkalmas függvényosztályon belül, a variációszámítás foglalkozik. A klasszikus módszer szerint ehhez először a funkcionál stacionárius pontjait keressük, hasonlóan a többváltozós analízisben megszokott szélsőértékkereséséhez. Az általános megfogalmazáshoz vezessünk be egy jelölést:

1.3.1. Definíció. Ha $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}$, akkor legyen

$$C^r([t_1,t_2],\mathbb{R}^n,x_1,x_2) = \{f \in C^r([t_1,t_2],\mathbb{R}^n) | f(t_1) = x_1, f(t_2) = x_2\}\,. \tag{1.17}$$

Világos, hogy ha $f \in C^r([t_1,t_2],\mathbb{R}^n,x_1,x_2)$, akkor $f + C^r([t_1,t_2],\mathbb{R}^n,0,0) = C^r([t_1,t_2],\mathbb{R}^n,x_1,x_2)$, így $C^r([t_1,t_2],\mathbb{R}^n,x_1,x_2)$ affin tér a $C^r([t_1,t_2],\mathbb{R}^n,0,0)$ Banach-tér felett. Emiatt értelmes egy $S : C^r([t_1,t_2],\mathbb{R}^n,x_1,x_2) \to \mathbb{R}$ funkcionál differenciálhatóságáról beszélni.

1.3.2. Állítás. *Legyen $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^2-függvény és $r \geq 1$ egész. Ekkor az $S : C^r([t_1,t_2],\mathbb{R}^n,x_1,x_2) \to \mathbb{R}$*

$$S(f) = \int_{t_1}^{t_2} L(f(t), \dot{f}(t))\,\mathrm{d}t \tag{1.18}$$

funkcionál minden pontban Fréchet-differenciálható, és a derivált az f pontban

$$DS(f)h = \int_{t_1}^{t_2} DL(f(t), \dot{f}(t)) \cdot (h(t), \dot{h}(t))\, \mathrm{d}t. \tag{1.19}$$

Bizonyítás. Mivel L kétszer folytonosan differenciálható, a többváltozós Taylor-formula alapján $\epsilon > 0$ esetén található olyan $M : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amivel $|a_1|, |a_2| < \epsilon$ esetén

$$|L(x_1+a_1, x_2+a_2) - L(x_1, x_2) - DL(x_1, x_2) \cdot (a_1 + a_2)| \leq M(x_1, x_2)(|a_1| + |a_2|)^2 \tag{1.20}$$

teljesül (ilyen konkrét M felírható L második deriváltjainak az argumentum egy környezetében vett szuprémumai segítségével). Ezt felhasználva $\|h\|_{C^1} < \epsilon$ esetén

$$\begin{aligned}
&\left| S(f+h) - S(f) - \int_{t_1}^{t_2} DL(f(t), \dot{f}(t) \cdot (h(t), \dot{h}(t))\, \mathrm{d}t \right| \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} \left| L(f(t) + h(t), \dot{f}(t) + \dot{h}(t)) - L(f(t), \dot{f}(t)) - DL(f(t), \dot{f}(t) \cdot (h(t), \dot{h}(t)) \right| \mathrm{d}t \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} M_f (|h(t)| + |\dot{h}(t)|)^2\, \mathrm{d}t \leq (t_2 - t_1) M_f \|h\|_{C^1}^2 ,
\end{aligned} \tag{1.21}$$

ahol

$$M_f = \sup_{t \in [t_1, t_2]} M(f(t), \dot{f}(t)). \tag{1.22}$$

Osszuk el az egyenlőtlenséget a $\|h\|_{C^r}$ normával, majd használjuk, hogy $\|h\|_{C^1} \leq \|h\|_{C^r}$, és így mindegyik hányados 0-hoz tart amint $\|h\|_{C^r} \to 0$. ☐

Ha $r \geq 2$, akkor a deriváltat átírhatjuk parciális integrálás segítségével:

$$\begin{aligned}
DS(f)h &= \int_{t_1}^{t_2} \left[D_{x_1} L(x_1, x_2)\big|_{\substack{x_1 = f(t) \\ x_2 = \dot{f}(t)}} \cdot h(t) + D_{x_2} L(x_1, x_2)\big|_{\substack{x_1 = f(t) \\ x_2 = \dot{f}(t)}} \cdot \dot{h}(t) \right] \mathrm{d}t \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left[D_{x_1} L(x_1, x_2)\big|_{\substack{x_1 = f(t) \\ x_2 = \dot{f}(t)}} - \frac{d}{dt} \left(D_{x_2} L(x_1, x_2)\big|_{\substack{x_1 = f(t) \\ x_2 = \dot{f}(t)}} \right) \right] \cdot h(t)\, \mathrm{d}t,
\end{aligned} \tag{1.23}$$

ahol felhasználtuk, hogy $h \in C^r([t_1, t_2], \mathbb{R}^n, 0, 0)$ miatt

$$\left[D_{x_2} L(x_1, x_2)\big|_{\substack{x_1 = f(t) \\ x_2 = \dot{f}(t)}} \cdot h(t) \right]_{t=t_1}^{t=t_2} = 0. \tag{1.24}$$

A hatásnak ott van stacionárius pontja, ahol minden h esetén $DS(f)h = 0$. De ha egy folytonos függvényt bármely h-val szorozva és integrálva 0-t kapunk, akkor a függvény azonosan 0, így a hatás stacionárius pontjai pontosan az alábbi egyenletrendszer megoldásai:

$$D_{x_1} L(x_1, x_2)\big|_{\substack{x_1 = f(t) \\ x_2 = \dot{f}(t)}} - \frac{d}{dt} \left(D_{x_2} L(x_1, x_2)\big|_{\substack{x_1 = f(t) \\ x_2 = \dot{f}(t)}} \right) = 0. \tag{1.25}$$

Ezek az *Euler-Lagrange-egyenletek.*

1.3.3. Példa. Példaként tekintsük az 1.15 egyenletben szereplő Lagrange-függvényt. Ekkor az első változó szerinti derivált $(\xi, v) \mapsto -U'(\xi)$, a második szerinti pedig $(\xi, v) \mapsto mv$, így az egyenlet

$$0 = -U'(f(t)) - \frac{d}{dt} m\dot{f}(t) = -U'(f(t)) - m\ddot{f}(t), \tag{1.26}$$

ami valóban az egydimenziós U potenciálban mozgó tömegpontra vonatkozó Newton-egyenlet.

1.3.4. Példa. Legyen most $n = 1$, $L(\xi, v) = \sqrt{1 + v^2}$. Ekkor $S(f)$ az f grafikonjának hossza, az Euler-Lagrange egyenlet

$$0 = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{f}}{\sqrt{1+\dot{f}^2}}\right) = -\frac{\ddot{f}}{(1+\dot{f}^2)^{3/2}}, \tag{1.27}$$

ami azzal ekvivalens, hogy $\ddot{f} = 0$, vagyis az egyetlen megoldás az egyenes.

A Hamilton-elv egyik fontos tulajdonsága az, hogy ebben az alakban könnyű áttértni Descartes-koordinátákról tetszőleges görbevonalú koordinátarendszerre. Ennek belátásához legyen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diffeomorfizmus, és tekintsük a $\Phi : C^r([t_1, t_2], \mathbb{R}^n, \varphi^{-1}(x_1), \varphi^{-1}(x_2)) \to C^r([t_1, t_2], \mathbb{R}^n, x_1, x_2)$, $\Phi(f) = \varphi \circ f$ leképezést. Ha tudnánk, hogy $D\Phi$ invertálható, akkor

$$D(S \circ \Phi)(x) = DS(\varphi \circ x)D\Phi(x) \tag{1.28}$$

alapján $\varphi \circ x$ pontosan akkor lenne S stacionárius pontja, ha x $S \circ \Phi$ stacionárius pontja. Az utóbbi funkcionál

$$(S \circ \Phi)(x) = \int_{t_1}^{t_2} L(\varphi(x(t)), D\varphi(x(t)) \cdot \dot{x}(t))\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \tilde{L}(x(t), \dot{x}(t))\,\mathrm{d}t, \tag{1.29}$$

ahol $\tilde{L}(x, v) = L(\varphi(x), D\varphi(x) \cdot v)$, tehát ugyanolyan alakú, mint az eredeti hatás, csak L argumentumait kell transzformálni.

Most belátjuk, hogy Φ differenciálható leképezés.

1.3.5. Állítás. *Ha $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diffeomorfizmus, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}$, akkor $\Phi : C^r([t_1, t_2], \mathbb{R}^n, \varphi^{-1}(x_1), \varphi^{-1}(x_2)) \to C^r([t_1, t_2], \mathbb{R}^n, x_1, x_2)$, $\Phi(f) = \varphi \circ f$ mindenhol differenciálható.*

Bizonyítás. Mivel a jelöléseket egyszerűbbé teszi, de a gondolatmenetet nem befolyásolja, az $n = 1$ esetre szorítkozunk. Azt fogjuk belátni, hogy az x pontban a derivált

$$(D\Phi(x)h)(t) = \varphi'(x(t))h(t). \tag{1.30}$$

Ehhez a

$$\|\Phi(x + h) - \Phi(x) - (\varphi' \circ x)h\|_{C^r} \tag{1.31}$$

normát kellene $\|h\|_{C^r}$-ban lineárisnál gyorsabban eltűnő függvénnyel becsülni. Felhasználjuk, hogy

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\varphi(x(t) + h(t)) - \varphi(x(t)) - \varphi'(x(t))h(t)\right]\\ &= (x'(t) + h'(t))\left[\varphi'(x(t) + h(t)) - \varphi'(x(t)) - \varphi''(x(t))h(t)\right] + h(t)h'(t)\varphi''(x(t))\end{aligned} \tag{1.32}$$

amiből indukcióval adódik, hogy a k. derivált a következő alakú kifejezések összege:

1. $x(t)+h(t)$ első k deriváltjainak egy polinomja megszorozva egy $\varphi^{(j)}(x(t)+h(t)) - \varphi^{(j)}(x(t)) - \varphi^{(j+1)}(x(t))h(t)$ alakú kifejezéssel, ahol $j \leq k$

2. $h(t)$ deriváltjainak másodfokú homogén polinomja szorozva $x(t)+h(t)$ deriváltjainak egy polinomjával megszorozva $\varphi^{(j)}(x(t))$ valamely deriváltjával, x és h legmagasabb rendű deriváltja legfeljebb k.

A második típusú tagok normáját felülről becsülhetjük egy x-től függő konstansszor $\|h\|^2_{C^r}$ értékével, így elég az első típussal foglalkozni. Mivel φ sima, a Taylor-formula alapján minden $\varepsilon > 0$ mellett létezik olyan M_x, hogy $\|h\|_{C^0}$ esetén

$$\left|\varphi^{(j)}(x(t)+h(t)) - \varphi^{(j)}(x(t)) - \varphi^{(j+1)}(x(t))h(t)\right| \leq M_x \|h\|^2_{C^0}, \tag{1.33}$$

tehát szintén legalább másodrendben eltűnik. □

Mivel $\Phi^{-1}(f) = \varphi^{-1} \circ f$ is ilyen típusú leképezés, a derivált inverze is létezik.

A Lagrange-függvény egyszerű transzformációs szabálya azt sugallja, hogy a Hamilton-elv különösen alkalmas a mozgásegyenletek sokaságokra való általánosítására. Ha ugyanis Q sima sokaság és $L : TQ \to \mathbb{R}$, akkor lokális koordinátákban felírhatjuk az Euler-Lagrange-egyenleteket és ha annak egy tetszőleges megoldását egy másik kompatibilis térképre átvisszük, akkor az új koordinátákban felírt Euler-Lagrange-egyenletek megoldásához jutunk.

Az ilyen irányú általánosítás mögött az a motiváció, hogy az erőtörvény gyakran felbontható *szabad erők* és *kényszererők* összegére, ahol az utóbbiak jellemzője az, hogy valamilyen geometriai feltétel állandó teljesülését garantálják, amely a tömegpontok helyzetei között fennáll.

1.3.6. Példa. Ha egy rögzített egyenes drótra gyöngyöt fűzünk, akkor a gyöngy szabadon elmozdulhat a drót mentén, de a rá merőleges irányokban nem. Ezt az biztosítja, hogy a drót mindig olyan erőt fejt ki, hogy az eredő a dróttal párhuzamos legyen.

1.3.7. Példa. Ha az asztallapra valamilyen tárgyat helyezünk, a Föld tömegvonzása miatt függőlegesen lefelé mutató erő hat rá. Az asztallap eközben ennek az erőnek az ellentettjét fejti ki, ami éppen elegendő ahhoz, hogy a tárgy ne jusson át az asztal síkján. Ha a tárgyat még kezünkkel is lefelé nyomjuk, az asztallap nagyobb erőt fejt ki, továbbra is éppen akkorát, ami kényszerfeltétel teljesüléséhez szükséges. Másfelől az asztal nem akadályozza meg, hogy a tárgyat felemeljük, és ezután már nem fejt ki erőt rá.

1.3.8. Példa. Legyen most az asztallapon lévő tárgy gömb alakú, és tegyük fel, hogy a mozgás során tisztán gördül, azaz nem csúszik meg[2] Ekkor a gömböt az asztal bármely pontjára bármilyen orientációban eljuttathatjuk, de a tömegközéppont sebessége meghatározza a forgás irányát és szögsebességét.

Vegyük észre, hogy a példában szereplő kényszererők különböző típusúak. Az első és harmadik esetben bármely helyzetében a megengedett sebességek vektorteret alkotnak, míg az második példában az asztal felületén lévő tárgy megengedett sebességei egy féltérbe esnek, a tárgyat felemelve pedig a kényszer megszűnik. Ezen kívül az első példában a kényszert megfogalmazhatjuk egy

[2] A mindenkori érintkezési pont sebessége megegyezik az asztallap sebességével.

olyan egyenlőség formájában, ami a helykoordinátákat tartalmazza, míg a többi példában ilyen megfogalmazás nem létezik. Mi csak az első típusú kényszerrel fogunk foglalkozni, az ilyeneket *holonom kényszernek* nevezzük.

A következőkben azt mutatjuk meg, hogy az ilyen kényszererőkre úgy is gondolhatunk, mint konzervatív erők „limeszére”. Ehhez legyen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sima függvény, amivel a kényszer $\varphi(x(t)) = 0$ alakba írható. Tegyük fel, hogy a 0 φ egy reguláris értéke, és a kezdeti feltételre $\varphi(x(0)) = 0$ és $\operatorname{grad}\varphi(x(0)) \cdot \dot{x}(0) = 0$ teljesül. Legyen a Lagrange-függvény a következő alakú:

$$L_\alpha(x, v) = \frac{1}{2}\langle v, M(x)v\rangle - U(x) - \frac{\alpha}{2}\varphi(x)^2, \tag{1.34}$$

ahol $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ adott sima függvény (potenciál), $\alpha \geq 0$ és $M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ minden pontban pozitív definit mátrix. Itt α a kényszer „erősségét” jelenti: azt várjuk, hogy ha α nagy, akkor a megoldás nem tud nagyon eltávolodni a $\varphi(x) = 0$ hiperfelülettől. M a tömeg szerepét játssza a kinetikus energiatagban. Ha például $\mathbb{R}^n$ egy dimenzióban n darab tömegpont konfigurációs terét jelenti, akkor M diagonális, míg ha n dimenzióban egyetlen tömegpontot tekintünk, akkor M az egységmátrix többszöröse. Mivel a számolást nem nehezíti, megengedünk tetszőleges sima pozitív definit értékű függvényt.

Azt szeretnénk megmutatni, hogy $\alpha \to \infty$ esetén a mozgásnak létezik limesze és mindvégig a hiperfelületen tartózkodik. Ehhez először áttérünk egy görbevonalú koordinátarendszerre, ami a további számolást megkönnyíti. Vegyük a $\varphi^{-1}(0)$ hiperfelület egy tetszőleges $\psi : D \to \mathbb{R}^n$ paraméterezését a kezdeti feltétel közelében, feltehető, hogy $0 \in D \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, $x(0) = \psi(0)$. Ha $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in D$, akkor a $\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ pontból indulva kövessük φ gradiensét az M metrika szerint. Így egy $\gamma_{(x_1,\ldots,x_{n-1})}$ görbét kapunk, amelyet átparaméterezhetünk olyan módon, hogy $\varphi(\gamma_{(x_1,\ldots,x_{n-1})}(t)) = t$ teljesüljön. Az új koordinátarendszer legyen ezzel $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \gamma_{(x_1,\ldots,x_{n-1})}(x_n)$[3].

A koordinátatranszformáció során a Lagrange-függvény is megváltozik, de továbbra is 1.34 alakú. A koordináták speciális megválasztása miatt ezúttal $M_{in}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = 0$ ha $i < n$ és $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_n$. A kényszer a mozgást arra az altérre korlátozza, ahol az utolsó koordináta 0, jelölje ezt $\mathbb{R}^{n-1}$, és vezessük be az $L_\infty : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$

$$L_\infty(x, v) = \frac{1}{2}\langle v, M(x)v\rangle - U(x) \tag{1.35}$$

Lagrange-függvényt, ami tehát $\mathbb{R}^{n-1} \leq \mathbb{R}^n$ miatt értelmes.

Mivel a kezdeti feltétel $x(0) = 0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ és $\dot{x}(0) \in \mathbb{R}^{n-1}$, tekinthetjük az L_α és L_∞ Lagrange-függvényekhez tartozó Euler-Lagrange-egyenletek (lokális) megoldásait ilyen kezdeti feltételek mellett. Jelölje ezeket rendre x_α és x_∞.

1.3.9. Állítás. *A 0 egy alkalmas környezetében $x_\alpha \to x_\infty$ és $\dot{x}_\alpha \to \dot{x}_\infty$ egyenletesen amint $\alpha \to \infty$.*

Bizonyítás. Az M_{ij} komponensfüggvényekkel felírva a Lagrange-függvény

$$L_\alpha(x, v) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} M_{ij}(x)v_iv_j - U(x) - \frac{\alpha}{2}x_n^2. \tag{1.36}$$

[3] Az origóban a leképezés deriváltja invertálható, így annak egy környezetében diffeomorfizmus.

Az ebből származó Euler-Lagrange-egyenletek ($k = 1, \ldots, n$)

$$\begin{aligned}
0 = &\frac{\partial}{\partial x_k} L_\alpha(x,v)\Big|_{\substack{x=x_\alpha(t)\\ v=\dot{x}_\alpha(t)}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial v_k} L_\alpha(x,v)\Big|_{\substack{x=x_\alpha(t)\\ v=\dot{x}_\alpha(t)}}\right) \\
=&\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial M_{ij}(x)}{\partial x_k}\Big|_{x=x_\alpha(t)} \dot{x}_{\alpha,i}(t)\dot{x}_{\alpha,j}(t) + F_k(x_\alpha(t)) - \delta_{kn}\alpha x_n(t) \qquad (1.37)\\
&- \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} M_{ij}(x_\alpha(t))(\delta_{ik}\dot{x}_{\alpha,j}(t) + \dot{x}_{\alpha,i}(t)\delta_{jk})\right),
\end{aligned}$$

ahol $F_i(x) = -\frac{\partial}{\partial x_i} U(x)$. Vezessük be a

$$\Gamma_{kij}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial M_{kj}(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial M_{ik}(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial M_{ij}(x)}{\partial x_k}\right) \tag{1.38}$$

jelölést. Ezzel a mozgásegyenet átírható

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ki}(x_\alpha(t))\ddot{x}_{\alpha,i}(t) = F_k(x_\alpha(t)) - \delta_{kn}\alpha x_{\alpha,n}(t) - \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{kij}(x_\alpha(t))\dot{x}_{\alpha,i}(t)\dot{x}_{\alpha,j}(t) \tag{1.39}$$

alakba. Hasonló egyenlet teljesül az L_∞ Lagrange-függvényből kapott mozgásra:

$$\sum_{i=1}^{n-1} M_{ki}(x_\infty(t))\ddot{x}_{\infty,i}(t) = F_k(x_\infty(t)) - \sum_{i,j=1}^{n-1} \Gamma_{kij}(x_\infty(t))\dot{x}_{\infty,i}(t)\dot{x}_{\infty,j}(t), \tag{1.40}$$

ahol most $k = 1, \ldots, n-1$.

Vezessük be a $\Phi_\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ függvényt a következő módón. Értelmezési tartománya egyezzen meg x_∞ értelmezési tartományával, és ott legyen az első $n-1$ koordinátája azonosan 0, az utolsó pedig

$$\Phi_{\alpha,n}(t) = \frac{F_n(x_\infty(t))}{\alpha} - \frac{F_n(x_\infty(0))}{\alpha}\cos\left(\sqrt{\alpha}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{M_{nn}(x_\infty(\tau))}}\,\mathrm{d}\tau\right). \tag{1.41}$$

Azt fogjuk belátni, hogy x_α és $x_\infty + \Phi_\alpha$ egymáshoz közel haladnak. Ehhez vezessük be a következő függvényt:

$$\begin{aligned}
D_\alpha(t) =&\frac{1}{2}\langle \dot{x}_\alpha(t) - \dot{x}_\infty(t) - \dot{\Phi}_\alpha(t), M(x_\infty(t))(\dot{x}_\alpha(t) - \dot{x}_\infty(t) - \dot{\Phi}_\alpha(t))\rangle \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(C + \delta_{in}\alpha)(x_{\alpha,i}(t) - x_{\infty,i}(t) - \Phi_{\alpha,i}(t))^2.
\end{aligned} \tag{1.42}$$

A kezdeti feltételből

$$D_\alpha(0) = \frac{1}{2\alpha^2} M_{nn}(x_\infty(0))\left(\frac{d}{dt}F_n(x_\infty(t))\Big|_{t=0}\right)^2 \tag{1.43}$$

adódik, míg 1.42 mindkét oldalát deriválva hosszadalmas számolás és a tagok csoportosítása után kapjuk, hogy $\frac{d}{dt}D_\alpha(t)$ a következő tagok összege:

$$\frac{1}{2}\sum_{k,i=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}M_{ki}(x_\infty(t))\right)(\dot{x}_{\alpha,k}(t)-\dot{x}_{\infty,k}(t)-\dot{\Phi}_{\alpha,k}(t))(\dot{x}_{\alpha,i}(t)-\dot{x}_{\infty,i}(t)-\dot{\Phi}_{\alpha,i}(t)) \tag{1.44a}$$

$$\sum_{k,i=1}^{n}(\dot{x}_{\alpha,k}(t)-\dot{x}_{\infty,k}(t)-\dot{\Phi}_{\alpha,k}(t))\left(M_{ki}(x_\infty(t))-M_{ki}(x_\alpha(t))\right)\ddot{x}_{\alpha,i}(t) \tag{1.44b}$$

$$-\sum_{k,i,j=1}^{n}(\dot{x}_{\alpha,k}(t)-\dot{x}_{\infty,k}(t)-\dot{\Phi}_{\alpha,k}(t))\big(\Gamma_{kij}(x_\alpha(t))\dot{x}_{\alpha,i}(t)\dot{x}_{\alpha,j}(t)-\Gamma_{kij}(x_\infty(t))(\dot{x}_{\infty,i}(t)+\dot{\Phi}_{\alpha,i}(t))(\dot{x}_{\infty,j}(t)+\dot{\Phi}_{\alpha \tag{1.44c}$$

$$\sum_{k,i,j=1}^{n}\Gamma_{kij}(x_\infty(t))\big(-\dot{\Phi}_{\alpha,i}(t)\dot{\Phi}_{\alpha,j}(t)+\dot{\Phi}_{\alpha,i}(t)(\dot{x}_{\infty,j}(t)+\dot{\Phi}_{\alpha,j}(t))+(\dot{x}_{\infty,i}(t)+\dot{\Phi}_{\alpha,i}(t))\dot{\Phi}_{\alpha,j}(t)\big) \tag{1.44d}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(\dot{x}_{\alpha,k}(t)-\dot{x}_{\infty,k}(t)-\dot{\Phi}_{\alpha,k}(t))\left[F_k(x_\alpha(t))-F_k(x_\infty(t))+C(x_{\alpha,k}(t)-x_{\infty,k}(t))\right] \tag{1.44e}$$

$$(\dot{x}_{\alpha,n}(t)-\dot{x}_{\infty,n}(t)-\dot{\Phi}_{\alpha,n}(t))\left[F_n(x_\infty(t))-M_{nn}(x_\infty(t))\ddot{\Phi}_{\alpha,n}(t)-\alpha\Phi_{\alpha,n}(t)\right] \tag{1.44f}$$

Ha α elegendően nagy, akkor a tagok közül (1.44a), (1.44b), (1.44c) és (1.44e) felülről becsülhető $D_\alpha(t)$ konstansszorosával ((1.44b) csak addig, amíg $D_\alpha(t)\leq\alpha^{-1/2}$), (1.44d) és (1.44f) pedig α^{-1} és $D_\alpha(t)$ konstansszorosainak összegével. Így a Grönwall-lemma alapján

$$D_\alpha(t)\leq\frac{C_1}{\alpha^2}+\frac{C_2}{\alpha}e^{C_3t}\leq\frac{C_4}{\alpha}e^{C_3t} \tag{1.45}$$

valamilyen $C_1,\ldots,C_4>0$ konstansokkal. Ezek a konstansok csak M, U és x_∞ deriváltjaitól és a választott C értéktől függenek, α értékétől nem, tehát $\alpha\to\infty$ esetén 0 egy környezetében $D_\alpha(t)\to 0$ egyenletesen. De $|x_\alpha-x_\infty-\Phi_\alpha|$ és $|\dot{x}_\alpha-\dot{x}_\infty-\dot{\Phi}_\alpha|$ is felülről becsülhető $\sqrt{D_\alpha}$ konstansszorosával, így ezek is egyenletesen konvergálnak 0 egy környezetében. Végül $|\Phi_\alpha(t)|\leq C_5\alpha^{-1}$ és $|\dot{\Phi}_\alpha|\leq C_6\alpha^{-1/2}$ alapján $x_\alpha\to x_\infty$ és $\dot{x}_\alpha\to\dot{x}_\infty$ egyenletesen. $\square$

2. fejezet

Lagrange-rendszerek

2.1. Lagrange-függvény érintőnyalábon

Ebben a szakaszban az a célunk, hogy az 1.25 Euler-Lagrange-egyenleteket sokaságokra általánosítsuk és koordinátamentes alakba írjuk. Ehhez olyan geometriai objektumokat használunk, amelyek a sokasághoz kanonikusan hozzárendelhetőek, vagy a Lagrange-függvény segítségével invariáns módon konstruálhatóak. Előzetesen szükség lesz néhány definícióra.

2.1.1. Definíció. Legyen Q sokaság. Ekkor megadható a T^*Q sokaságon egy θ_0 1-forma a következő módon:

$$\theta_0(q,p)(v,w) = p(v). \tag{2.1}$$

θ_0 neve *kanonikus* 1*-forma*, míg $\omega_0 = -\,\mathrm{d}\theta_0$ a *kanonikus szimplektikus forma.*

Ha Q egy U nyílt halmazán $q_1, \ldots, q_n$ lokális koordináták, a koérintőnyalábon indukált koordináták pedig $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$, akkor

$$\theta_0|_{TU} = \sum_{i=1}^{n} p_i \,\mathrm{d}q_i \tag{2.2}$$

és így

$$\omega_0|_{TU} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}p_i. \tag{2.3}$$

2.1.2. Definíció. Legyen M sokaság és legyenek $\pi : E \to M$ és $\rho : F \to M$ vektornyalábok. Tegyük fel, hogy $f : E \to F$ olyan sima leképezés, amire $\rho \circ f = \pi$ teljesül, és $m \in M$ esetén vezessük be az $f_m = f|_{E_m}$ jelölést. Ekkor az $\mathbf{F}f : \pi \to \mathrm{Hom}(E \to F)$,

$$\mathbf{F}f(v_m) = T_{v_m} f_m \in \mathrm{Hom}(E_m, F_m) \tag{2.4}$$

leképezés az f *fibrum-deriváltja.*

Lokális koordinátákban felírva látható, hogy a fibrum-derivált is sima leképezés, és egy pont feletti fibrumot az ugyanazon pont feletti fibrumba képezi.

Erre a konstrukcióra a következő speciális esetben lesz szükségünk. Ha adott egy $L : TQ \to \mathbb{R}$ sima leképezés – Lagrange-függvény, akkor azt felfoghatjuk úgy is, mint $TQ \to Q \times \mathbb{R}$ leképezés, azaz az érkezési teret egy triviális vektornyalábra cserélve. A továbbiakban ezt az azonosítást alkalmazva értelmes az $\mathbf{F}L : TQ \to T^*Q$ fibrum-deriváltról beszélni.

$q_1, \ldots, q_n$ koordinátákat választva az érintőnyalábon indukált $(q, \dot{q}) = (q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$ koordinátákkal lokálisan

$$\mathbf{F}L\,(q, \dot{q}) = \left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} L(q, \dot{q}), \ldots, \frac{\partial}{\partial \dot{q}_n} L(q, \dot{q})\right) \tag{2.5}$$

írható.

2.1.3. Definíció. Legyen $L : TQ \to \mathbb{R}$ sima függvény (Lagrange-függvény), $\omega_0 \in \Gamma(\Lambda^2\, T^*T^*Q)$ a kanonikus szimplektikus forma. Ekkor $\omega_L = (\mathbf{F}L)^*\omega_0$ a *Lagrange-2-forma.*

2.1.4. Állítás. *Ha $L \in C^\infty(TQ)$ Lagrange-függvény, akkor lokális koordinátákban a Lagrange-2-forma*

$$\omega_L = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i \partial q_j}\, \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}q_j + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\, \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}\dot{q}_j \tag{2.6}$$

alakú.

Bizonyítás. Legyen $\theta_L = (\mathbf{F}L)^*\theta_0$, ekkor $\omega_L = -\,\mathrm{d}\theta_L$. A Q koérintőnyalábján indukált koordinátákat a koorábbiakhoz hasonlóan jelöje $p_1, \ldots, p_n$, ekkor lokálisan

$$\begin{aligned}
\theta_L &= (\mathbf{F}L)^* \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\, \mathrm{d}q_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (p_i \circ \mathbf{F}L)\, \mathrm{d}(q_i \circ \mathbf{F}L) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i}\, \mathrm{d}q_i .
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Vegyük az egyenlőség mindkét oldalának külső deriváltját, az előjelet pedig a jobb oldalon az ékszorzások tényezőinek felcserélésével változtassuk meg, ezzel éppen a 2.6 egyenletet kapjuk. □

2.1.5. Definíció. Egy $L \in C^\infty(TQ)$ Lagrange-függvény *reguláris*, ha T^*Q minden pontja reguláris értéke a $\mathbf{F}L$ leképezésnek.

Ha a Lagrange-függvény reguláris, akkor $\mathbf{F}L$ lokális diffeomorfizmus, tehát ω_L nemelfajuló. Ilyenkor tehát ω_L meghatároz egy bijekciót a TQ sokaságon értelmezett 1-formák és vektormezők között.

2.1.6. Definíció. Legyen $L \in C^\infty(TQ)$ reguláris Lagrange-függvény, és vezessük be az $A : TQ \to \mathbb{R}$ függvényt $A(v_q) = \mathbf{F}L(v_q) \cdot v_q$ módon. Ekkor az $E = A - L$ függvény az *energia.* Jelölje X_E azt az egyértelmű vektormezőt, amire $\iota_{X_E}\omega_L = \mathrm{d}E$ teljesül, ez az L Lagrange-függvényhez tartozó *Lagrange-vektormező.*

Lokális koordinátákkal kifejezve

$$A(q,\dot{q}) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \tag{2.8}$$

és így

$$E(q,\dot{q}) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_i} - L(q,\dot{q}). \tag{2.9}$$

2.1.7. Tétel. *Legyen $L : TQ \to \mathbb{R}$ reguláris Lagrange-függvény. Ekkor X_E másodrendű differenciálegyenlet, és lokális koordinátákban ekvivalens az Euler-Lagrange-egyenletekkel.*

Bizonyítás. Először számoljuk ki az energia külső deriváltjának lokális alakját:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E &= \sum_{i=1}^{n} \left((\mathrm{d}\dot{q}_i) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \dot{q}_i \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial \dot{q}_i} \,\mathrm{d}q_j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \,\mathrm{d}\dot{q}_j \right) \right) - \mathrm{d}L \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\dot{q}_i \frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial \dot{q}_i} \,\mathrm{d}q_j + \dot{q}_i \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \,\mathrm{d}\dot{q}_j \right) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_j} \,\mathrm{d}q_j. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Legyen X_E lokális alakja

$$X_E(q,\dot{q}) = \sum_{k=1}^{n} \left(Y_k(q,\dot{q}) \frac{\partial}{\partial q_k} + Z_k(q,\dot{q}) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \right), \tag{2.11}$$

ekkor

$$\begin{aligned} \iota_{X_E}\omega_L &= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} (Y_i \,\mathrm{d}q_j - Y_j \,\mathrm{d}q_i) + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} (Y_i \,\mathrm{d}\dot{q}_j - Z_j \,\mathrm{d}q_i) \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial q_i} \right) Y_i \,\mathrm{d}q_j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} Z_i \,\mathrm{d}q_j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} Y_i \,\mathrm{d}\dot{q}_j \right) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Az $\iota_{X_E}\omega_L = \mathrm{d}E$ egyenletben először $\mathrm{d}\dot{q}_j$ együtthatóját összehasonlítva kapjuk, hogy $Y_i = \dot{q}_i$, tehát X_E valóban másodrendű differenciálegyenlet. Írjuk ezt be az egyenletbe, majd hasonlítsuk össze $\mathrm{d}q_j$ együtthatóit is, ebből

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_i - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} Z_i \right), \tag{2.13}$$

vagyis

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} Z_i \right). \tag{2.14}$$

Ha most $c(t)$ integrálgörbe, akkor az egyenletrendszer azzal ekvivalens, hogy lokálisan $c(t) = (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$ és

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial L}{\partial q_j}\right|_{\substack{q=\gamma(t)\\ \dot{q}=\dot{\gamma}(t)}} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial q_i}\right|_{\substack{q=\gamma(t)\\ \dot{q}=v(t)}} \dot{\gamma}_i + \left.\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i}\right|_{\substack{q=\gamma(t)\\ \dot{q}=\dot{\gamma}(t)}} \ddot{\gamma}_i\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right|_{\substack{q=\gamma(t)\\ \dot{q}=\dot{\gamma}(t)}}\right)\end{aligned} \tag{2.15}$$

teljesül, ami valóban az Euler-Lagrange-egyenlet. □

2.1.8. Példa. Legyen $Q = \mathbb{R}$, $TQ = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, a két koordinátafüggvényt jelölje q és $\dot{q}$. Ha $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges sima függvény, $m > 0$, akkor

$$L = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 - U \circ q \tag{2.16}$$

reguláris Lagrange-függvény, $\mathbf{F}L(q, \dot{q}) = \dot{q}\,\mathrm{d}q$, $A = m\dot{q}^2$ és $E = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + U \circ q$. A Lagrange-2-forma $\omega_L = m\,\mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}\dot{q}$, míg az energia külső deriváltja $\mathrm{d}E = (U' \circ q)\,\mathrm{d}q + m\dot{q}\,\mathrm{d}\dot{q}$, tehát a Lagrange-vektormező

$$X_E = \dot{q}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{1}{m}(U' \circ q)\frac{\partial}{\partial \dot{q}}, \tag{2.17}$$

aminek integrálgörbéi az $\ddot{x} = -\frac{1}{m}U'(x)$ Newton-egyenletet elégítik ki.

2.2. Mechanika Riemann-sokaságon

Ebben a szakaszban olyan mechanikai rendszereket vizsgálunk, amelyek Lagrange-függvénye egy sebességben kvadratikus tag és egy helytől függő tag különbsége. Itt a kvadratikus tag a konfigurációs téren adott Riemann-metrikából származik. Először azt a speciális esetet nézzük, amikor a helytől függő rész eltűnik, ekkor a bázis-integrálgörbék éppen a Riemann-sokaság geodetikusai lesznek.

2.2.1. Tétel. *Legyen g Riemann-metrika a Q sokaságon, és legyen $L : TQ \to \mathbb{R}$ az*

$$L(v) = \frac{1}{2} g(v, v) \tag{2.18}$$

képlettel adott. Ekkor $\gamma : (a, b) \to Q$ pontosan akkor bázis-integrálgörbéje az X_E Lagrange-vektormezőnek, ha geodetikus.

Bizonyítás. Legyenek $q_1, \ldots, q_n$ lokális koordináták egy nyílt halmazon, $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ az érintőnyalábon indukált koordináták. A Riemann-metrika lokális alakja

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\,\mathrm{d}q_i \otimes \mathrm{d}q_j,$$

tehát

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j.$$

Az Euler-Lagrange-egyenletbe írva

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left.\frac{\partial g_{ij}(q)}{\partial q_k}\right|_{q=q(t)}\dot q_i(t)\dot q_j(t) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n} g_{kj}(q(t))\dot q_j(t)+\sum_{i=1}^{n} g_{ik}(q(t))\dot q_i(t)\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} g_{ik}(q(t))\ddot q_i(t)\\ &+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial g_{kj}(q)}{\partial q_i}\right|_{q=q(t)}\dot q_i(t)\dot q_j(t)+\left.\frac{\partial g_{ik}(q)}{\partial q_j}\right|_{q=q(t)}\dot q_i(t)\dot q_j(t)\right).\end{aligned}$$

A szokásos módon g^{ij} jelölje a $(g_{ij})_{i,j=1}^{n}$ mátrix inverzének komponensfüggvényeit. Az egyenletet átrendezve és a

$$\Gamma_{ij}^{l}(q)=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} g^{lk}(q)\left(\frac{\partial g_{ik}(q)}{\partial q_j}+\frac{\partial g_{kj}(q)}{\partial q_i}-\frac{\partial g_{ij}(q)}{\partial q_k}\right)$$

Christoffel-szimbólumokat használva adódik, hogy

$$\ddot q_l(t)+\sum_{i,j=1}^{n}\Gamma_{ij}^{l}(q(t))\dot q_i(t)\dot q_j(t)=0,$$

ami valóban a geodetikusok egyenlete. □

Most legyen adott egy $U : Q \to \mathbb{R}$ sima függvény, és $K(v)=\frac{1}{2}g(v,v)$ jelöléssel legyen $L = K - U\circ\tau_Q$. Ilyenkor azt mondjuk, hogy K a *mozgási energia*, U a *potenciál*, $U\circ\tau_Q$ pedig a *potenciális energia.*

2.2.2. Állítás. *A fenti Lagrange-függvény mellett γ pontosan akkor bázis-integrálgörbéje az X_E Lagrange-vektormezőnek, ha*

$$(\gamma^*\nabla)\dot\gamma(t) = -\operatorname{grad} U(\gamma(t)) \tag{2.19}$$

teljesül rá, ahol ∇ a g Riemann-metrikához tartozó Levi-Civita-konnexió.

Bizonyítás. Az előző állításhoz hasonlóan válasszunk koordinátákat, az Euler-Lagrange-egyenlet annyiban változik, hogy a bal oldalához hozzá kell adni $-U$ q_k szerinti parciális deriváltját. Ezzel az új mozgásegyenlet

$$\ddot q_l(t)+\sum_{i,j=1}^{n}\Gamma_{ij}^{l}(q(t))\dot q_i(t)\dot q_j(t) = -\sum_{k=1}^{n} g^{lk}(q(t))\left.\frac{\partial U(q)}{\partial q_k}\right|_{q=q(t)} \tag{2.20}$$

lesz, ami éppen az állításban szereplő egyenlet koordinátás alakja. □

A szakasz hátralevő részében azt fogjuk belátni, hogy egy Riemann-sokaságon adott potenciál hatására bekövetkező mozgások egy másik Riemann-metrika átparaméterezett geodetikusai.

2.2.3. Definíció. Legyen g Riemann-metrika a Q sokaságon, $U : Q \to \mathbb{R}$ felülről korlátos, és legyen $e \in \mathbb{R}$ olyan, hogy minden $q \in Q$ esetén $e > U(q)$. Ekkor

$$g_e = (e - U)g \tag{2.21}$$

a *Jacobi-metrika.*

2.2.4. Tétel. *Az* $L(v) = \frac{1}{2}g(v,v) - U(\tau_Q v)$ *Lagrange-függvény e energiájú bázis-integrálgörbéi átparaméterezéstől eltekintve ugyanazok, mint a Jacobi-metrika* 1 *energiájú geodetikusai.*

Bizonyítás. Jelölje Γ^l_{ij} az eredeti metrika, $\tilde{\Gamma}^l_{ij}$ pedig a Jacobi-metrika Christoffel-szimbólumait. A láncszabály alapján, és az egyszerűség kedvéért az argumentumokat elhagyva

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^l_{ij} &= \frac{1}{2}\frac{1}{e-U}\sum_{k=1}^n g^{lk}\left[(e-U)\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial q_j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial q_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q_k}\right) - \left(\frac{\partial U}{\partial q_j}g_{ik} + \frac{\partial U}{\partial q_i}g_{kj} - \frac{\partial U}{\partial q_k}g_{ij}\right)\right] \\ &= \Gamma^l_{ij} - \frac{1}{2}\frac{1}{e-U}\left(\delta_{il}\frac{\partial U}{\partial q_j} + \delta_{jl}\frac{\partial U}{\partial q_i} - g_{ij}\sum_{k=1}^n g^{lk}\frac{\partial U}{\partial q_k}\right)\end{aligned} \tag{2.22}$$

adódik. Az ebből kapott geodetikus-egyenlet

$$\begin{aligned}0 &= \ddot{q}_l + \sum_{i,j=1}^n \Gamma^l_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{1}{2}\frac{1}{e-U}\sum_{i,j=1}^n\left(\delta_{il}\frac{\partial U}{\partial q_j} + \delta_{jl}\frac{\partial U}{\partial q_i} - g_{ij}\sum_{k=1}^n g^{lk}\frac{\partial U}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j \\ &= \ddot{q}_l + \sum_{i,j=1}^n \Gamma^l_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{1}{e-U}\dot{q}_l\frac{d}{dt}U(q(t)) + \frac{1}{(e-U)^2}\sum_{k=1}^n g^{lk}\frac{\partial U}{\partial q_k}\end{aligned} \tag{2.23}$$

lesz, ahol a második sorban felhasználtuk, hogy 1 energiájú geodetikusokat tekintünk. Legyen $q(t)$ egy ilyen geodetikus, $f(t)$ pedig az $f'(t) = e - U(q(f(t)))$ differenciálegyenlet megoldása. Tekintsük az integrálgörbe $y(t) = q(f(t))$ átparaméterezését. Ekkor

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= \dot{q}(f(t))f'(t) = (e - U(q(f(t))))\dot{q}(f(t)) \\ \ddot{y}(t) &= \ddot{q}(f(t))f'(t)^2 + \dot{q}(f(t))f''(t) \\ &= (e-U(q(f(t))))^2\ddot{q}(f(t)) - \left.\frac{d}{d\tau}U(q(\tau))\right|_{\tau=f(t)} f'(t) \\ &= (e-U(q(f(t))))^2\ddot{q}(f(t)) - (e-U(q(f(t))))\left.\frac{d}{d\tau}U(q(\tau))\right|_{\tau=f(t)}.\end{aligned} \tag{2.24}$$

Az előző egyenletet az $(e - U(q(f(t))))^2$ kifejezéssel megszorozva látható, hogy az átparaméterezett integrálgörbére

$$\ddot{y}(t) + \sum_{i,j=1}^n \Gamma^l_{ij}(y(t))\dot{y}_i(t)\dot{y}_j(t) = -\sum_{k=1}^n g^{lk}\left.\frac{\partial U(q)}{\partial q_k}\right|_{q=y(t)} \tag{2.25}$$

teljesül. □

2.3. Legendre-transzformáció

2.3.1. Definíció. Az $L : TQ \to \mathbb{R}$ Lagrange-függvény *hiperreguláris*, ha $\mathbf{F}L : TQ \to T^*Q$ diffeomorfizmus.

A definíciókból adódik, hogy egy hiperreguláris Lagrange-függvény reguláris.

2.3.2. Példa. Legyen g Riemann-metrika a Q sokaságon, $U : Q \to \mathbb{R}$ sima függvény. Ekkor az

$$L(v) = \frac{1}{2}g(v,v) - U(\tau_Q(v)) \tag{2.26}$$

Lagrange-függvény fibrum-deriváltjára $\mathbf{F}L(w)(v) = g(w,v)$ igaz ($v, w \in T_qQ$), így L hiperreguláris.

A példában szereplő típusú mechanikai rendszereket *egyszerű mechanikai rendszernek* nevezzük. Ekkor U neve *helyzeti energia*, míg $\frac{1}{2}g(v,v)$ a *mozgási energia.*

Ha L hiperreguláris, akkor TQ helyett a T^*Q sokaságon is dolgozhatunk.

2.3.3. Állítás. *Ha $L : TQ \to \mathbb{R}$ hiperreguláris Lagrange-függvény, és vezessük be a $H = E \circ (\mathbf{F}L)^{-1}$ jelölést. Legyen ω_0 a kanonikus 2-forma a T^*Q sokaságon, és jelölje X_H azt az egyértelmű vektormezőt, amelyre $\iota_{X_H}\omega_0 = \mathrm{d}H$. Ekkor X_E és X_H integrálgörbéi Q-ra vetítve megegyeznek.*

Bizonyítás. $\omega_L = (\mathbf{F}L)^*\omega_0$ és $E = (\mathbf{F}L)^*H$ alapján minden $v \in TQ$, $w \in T_vTQ$ esetén

$$\begin{aligned}\omega_0(T_v(\mathbf{F}L)(X_E(v)), T_v(\mathbf{F}L)w) &= \omega_L(X_E(v), w)\\ &= \mathrm{d}E(v)(w)\\ &= \mathrm{d}H(\mathbf{F}L(v))(T_v(\mathbf{F}L)w)\\ &= \omega_0(X_H(\mathbf{F}L(v)), T_v(\mathbf{F}L)w)\end{aligned} \tag{2.27}$$

teljesül. Mivel $\mathbf{F}L : TQ \to T^*Q$ diffeomorfizmus, ebből $T_v(\mathbf{F}L)(X_E(v)) = X_H(\mathbf{F}L(v))$.

Eszerint $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to TQ$ pontosan akkor integrálgörbéje az X_E vektormezőnek, ha $\mathbf{F}L \circ \gamma$ az X_H integrálgörbéje. Végül $\tau_Q^* \circ \mathbf{F}L = \tau_Q$ miatt a két görbe vetülete megegyezik. □

Az állításban szereplő H függvény neve *Hamilton-függvény*, míg X_H a hozzá tartozó *Hamilton-vektormező.*

A fenti konstrukciót meg is fordíthatjuk. Ehhez egy alkalmas $H : T^*Q \to \mathbb{R}$ függvényből kell kiindulni:

2.3.4. Definíció. $H \in C^\infty(T^*Q)$ *hiperreguláris Hamilton-függvény*, ha $\mathbf{F}H : T^*Q \to TQ$ diffeomorfizmus.

2.3.5. Állítás.

1. *Legyen H hiperreguláris Hamilton-függvény, $G = \iota_{X_H}\theta_0$. Vezessük be az $E = H \circ (\mathbf{F}H)^{-1}$ és $A = G \circ (\mathbf{F}H)^{-1}$ függvényeket, és legyen $L = A - E$. Ekkor $L : TQ \to \mathbb{R}$ hiperreguláris Lagrange-függvény és $\mathbf{F}L = (\mathbf{F}H)^{-1}$.*

2. *Legyen L hiperreguláris Lagrange-függvény, $H = E \circ (\mathbf{F}L)^{-1}$ mint korábban. Ekkor H hiperreguláris Hamilton-függvény és $\mathbf{F}H = (\mathbf{F}L)^{-1}$.*

Bizonyítás. 1. Legyenek $q_1, \dots, q_n$ koordináták a Q sokaságon és jelölje $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ és $p_1, \dots, p_n$ az érintő- és koérintőtereken indukált koordinátákat. Ekkor $\theta_0 = \sum_{i=1}^n p_i \,\mathrm{d}q_i$, így

$$G = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{2.28}$$

Mivel

$$\mathbf{F}H(q,p) = \left(q, \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}\right) = (q, \dot{q}), \tag{2.29}$$

ezért

$$(L \circ \mathbf{F}H)(q,p) = G(q,p) = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H(q,p) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H(q,p), \tag{2.30}$$

és így a Lagrange-függvény fibrum-deriváltjának komponensei

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_i + p_k - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_k} = p_k. \tag{2.31}$$

Eszerint $\mathbf{F}L \circ \mathbf{F}H = \mathrm{id}_{T^*Q}$, azaz $(\mathbf{F}L)^{-1} = \mathbf{F}H$.

2. Az előzőekhez hasonlóan

$$\mathbf{F}L(q,\dot{q}) = \left(q, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}, \dots, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right) = (q, p), \tag{2.32}$$

és így

$$H \circ \mathbf{F}L(q,\dot{q}) = E = A - L = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - L. \tag{2.33}$$

A Hamilton-függvény fibrum-deriváltjára

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} p_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} \tag{2.34}$$

alapján $\mathbf{F}H \circ \mathbf{F}L = \mathrm{id}_{TQ}$ teljesül, azaz $\mathbf{F}H = (\mathbf{F}L)^{-1}$

□

3. fejezet

Hamilton-rendszerek

3.1. Szimplektikus sokaságok, Hamilton-egyenlet

A 2.3.3. állításban láttuk, hogy egy hiperreguláris Lagrange-függvény meghatároz egy sima függvényt a koérintőnyalábon, amely az ott kanonikusan meglévő nemelfajuló 2-forma segítségével a Newton-egyenlettel ekvivalens differenciálegyenlethez vezet. Ha elsődleges objektumnak a Hamilton-függvényt és a 2-formát tekintjük, akkor viszont nincs szükség arra, hogy a koérintőnyalábhoz ragaszkodjunk, elegendő, ha lokálisan úgy néz ki a 2-forma, mint a koérintőnyaláb kanonikus 2-formája. A következő célunk a Hamilton-mechanika ilyen irányú általánosítása.

3.1.1. Definíció. Az (M, ω) pár *szimplektikus sokaság*, ha M sima sokaság, $\omega \in \Gamma(\Lambda^2 T^*M)$ minden pontban nemelfajuló és $\mathrm{d}\omega = 0$. Ekkor ω neve *szimplektikus forma.*

Mivel ω minden pontban nemelfajuló alternáló formát ad meg, az érintőtér dimenziója, azaz $\dim M$ szükségképpen páros. Ha a dimenzió $2n$, akkor

$$\Omega_\omega := \frac{(-1)^{n/2}}{n!}\omega^n \tag{3.1}$$

térfogat.

A korábbiakban megismert módon minden koérintőnyaláb egyben szimplektikus sokaság is. További fontos példák a komplex projektív terek és a koadjungált pályák, ezek mindegyikén megadható egy kanonikus szimplektikus forma.

3.1.2. Példa. Ha Q sima sokaság, akkor $(T^*Q, -\mathrm{d}\theta_0)$ szimplektikus sokaság, ahol θ_0 a kanonikus 1-forma.

3.1.3. Példa. Legyen $\mathbb{C}P^n = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^\times$ az n (komplex) dimenziós komplex projektív tér, ez $2n$ dimenziós sima sokaság. Legyenek a $\mathbb{C}^{n+1}$ téren $z = (z_0, \dots, z_n)$ a komponensfüggvények, és $z_k = x_k + iy_k$, $\overline{z}_k = x_k - iy_k$, ekkor $x_0, y_0, \dots, x_n, y_n$ valós koordináták. Jelölje $\varphi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}P^n$ a hányadosleképezést. Ekkor a $\mathbb{C}P^n$ sokaságon létezik egyetlen ω_{FS} 2-forma, amelyre

$$\varphi^*\omega_{FS} = \frac{i}{2|z|^4} \sum_{i,j=0}^{n} \left(|z_j|^2 \,\mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}\overline{z}_k - \overline{z}_j z_k \,\mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}\overline{z}_k\right) \tag{3.2}$$

teljesül. Ez a *Fubini-Study-szimplektikus forma.*

3.1.4. Példa. Ha G Lie-csoport, $\mu \in T^*G$, akkor a $G \cdot \mu$ koadjungált pályán megadható egy ω_μ szimplektikus forma a következő módon. Legyen $\xi, \eta \in TG$ és $\nu \in G \cdot \mu$, ekkor

$$\omega_\mu(\nu)(\xi_{T^*G}(\nu), \eta_{T^*G}(\nu)) = -\nu([\xi, \eta]) \tag{3.3}$$

Ez a *Kirillov-Kostant-Souriau szimplektikus forma.*

Tekintsük az $M = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ téren a koordinátafüggvényeket, jelölje ezeket sorban $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$. Ekkor

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}y_i \tag{3.4}$$

szimplektikus forma. Ha egy (M, ω) szimplektikus sokaság egy nyílt részhalmazán $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ olyan függvények, amelyekkel (3.4) teljesül, akkor azokat *kanonikus koordinátáknak* nevezzük. A következő tétel arról szól, hogy egy szimplektikus sokaságon minden pont körül találhatunk kanonikus koordinátákat:

3.1.5. Tétel (Darboux)**.** *Legyen (M, ω) szimplektikus sokaság, $x \in M$. Ekkor létezik olyan (U, φ) x-beli lokális térkép, amelyre $\varphi(u) = (x_1(u), \ldots, x_n(u), y_1(u), \ldots, y_n(u))$ és*

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}y_i \tag{3.5}$$

teljesül.

Bizonyítás. Feltehető, hogy $M \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ az origó nyílt környezete és $x = 0$. Legyen $\omega_1 = \omega(0)$ konstans szimplektikus forma, $\tilde{\omega} = \omega_1 - \omega$, $\omega_t = \omega + t\tilde{\omega}$ ha $0 \le t \le 1$. Mivel $\omega_t(0) = \omega(0)$ nemelfajuló, létezik 0 körül egy golyó, ahol minden t-re ω_t nemelfajuló. Itt található olyan α 1-forma, amelyre $\tilde{\omega} = \mathrm{d}\alpha$ igaz. Feltehető, hogy $\alpha(0) = 0$. Legyen X_t az a vektormező, amelyre $\iota_{X_t}\omega_t = -\alpha$. Mivel $X_t(0) = 0$, az origó egy környezetében létezik az X_t időfüggő vektormező folyama a $t \in [0, 1]$ intervallumon, ezt jelölje F_t. Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(F_t^*\omega_t) &= F_t^*(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t) + F_t^*\frac{d}{dt}\omega_t \\ &= F_t^*\,\mathrm{d}\iota_{X_t}\omega_t + F_t^*\tilde{\omega} \\ &= F_t^*(-\,\mathrm{d}\alpha + \tilde{\omega}) = 0, \end{aligned} \tag{3.6}$$

tehát $F_1^*\omega_1 = F_0^*\omega_0 = \omega$, vagyis F_1 olyan új koordinátákra való áttérés, ami a szimplektikus formát konstanssá transzformálja. Ezután egy alkalmas lineáris transzformációval (3.4) alakra hozhatjuk azt. □

A tételben szereplő tulajdonságú térképeket *szimplektikus téképeknek* nevezzük.

Szimplektikus sokaságok közötti leképezések közül kiemelten fontosak azok, amelyek a szimplektikus formákkal kompatibilisek:

3.1.6. Definíció. Legyen (M, ω) és (N, ρ) két szimplektikus sokaság. Egy $f : M \to N$ sima leképezés *szimplektikus*, ha $f^*\rho = \omega$.

A definícióból közvetlenül adódik, hogy ha $\dim M = \dim N$ és $f : M \to N$ szimplektikus leképezés, akkor $f^*\Omega_\rho = \Omega_\omega$.

Ha $M = T^*Q$ a kanonikus 2-formával, akkor Q diffeomorfizmusai meghatározzák M szimplektikus diffeomorfizmusainak egy speciális osztályát, a *pont-transzformációkat*:

3.1.7. Állítás. *Legyen Q sokaság, $f : Q \to Q$ diffeomorfizmus. Definiáljuk a $T^*f : T^*Q \to T^*Q$ leképezést*

$$T^*f(\alpha_q)(v) = \alpha_q(Tf(v)) \tag{3.7}$$

módon, ahol $q \in Q$, $\alpha_q \in T^*Q$, $v \in T_{f^{-1}(q)}Q$. Ekkor $(T^*f)^*\theta_0 = \theta_0$, és így T^*f szimplektikus.

Bizonyítás. Legyen $w \in T_{\alpha_q}(T^*Q)$. Ekkor $f \circ \tau_Q^* \circ T^*f = \tau_Q^*$ felhasználásával

$$\begin{aligned}
(T^*f)^*\theta_0(w) &= \theta_0(TT^*f \cdot w) \\
&= T^*f(\alpha_q) \cdot (T\tau_Q^* TT^*f \cdot w) \\
&= T^*f(\alpha_q) \cdot (T(\tau_Q^* \circ T^*f) \cdot w) \\
&= \alpha_q(Tf \cdot T(\tau_Q^* \circ T^*f) \cdot w) \\
&= \alpha_q(T(f \circ \tau_Q^* \circ T^*f) \cdot w) \\
&= \alpha_q \cdot (T\tau_Q^* \cdot w) \\
&= \theta_0(\alpha_q) \cdot w.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

□

A Hamilton-vektormezőt a gradienshez hasonló módon képezzük egy sima függvényből, de Riemann-metrika helyett a szimplektikus forma segítségével:

3.1.8. Definíció. Legyen (M, ω) szimplektikus sokaság, $H \in C^\infty(M)$. Az $X_H := (\mathrm{d}H)^{\sharp_\omega}$ vektormezőt a H *Hamilton-függvényhez* tartozó *Hamilton-vektormezőnek* nevezzük.

A definíció alapján $\iota_{X_H}\omega = \mathrm{d}H$, és ez a tulajdonság karakterizálja a Hamilton-vektormezőt.

Tanulságos felírni a Hamilton-vektormező lokális alakját szimplektikus térkép segítségével. Ha $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ jelöli a térkép komponensfüggvényeit, akkor (lokálisan)

$$\omega = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}p_i \text{ és } \mathrm{d}H = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i + \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_i} \mathrm{d}p_i \right), \tag{3.9}$$

és így

$$X_H = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \tag{3.10}$$

Eszerint $(q(t), p(t))$ pontosan akkor integrálgörbe, ha $i = 1, \dots, n$ esetén

$$\begin{aligned}
\dot{q}_i(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(q(t), p(t)) \\
\dot{p}_i(t) &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}(q(t), p(t))
\end{aligned} \tag{3.11}$$

teljesül, ezek a *Hamilton-egyenletek*.

3.1.9. Példa. A Lagrange-mechanikához hasonlóan a Hamilton-mechanikában is tekinthetünk egyszerű mechanikai rendszereket. Legyen Q sokaság, g rajta egy Riemann-metrika és $U \in C^\infty(Q)$. Definiálhatjuk a $K \in C^\infty(T^*Q)$

$$K(\alpha) = \frac{1}{2} g_{\tau_Q^* \alpha}(\alpha^{\sharp_g}, \alpha^{\sharp_g}) \tag{3.12}$$

mozgási energiát, ahol $\alpha \in T^*Q$. Ekkor a $H = K + U \circ \tau_M^* : T^*Q \to \mathbb{R}$ Hamilton-függvényhez tartozó Hamilton-vektormező lokálisan

$$X_H = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n g^{ki}(q) p_i \frac{\partial}{\partial q_k} - \left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g^{ij}(q)}{\partial q_k} p_i p_j + \frac{\partial U}{\partial q_k} \right) \frac{\partial}{\partial p_k} \right) \tag{3.13}$$

alakba írható.

Első alkalmazásként az energiamegmaradást látjuk be.

3.1.10. Állítás. *Legyen (M, ω) szimplektikus sokaság, $H \in C^\infty(M)$, és tegyük fel, hogy $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ az X_H vektormező integrálgörbéje. Ekkor $H \circ \gamma$ konstans.*

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(\gamma(t)) &= \mathrm{d}H(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \\ &= \mathrm{d}H(\gamma(t)) \cdot X_H(\gamma(t)) \\ &= \omega(X_H(\gamma(t)), X_H(\gamma(t))) = 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

□

Hasonlóan alapvető tény, hogy egy Hamilton-vektormező folyama szimplektikus leképezésekből áll.

3.1.11. Állítás. *Legyen (M, ω) szimplektikus sokaság, $H \in C^\infty(M)$, és legyen X_H folyama F_t. Ekkor minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $F_t^* \omega = \omega$ (ahol létezik).*

Bizonyítás. $t = 0$-ra az állítás igaz, mert $F_0 = \mathrm{id}_M$. Másrészt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F_t^* \omega &= F_t^* \mathcal{L}_{X_H} \omega \\ &= F_t^* \big(\iota_{X_H} \underbrace{\mathrm{d}\omega}_{0} + \mathrm{d} \underbrace{\iota_{X_H} \omega}_{\mathrm{d}H} \big) = 0 \end{aligned} \tag{3.15}$$

□

Az állításból az is következik, hogy $F_t^* \Omega_\omega = \Omega_\omega$ teljesül, ez Liouville tétele.

Mivel H mozgásállandó, bármilyen függvénye is az. Az X_H-invariáns differenciálformák részalgebrát alkotnak az $\Gamma(\Lambda^\bullet T^*M)$ algebrán belül, tehát speciálisan

$$e^{-\beta H} \Omega_\omega \tag{3.16}$$

is invariáns térfogat minden $\beta \in \mathbb{R}$ esetén. Ha H alulról korlátos és valamilyen $\beta = \beta_0$-ra

$$Z(\beta) = \int_M e^{-\beta H} \Omega_\omega \tag{3.17}$$

véges, akkor $\beta > \beta_0$-ra is az, ilyenkor

$$\frac{e^{-\beta H}}{Z(\beta)}\Omega_\omega \tag{3.18}$$

egy valószínűségi mértéket határoz meg az M sokaságon, a $T = \frac{1}{\beta}$ hőmérsékletű *Gibbs-mértéket.* A $Z(\beta)$ függvény neve *partíciós függvény*, és fontos szerepet tölt be a statisztikus mechanikában.

Láttuk, hogy egy Hamilton-vektormezőre invariáns a szimplektikus formából származó térfogat. Ugyanakkor az energiamegmaradás miatt H szinthalmazait nem hagyja el a folyam. Most azt látjuk be, hogy a szinthalmazokon is van invariáns térfogat.

3.1.12. Tétel. *Legyen (M,ω) szimplektikus sokaság, $H \in C^\infty(M)$, és legyen e H egy reguláris értéke. Ekkor létezik a $\Sigma_e = H^{-1}(e)$ részsokaságon X_H-invariáns térfogat.*

Bizonyítás. Mivel $\mathrm{d}H \neq 0$ a részsokaságon, ez annak egy környezetében is igaz. Ha $x \in \Sigma_e$, akkor x egy környezetében válasszunk lokális koordinátákat olyan módon, hogy H az egyik koordinátafüggvény. A többi koordináta külső deriváltjainak szorzata egy alkalmas sima függvénnyel szorozva legyen σ, a függvény megválasztható olyan módon, hogy $\Omega_\omega = \mathrm{d}H \wedge \sigma$ teljesülön. Ekkor

$$0 = \mathcal{L}_{X_H}\Omega_\omega = \mathcal{L}_{X_H}(\mathrm{d}H \wedge \sigma) = \mathrm{d}H \wedge (\mathcal{L}_{X_H}\sigma) \tag{3.19}$$

alapján $\mathcal{L}_{X_H}\sigma = \mathrm{d}H \wedge \tau$ valamilyen τ mellett. Ha σ' egy másik forma, amire $\Omega_\omega = \mathrm{d}H \wedge \sigma'$ teljesül, akkor hasonlóan $\sigma - \sigma' = \mathrm{d}H \wedge \rho$. Legyen $i : \Sigma_e \to M$ a beágyazás és $\mu_e = i^*\sigma$. Ekkor

$$i^*\sigma - i^*\sigma' = i^*(\mathrm{d}H \wedge \rho) = 0, \tag{3.20}$$

mivel $i^*\,\mathrm{d}H = \mathrm{d}(i^*H) = 0$. $\mathrm{d}H \wedge \sigma$ térfogat, tehát μ_e is az. Másrészt

$$\mathcal{L}_{X_H}\mu_e = i^*\mathcal{L}_{X_H}\sigma = i^*(\mathrm{d}H \wedge \tau) = 0, \tag{3.21}$$

tehát μ_e invariáns. □

Megemlítünk még egy eredményt a Hamilton-vektormezők periodikus integrálgörbéiről. Legyen $F : \mathbb{R} \times M \to M$ az X_H Hamilton-vektormező folyama, és

$$\mathrm{per}_H = \{(x,t) \in M \times \mathbb{R} | t \neq 0, F_t(x) = x\} \tag{3.22}$$

a periodikus orbitok összessége.

3.1.13. Állítás. per_H *bármely részsokaságán* $\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}H = 0$.

Bizonyítás. Vezessük be az $\tilde{F} : \mathbb{R} \times M \to M \times M$, $\tilde{F}(x,t) = (x, F_t(x))$ leképezést. Ekkor $\mathrm{per}_H = \tilde{F}^{-1}(\Delta)$, ahol $\Delta = \{(x,x) | x \in M\} \subseteq M \times M$. Jelölje $\pi_1, \pi_2 : M \times M \to M$ a két tényezőre való projekciót, és legyen $i : \delta \to M \times M$ a beágyazás. Ekkor $\Omega = \pi_1^*\omega - \pi_2^*\omega$ szimplektikus forma és $i^*\Omega = 0$. $\tilde{F}$ definíciója alapján

$$T_{(x,t)}\tilde{F}\left(v, a\frac{\partial}{\partial t}\right) = \left(v, T_xF_t \cdot v + aX_H(F_t(x))\right). \tag{3.23}$$

Feltehető, hogy $\mathrm{d}H(x) \neq 0$, ekkor $\tilde{F}$ immerzió. Látható, hogy $\tilde{F}^*\Omega = -\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}H$, mivel F_t szimplektikus és $T_xF_t(X_H(x)) = X_H(F_t(x))$. Legyen $j : \mathrm{per}_H \to \mathbb{R} \times M$ a beágyazás és $\delta : \mathbb{R} \times M \to \Delta$, $(x,t) \mapsto (x,x)$. Ekkor $\tilde{F} \circ j = i \circ \delta$, így

$$j^*(\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}H) = -j^*\tilde{F}^*\Omega = -(\tilde{F} \circ j)^*\Omega = -\delta^* i^* \omega = 0. \tag{3.24}$$

□

Az állításból következik, hogy ha per_H egy részsokaságán $\mathrm{d}H$ sehol nem 0, akkor ott $t = f \circ H$ valamilyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sima függvényre.

3.1.14. Példa. Legyen $M = \mathbb{R}^2$, a két koordináta x, y, a Hamilton-függvény $H = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$. Ekkor

$$\mathrm{per}_H = (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \times \{2\pi\}, \tag{3.25}$$

tehát $\mathrm{d}t = 0$ mindenhol, a periódus valójában független az energiától.

3.2. Poisson-zárójelek

Tegyük fel, hogy H és f sima függvények az (M, ω) szimplektikus sokaságon. Ha γ az X_H Hamilton-vektormező integrálgörbéje, akkor $f \circ \gamma$ egy fizikai mennyiség időbeli változását írja le a mozgás során. Az ilyen függvények vizsgálatához segítséget nyújt a Poisson-zárójel.

3.2.1. Definíció. Ha (M, ω) szimplektikus sokaság, akkor az $f, g \in C^\infty(M)$ függvények *Poisson-zárójele*

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = -\iota_{X_f}\iota_{X_g}\omega \tag{3.26}$$

3.2.2. Állítás. *Legyen (M, ω) szimplektikus sokaság, $H, f \in C^\infty(M)$, és legyen $\gamma : \mathbb{R} \to M$ az X_H Hamilton-vektormező integrálgörbéje. Ekkor*

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \{f, H\}(\gamma(t)) \tag{3.27}$$

Bizonyítás. Mivel γ integrálgörbe, $\dot{\gamma}(t) = X_H(\gamma(t))$, és így

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) &= \mathrm{d}f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) \\ &= \mathrm{d}f(\gamma(t)) X_H(\gamma(t)) \\ &= \omega(X_f(\gamma(t)), X_H(\gamma(t))) \\ &= \{f, H\}(\gamma(t)) \end{aligned} \tag{3.28}$$

□

Speciálisan ebből az is következik, hogy ha egy mechanikai rendszer Hamilton-függvénye H, akkor egy $f : M \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor mozgásállandó, ha $\{f, H\} = 0$.

A Hamilton-vektormezők lokális alakjából következik, hogy ha $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ kanonikus koordináták, akkor

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \tag{3.29}$$

Speciálisan ilyenkor $\{q_i, q_j\} = 0$, $\{p_i, p_j\} = 0$, $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$.

A következő állítás a Poisson-zárójelek néhány alapvető tulajdonságát foglalja össze.

3.2.3. Állítás. *Legyen (M, ω) szimplektikus sokaság. Ekkor a követezők teljesülnek*

1. $\{f, g\} = -\mathcal{L}_{X_f} g = \mathcal{L}_{X_g} f$
2. *Ha $f \in C^\infty(M)$, akkor $g \mapsto \{f, g\}$ deriváció*
3. $X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]$
4. *$C^\infty(M)$ a Poisson-zárójellel Lie-algebra*

Bizonyítás. 1. A definíció alapján

$$\{f, g\} = -\iota_{X_f}\iota_{X_g}\omega = -\iota_{X_f}\,\mathrm{d}g = -X_f(g) = -\mathcal{L}_{X_f} g, \tag{3.30}$$

és hasonlóan $\{f, g\} = \mathcal{L}_{X_g} f$.

2. Abból következik, hogy $\mathcal{L}_{X_f} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ deriváció.

3. $\iota_{X_{\{f,g\}}} = \mathrm{d}\,\{f, g\} = \mathrm{d}\mathcal{L}_{X_g} f = \mathcal{L}_{X_g}\,\mathrm{d}f = \mathcal{L}_{X_g}\iota_{X_f}\omega = \mathcal{L}_{X_g}\iota_{X_f}\omega + \iota_{X_f}\mathcal{L}_{X_g}\omega = \iota_{[X_g,X_f]}\omega$

4. Mivel d, $\cdot^{\sharp_\omega}$ és ι. lineáris, $(f, g) \mapsto \{f, g\}$ bilineáris. $\{f, f\} = -\iota_{X_f}\iota_{X_f}\omega = 0$ miatt alternáló. A Jacobi-azonosság

$$\begin{aligned}\{f, \{g, h\}\} &= \mathcal{L}_{X_f}\mathcal{L}_{X_g} h \\ \{g, \{h, f\}\} &= -\mathcal{L}_{X_g}\mathcal{L}_{X_h} h \\ \{h, \{f, g\}\} &= \mathcal{L}_{X_{\{f,g\}}} h\end{aligned} \tag{3.31}$$

felhasználásával látható, mivel $\mathcal{L}_{X_f}\mathcal{L}_{X_g} h - \mathcal{L}_{X_g}\mathcal{L}_{X_h} h = \mathcal{L}_{[X_f,X_g]} h$.

□

3.3. Lie-csoportok hatásai szimplektikus sokaságon

A következőkben szimmetriával rendelkező mechanikai rendszereket fogunk vizsgálni. Ehhez először Lie-csoportok olyan hatásait tekintjük, amelyek megőrzik a szimplektikus struktúrát.

3.3.1. Definíció. Legyen (M, ω) szimplektikus sokaság, G Lie-csoport. Ekkor egy $\Phi : G \times M \to M$ hatás *szimplektikus*, ha minden $g \in G$ esetén $\Phi_g^*\omega = \omega$.

3.3.2. Példa. Az $\mathbb{R}$ additív csoport egy hatása, azaz egy X teljes vektormező folyama pontosan akkor szimplektikus, ha lokálisan Hamilton, mivel $\mathcal{L}_X\omega = \iota_X\,\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}\iota_X\omega = \mathrm{d}\iota_X\omega$ pontosan ekkor 0.

Ebből a példából az is következik, hogy ha G összefüggő, akkor a hatás akkor lesz szimplektikus, ha minden infinitezimális generátor lokálisan Hamilton. Gyakran azonban ez nemcsak lokálisan igaz, hanem globálisan is. Ez motiválja a következő definíciót.

3.3.3. Definíció. Legyen (M, ω) szimplektikus sokaság, G Lie-csoport, $\Phi : G \times M \to M$ hatás. Egy $J : M \to T_e^*G$ leképezés a hatáshoz tartozó *momentum-leképezés*, ha minden $\xi \in T_eG$ esetén $\mathrm{d}\hat{J}(\xi) = \iota_{\xi_M}\omega$ (azaz $X_{\hat{J}(\xi)} = \xi_M$), ahol $\hat{J}(\xi)(x) = J(x) \cdot \xi$.

A definícióból adódik, hogy egy hatáshoz tartozó bármely két momentum-leképezés különbsége lokálisan konstans.

Ha egy hatás olyan, hogy minden $\xi \in T_eG$ esetén ξ_M Hamilton-vektormező, akkor létezik momentum-leképezés. Legyen ugyanis T_eG egy bázisa $\xi_1, \dots, \xi_k$, és $J_1, \dots, J_k$ a $(\xi_1)_M, \dots, (\xi_k)_M$ vektormezőkhöz tartozó Hamilton-függvények. Ekkor $\hat{J}(\xi_i) := J_i$ lineáris kiterjesztése momentum-leképezés.

3.3.4. Példa. Legyen $M = T^*\mathbb{R} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, q, p a két koordinátafüggvény. $G = \mathbb{R}$ hasson eltolásokkal, azaz $\Phi_x(q, p) = (q + x, p)$. Ekkor $J(q, p) = p$ momentum-leképezés.

Fontos tulajdonsága a momentum-leképezéseknek, hogy szimmetrikus Hamilton-függvény esetén az értéke a mozgás során állandó.

3.3.5. Tétel. *Legyen $\Phi : G \times M \to M$ szimplektikus hatás, $J : M \to T_e^*G$ momentum-leképezés, $H \in C^\infty(M)$ G-invariáns, azaz minden $g \in G$ esetén $H \circ \Phi_g = H$. Ekkor J mozgásállandó, azaz ha X_H folyama F_t, akkor minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $J \circ F_t = J$.*

Bizonyítás. Mivel H G-invariáns, minden $\xi \in T_e^*G, x \in M$ esetén $s \mapsto H(\Phi_{\exp(s\xi)}x)$ konstans. Ezt az $s = 0$ pontban deriválva

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{d}H(x) \cdot \xi_M(x) \\ &= (\mathcal{L}_{X_{\hat{J}(\xi)}} H)(x) \\ &= \left\{ H, \hat{J}(\xi) \right\}(x), \end{aligned} \tag{3.32}$$

azaz $\hat{J}(\xi)$ mozgásállandó. □

Gyakran található egy hatáshoz olyan momentum-leképezés, ami egyúttal ekvivariáns, ha a Lie-algebra duálisán a koadjungált hatást tekintjük.

3.3.6. Definíció. Egy $J : M \to T_e^*G$ momentum-leképezés Ad^*-*ekvivariáns*, ha minden $g \in G$ esetén $J \circ \Phi_g = \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}} \circ J$.

3.3.7. Állítás. *Ha $J : M \to T_e^*G$ Ad^*-ekvivariáns momentum-leképezés, akkor minden $\xi, \eta \in T_eG$ esetén*

$$\left\{ \hat{J}(\xi), \hat{J}(\eta) \right\} = \hat{J}([\xi, \eta]), \tag{3.33}$$

azaz $\hat{J}$ Lie-algebra-homomorfizmus T_eG és a sima függvények Lie-algebrája között (a Poisson-zárójellel mint Lie-szorzással).

Bizonyítás. Az Ad^*-ekvivariancia azt jelenti, hogy minden $g \in G$, $\eta \in T_0^*G$ esetén $0 = \hat{J}(\eta)(\Phi_g(x)) - \hat{J}(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\eta)(x)$. Ezt $G \to \mathbb{R}$ leképezésként a $g = e$ pontban deriválva és a $\xi \in T_eG$ vektoron kiértékelve

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{d}\hat{J}(\eta)(x) \cdot \xi_M(x) + \hat{J}[\xi, \eta](x) \\ &= \mathcal{L}_{X_{\hat{J}(\xi)}} J\hat{(\eta)}(x) + \hat{J}[\xi, \eta](x) \\ &= -\left\{ \hat{J}(\xi), \hat{J}(\eta) \right\}(x) + \hat{J}[\xi, \eta](x). \end{aligned} \tag{3.34}$$

□

Általában ha J egy (nem feltétlenül ekvivariáns) momentum leképezés, akkor

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\hat{J}([\xi,\eta]) &= \iota_{[\xi,\eta]_M}\omega \\ &= -\iota_{[\xi_M,\eta_M]}\omega \\ &= -\iota_{[X_{\hat{J}(\xi)},X_{\hat{J}(\eta)}]}\omega \\ &= \iota_{X_{\{\hat{J}(\xi),\hat{J}(\eta)\}}}\omega \\ &= \mathrm{d}\left\{\hat{J}(\xi),\hat{J}(\eta)\right\}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

alapján $\hat{J}([\xi,\eta]) - \left\{\hat{J}(\xi),\hat{J}(\eta)\right\}$ lokálisan konstans.

Ad^*-ekvivariáns momentum-leképezések konstruálásához hasznos a következő tétel.

3.3.8. Tétel. *Legyen $\Phi : G \times M \to M$ szimplektikus hatás, tegyük fel, hogy $\omega = -\,\mathrm{d}\theta$ (tehát egzakt), és θ G-invariáns, azaz minden $g \in G$ esetén $\Phi_g^*\theta = \theta$. Ekkor*

$$J(x)\cdot\xi = (\iota_{\xi_M}\theta)(x) \tag{3.36}$$

egy Ad^**-ekvivariáns momentum-leképezés.*

Bizonyítás. θ invarianciája miatt minden $\xi \in T_eG$ esetén $0 = \mathcal{L}_{\xi_M}\theta = \mathrm{d}\iota_{\xi_M} = \iota_{\xi_M}\omega$, tehát

$$\mathrm{d}(\iota_{\xi_M}\theta) = \iota_{\xi_M}\omega. \tag{3.37}$$

Így $\hat{J}(\xi) = \iota_{\xi_M}\theta$ valóban momentum-leképezést ad meg.

Az invariancia és $(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\xi)_M = \Phi_g^*\xi_M$ alapján

$$\hat{J}(\xi)(\Phi_g(x)) = (\iota_{\xi_M}\theta)(\Phi_g(x)) = \iota_{(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\xi)_M}\theta(x) = \hat{J}(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\xi)(x) \tag{3.38}$$

□

Ilyen 1-formához és hatáshoz jutunk akkor, ha a szimplektikus sokaság egy konfigurációs tér koérintőnyalábja, és a konfigurációs téren adott hatás felemelését tekintjük.

3.3.9. Állítás. *Ha adott a G Lie-csoport Φ hatása a Q sokaságon és $M = T^*Q$, akkor tekintsük a Φ^{T^*}*

$$\Phi^{T^*}(g,\alpha) = (T^*\Phi_{g^{-1}})(\alpha) \tag{3.39}$$

ahol $\alpha \in T^*Q$. Erre a kanonikus 1*-forma invariáns. Az ebből adódó momentum-leképezésre*

$$\hat{J}(\xi)(\alpha_q) = \alpha_q \cdot \xi_Q(q), \tag{3.40}$$

ahol $q \in Q$, $\alpha_q \in T_q^*Q$ és $\xi \in T_eG$.

Bizonyítás. Tetszőleges $f : Q \to Q$ diffeomorfizmusra $(T^*f)^*\theta_0 = \theta_0$, így speciálisan T^*f szimplektikus is.

A felemelt hatásra $\tau_Q^* \circ \Phi_g^{T^*} = \Phi_g \circ \tau_Q^*$ teljesül, ezt a $g = e$ pontban deriválva $T\tau_Q^* \circ \xi_M = \xi_Q \circ \tau_Q^*$ adódik. A kanonikus 1-forma definíciója alapján

$$\begin{aligned} \hat{J}(\xi)(\alpha_q) &= \iota_{\xi_M}\theta_0(\alpha_q) \\ &= \alpha_q \cdot (T\tau_Q^* \circ \xi_M(\alpha_q)) \\ &= \alpha_q \cdot (\xi_Q \circ \tau_Q^*(\alpha_q)) \\ &= \alpha_q \cdot (\xi_Q(q)) \end{aligned} \tag{3.41}$$

□

3.3.10. Példa. Legyen $Q = \mathbb{R}^3$, $M = T^*Q \simeq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, az indukált koordinátafüggvények $(q, p) = (q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$.

A $G = \mathrm{GL}(\mathbb{R}^3)$ csoport hat a Q sokaságon a szokásos módon mátrixszorzással ($\mathbb{R}^3$ elemeit oszlopvektoroknak gondolhatjuk). Ha $A \in G$, akkor az indukált hatás $\Phi_A^{T^*}(q, p) = (Aq, (A^{-1})^T p)$.

Ha $\xi \in T_eG = \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$, és ξ_{ij} a mátrix i. sorának j. eleme, akkor

$$\xi_M = \sum_{i,j=1}^{3} \left(\xi_{ij} q_j \frac{\partial}{\partial q_i} - \xi_{ji} p_j \frac{\partial}{\partial p_i} \right), \tag{3.42}$$

így

$$\begin{aligned} \hat{J}(\xi) &= \iota_{\xi_M}\theta_0 \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{3} p_k \left(\xi_{ij} q_j \iota_{\frac{\partial}{\partial q_i}} \mathrm{d}q_k - \xi_{ji} p_j \iota_{\frac{\partial}{\partial p_i}} \mathrm{d}q_k \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{3} p_i \xi_{ij} q_j = p(\xi q) \end{aligned} \tag{3.43}$$

a momentum-leképezés.

Tekintsük most csak az $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^3) \leq G$ részcsoport hatását, ekkor $\xi \in T_e\mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$, azaz $\xi = -\xi^T$ antiszimmetrikus mátrix. Ezek háromdimenziós Lie-algebrát alkotnak, aminek egy bázisa

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \xi_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \xi_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.44}$$

A momentum-leképezés ezeken kiértékelve a

$$\begin{aligned} \hat{J}(\xi_1) &= q_2 p_3 - q_3 p_2 \\ \hat{J}(\xi_2) &= q_3 p_1 - q_1 p_3 \\ \hat{J}(\xi_3) &= q_1 p_2 - q_2 p_1 \end{aligned} \tag{3.45}$$

függvényeket adja, ezek éppen az impulzusmomentum komponensei.

3.4. Fázistér és Hamilton-függvény redukciója

Ebben a szakaszban arról lesz szó, hogy hogyan lehet egy szimmetriával rendelkező mechanikai rendszer vizsgálatát visszavezetni egy alacsonyabb dimenziós fázistérrel rendelkező rendszerére. Ebben központi szerepe van az előző szakaszban megismert momentum-leképezésnek. Első lépésként csak a fázistérrel foglalkozunk, a redukcióról szóló tétel bizonyításához szükségünk lesz a következő lemmára.

3.4.1. Lemma. *Legyen (M, ω) szimplektikus sokaság, amin a G Lie-csoport szimplektikusan hat, és legyen $J : M \to T_e^*G$ Ad^*-ekvivariáns momentum-leképezés, $\mu \in T_e^*G$. Ekkor tetszőleges $x \in J^{-1}(\mu)$ mellett az alábbiak teljesülnek:*

1. $T_x(G_\mu \cdot x) = T_x(G \cdot x) \cap T_x(J^{-1}(\mu))$
2. $T_x(J^{-1}(\mu))$ *a* $T_x(G \cdot x)$ *ortogonális komplementere (ω szerint).*

Bizonyítás. 1. Azt kell belátni, hogy $\xi_M(x) \in T_x(J^{-1}(\mu))$ pontosan akkor teljesül, ha $\xi \in T_eG_\mu$. Az ekvivariancia miatt

$$T_xJ(\xi_M(x)) = \xi_{T_e^*G}(\mu), \tag{3.46}$$

így $\xi_M(x) \in T_x(J^{-1}(\mu)) = \ker T_xJ$ pontosan akkor igaz, ha $\xi_{T_e^*G}(\mu) = 0$, azaz ha $\mu = \mathrm{Ad}^*_{\exp(-t\xi)}\mu$ minden $t \in \mathbb{R}$-re. Ez akkor teljesül, ha $\xi \in T_eG_\mu$.

2. Ha $\xi \in T_eG$ és $v \in T_pM$, akkor

$$\omega(\xi_M(x), v) = (\mathrm{d}\hat{J}(\xi))(x)(v) = (T_xJ \cdot v)(\xi). \tag{3.47}$$

Így $v \in T_x(J^{-1}(\mu)) = \ker T_xJ$ pontosan akkor, ha minden $\xi \in T_eG$ esetén $\omega(\xi_M(x), v) = 0$, azaz ha v ω-ortogonális a $T_x(G \cdot x) = \{\xi_M(x) | \xi \in T_eG\}$ altérre.

□

3.4.2. Tétel. *Legyen (M, ω) szimplektikus sokaság és $J : M \to T_e^*G$ Ad^*-ekvivariáns momentum-leképezés a G Lie-csoport szimplektikus hatásához. Tegyük fel, hogy $\mu \in T_e^*G$ a J leképezésnek reguláris értéke, és G_μ hatása a $J^{-1}(\mu)$ sokaságon szabad és proper. Ekkor az $M_\mu = J^{-1}(\mu)/G_\mu$ hányadoson létezik egyetlen olyan ω_μ szimplektikus forma, amelyre*

$$\pi_\mu^*\omega_\mu = i_\mu^*\omega, \tag{3.48}$$

ahol $\pi_\mu : J^{-1}(\mu) \to M_\mu$ a kanonikus projekció és $i_\mu : J^{-1}(\mu) \to M$ a beágyazás.

Bizonyítás. $v \in T_x(J^{-1}(\mu))$ esetén jelölje $[v] = T\pi_\mu(v)$ a megfelelő ekvivalenciaosztályt a $T_xJ^{-1}(\mu)/T_x(G_\mu \cdot x)$ térben. Az előző lemma második része miatt

$$\omega_\mu([v], [w]) = \omega(v, w) \tag{3.49}$$

jól definiált, így létezik ω_μ. Mivel $T\pi_\mu$ szürjektív, ω_μ egyértelmű is, és sima, mivel $\pi_\mu^*\omega_\mu$ sima.

$$\mathrm{d}\pi_\mu^*\omega_\mu = \mathrm{d}i_\mu^*\omega = i_\mu^*\,\mathrm{d}\omega = 0 \tag{3.50}$$

alapján $\mathrm{d}\omega_\mu = 0$, ismét használva $T\pi_\mu$ szürjektivitását.

Végül ha $\omega_\mu([v], [w]) = 0$ minden $w \in T_xJ^{-1}(\mu)$ esetén, akkor $\omega(v, w) = 0$, tehát az előző lemma második fele alapján $v \in T_x(G \cdot x)$. Ekkor viszont az első rész szerint $v \in T_x(G_\mu \cdot x)$, azaz $[v] = 0$, így ω_μ nemelfajuló. □

A redukcióval a dimenzió csökken: $\dim M_\mu = \dim M - \dim G - \dim G_\mu$. Az új dimenzió is páros, mivel a sokaságon van szimplektikus forma.

3.4.3. Példa. Legyen (M, ω) szimplektikus sokaság, és legyenek $K_1, \ldots, K_k \in C^\infty(M)$ olyanok, hogy $\{K_i, K_j\} = 0$ minden $i, j = 1, \ldots, k$ esetén. Ekkor az $X_{K_1}, \ldots, X_{K_k}$ vektormezők kommutálnak, tehát együtt $G = \mathbb{R}^k$ egy hatását határozzák meg. Ekkor $J = K_1 \times \cdots \times K_k$ Ad^*-ekvivariáns momentum-leképezés (a koadjungált hatás triviális, mert $\mathbb{R}$ kommutatív). Ha μ a J egy reguláris értéke, akkor $G_\mu = G$ alapján $J^{-1}(\mu)/G$ $2n - 2k$ dimenziós szimplektikus sokaság.

Ha a szimplektikus sokaságon adott egy Hamilton-függvény is, amely invariáns a csoport hatására, akkor a fázistér redukciója után keletkező sokaságon indukálódik egy kanonikus Hamilton-függvény. Erről szól a következő tétel.

3.4.4. Tétel. *Legyen (M, ω) szimplektikus sokaság, amin adott a G Lie-csoport szimplektikus hatása, $J : M \to T_e^*G$ Ad^*-ekvivariáns momentum-leképezés. Legyen μ J reguláris értéke és tegyük fel, hogy G_μ hatása a $J^{-1}(\mu)$ sokaságon szabad és proper. Legyen továbbá $H : M \to \mathbb{R}$ G-invariáns Hamilton-függvény, és legyen F_t az X_H vektormező folyama. Ekkor F_t önmagába képezi a $J^{-1}(\mu)$ részsokaságot és ott kommutál G_μ hatásával, tehát indukál egy R_t folyamot az M_μ sokaságon, amire $\pi_\mu \circ F_t = R_t \circ \pi_\mu$. Ez egy Hamilton-vektormező folyama, aminek egy H_μ Hamilton-függvényére $H_\mu \circ \pi_\mu = H \circ i_\mu$.*

Bizonyítás. Jelölje F_t az X_H folyamát a $J^{-1}(\mu)$ sokaságon is, ekkor $\pi_\mu \circ F_t = R_t \circ \pi_\mu$, így

$$\begin{aligned} \pi_\mu^* R_t^* \omega_\mu &= F_t^* \pi_\mu^* \omega_\mu \\ &= F_t^* i_\mu^* \omega \\ &= i_\mu^* \omega \\ &= \pi_\mu^* \omega_\mu. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Mivel π_μ szürjektív szubmerzió, ebből $R_t^* \omega_\mu = \omega_\mu$ következik.

A $\pi_\mu^* H_\mu = i_\mu^* H$ feltétel egyértelműen meghatározza a H_μ függvényt. Ha $v \in TJ^{-1}(\mu)$ és Y jelöli R_t generátorát, akkor

$$\begin{aligned} \mathrm{d}H_\mu T\pi_\mu(v) &= i_\mu^* \,\mathrm{d}H(v) \\ &= i_\mu^* \omega(X_H, v) \\ &= \pi_\mu^* \omega_\mu(X_H, v) \\ &= \omega_\mu(Y, T\pi_\mu(v)), \end{aligned} \tag{3.52}$$

mivel $T\pi_\mu \circ X_H = Y \circ \pi_\mu$. □

A tételben szereplő H_μ neve *redukált Hamilton-függvény.*

3.4.5. Példa (Mozgás a síkon centrális erőtérben)**.** Legyen $Q = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $M = T^*Q \simeq Q \times \mathbb{R}^2$, a koordináták q_1, q_2, p_1, p_2, $\omega = q_1 \wedge p_1 + q_2 \wedge p_2$. Tekintsük $G = \mathrm{SO}(2)$ szokásos hatását a Q sokaságon, és a koérintőnyalábon indukált hatást. Ekkor $T_eG \simeq \mathbb{R}$, egy azonosítás a t valós számhoz a

$$\begin{bmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{bmatrix} \tag{3.53}$$

mátrixot rendeli. Ekkor $J = q_1 p_2 - q_2 p_1$ Ad^*-ekvivariáns momentum-leképezés.

Ennek minden $\mu \in \mathbb{R}$ reguláris értéke. $i_\mu^* q_1, i_\mu^* q_2, i_\mu^* p_1$ egy koordinátázást adnak $J^{-1}(\mu)$ azon nyílt és sűrű részhalmazán, ahol $q_0 \neq 0$, a differenciálformákat elég ezen tekinteni. Az egyszerűség kedvéért i_μ^*-t 0-formák előtt elhagyva

$$p_2 = \frac{\mu + q_2 p_1}{q_1} \tag{3.54}$$

írható, emiatt

$$\begin{aligned} i_\mu^* \omega &= \mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}p_1 + \mathrm{d}q_2 \wedge \mathrm{d}\left(\frac{\mu + q_2 p_1}{q_1}\right) \\ &= \mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}p_1 + \mathrm{d}q_2 \wedge \mathrm{d}\left(-\frac{\mu + q_2 p_1}{q_1^2}\,\mathrm{d}q_1 + \frac{p_1}{q_1}\,\mathrm{d}q_2 + \frac{q_2}{q_1}\,\mathrm{d}p_1\right) \\ &= \mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}p_1 + \frac{q_2}{q_1}\,\mathrm{d}q_2 \wedge \mathrm{d}p_1 + \frac{\mu + q_2 p_1}{q_1^2}\,\mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}q_2. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Mivel G most kommutatív, a koadjungált hatás triviális, így $G_\mu = G$. G hatása szabad az egész M sokaságon, így a $J^{-1}(\mu)$ részsokaságon is. Mivel a hatás a q és p síkvektorok forgatása, egy orbit mentén $|q|$ és $(q \cdot p)/|q|$ állandók. Válasszuk ezeket koordinátáknak az $M_\mu = J^{-1}(\mu)/G_\mu$ hányadoson, azaz legyen

$$\begin{aligned} \pi_\mu^* r &= |q| \\ \pi_\mu^* p_r &= \frac{q_1 p_1 + q_2 p_2}{|q|} = \frac{q_1^2 p_1 + q_2^2 p_1 + \mu q_2}{q_1 |q|} = |q| \frac{p_1}{q_1} + \frac{\mu}{|q|} \frac{q_2}{q_1}. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Mivel $J^{-1}(\mu)/G_\mu \simeq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ kétdimenziós, létezik rajta egy egyértelmű f függvény, amivel $\omega_\mu = f\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}p_r$. Ezzel

$$\begin{aligned} \pi_\mu^* \omega_\mu &= \pi_\mu^* f\,\mathrm{d}(\pi_\mu^* r) \wedge \mathrm{d}(\pi_\mu^* p_r) \\ &= \pi_\mu^* f\,\mathrm{d}\left(|q|\right) \wedge \mathrm{d}\left(|q|\frac{p_1}{q_1} + \frac{\mu}{|q|}\frac{q_2}{q_1}\right) \\ &= \pi_\mu^* f \left(\frac{q_1}{|q|}\,\mathrm{d}q_1 + \frac{q_2}{|q|}\,\mathrm{d}q_2\right) \\ &\wedge \left(-\frac{q_2(q_2 p_1 + \mu)|q|^2 + q_1^2 q_2 \mu}{q_1^2 |q|^3}\,\mathrm{d}q_1 + \frac{|q|^2 q_2 p_1 + q_1^2 \mu}{q_1 |q|^3}\,\mathrm{d}q_2 + \frac{|q|}{q_1}\,\mathrm{d}p_1\right) \\ &= \pi_\mu^* f \left(\mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}p_1 + \frac{q_2}{q_1}\,\mathrm{d}q_2 \wedge \mathrm{d}p_1 + \frac{q_2 p_1 + \mu}{q_1^2}\right), \end{aligned} \tag{3.57}$$

amiből $f = 1$ következik, tehát $\omega_\mu = \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}p_r$.

Legyen a Hamilton-függvény $H = \frac{|p|^2}{2m} + V(|q|)$ alakú, ahol $V : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sima függvény. Ez invariáns G hatására, tehát meghatároz egy $H_\mu : M_\mu \to \mathbb{R}$ redukált Hamilton-függvényt:

$$H_\mu = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\mu^2}{2m}\frac{1}{r^2} + V(r). \tag{3.58}$$

Ez szintén kinetikus és potenciális energia összege, ha bevezetjük a

$$V_\mu = \frac{\mu^2}{2m}\frac{1}{r^2} + V(r) \tag{3.59}$$

redukált potenciált.

A redukált rendszer folyamának ismeretében meg lehet határozni az eredeti rendszer folyamát is a momentum-leképezés szintfelületén. Legyen $x_0 \in J^{-1}(\mu)$ és $c(t)$ X_H, $[c(t)]$ pedig X_{H_μ} integrálgörbéje, $c(0) = x_0$. Válasszunk egy tetszőleges $d(t) \in J^{-1}(\mu)$ görbét, amire $d(0) = x_0$ és $[d(t)] = [c(t)]$. Ekkor $c(t) = \Phi_{g(t)}(d(t))$ valamilyen $g(t) \in G_\mu$ görbével, amit meg kell határozni. Ehhez használjuk, hogy

$$X_H(c(t)) = c'(t) = T\Phi_{g(t)}(d(t)) \cdot d'(t) + T\Phi_{g(t)}(d(t)) \cdot \left(TL_{g(t)^{-1}} \cdot g'(t)\right)_M (d(t)), \tag{3.60}$$

és így X_H $\Phi_{g(t)}$-invarianciája miatt

$$X_H(d(t)) = d'(t) + \left(TL_{g(t)^{-1}} g'(t)\right)_M (d(t)). \tag{3.61}$$

Ebben csak g és d szerepel, g két lépésben meghatározható, először $\xi(t)_M(d(t)) = X_H(d(t)) - d'(t)$, majd $g'(t) = TL_{g(t)}\xi(t)$ megoldásával.

Fontos speciális eset amikor a redukált fázistéren az integrálgörbe konstans.

3.4.6. Definíció. 3.4.4 feltételei mellett az $x \in M$ *relatív egyensúlyi helyzet*, ha $\pi_\mu(x) \in M_\mu$ zérushelye az X_{H_μ} redukált Hamilton-vektormezőnek, ahol $\mu = J(x)$.

A definícióból adódik, hogy x pontosan akkor relatív egyensúlyi helyzet, ha $\pi_\mu(x)$ H_μ egy kritikus pontja.

3.4.7. Állítás. *A 3.4.4 tétel feltételei mellett legyen $x \in J^{-1}(\mu)$. Legyen F_t az X_H vektormező folyama és $\Phi : G \times M \to M$ a szimplektikus hatás. Ekkor a következők ekvivalensek:*

1. *x relatív egyensúlyi helyzet*
2. *létezik $g : \mathbb{R} \to G$ egyparaméteres részcsoport, amivel minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $F_t(x) = \Phi(g(t), x)$*
3. *létezik $\xi \in T_eG$, amivel $X_H(x) = \xi_M(x)$.*

Bizonyítás. x pontosan akkor relatív egyensúlyi helyzet, ha $\pi_\mu(F_t(x)) = \pi_\mu(x)$. Mivel G_μ hatása szabad a $J^{-1}(\mu)$ sokaságon, létezik egy egyértelmű $g(t) \in G_\mu$ görbe, amivel $F_t(x) = \Phi(g(t), x)$. $F_{t+s} = F_t \circ F_s$ miatt $g(t+s) = g(t)g(s)$, így $g(t)$ egyparaméteres részcsoport.

Megfordítva, ha $F_t(x) = \Phi(g(t), x)$, ahol $g(t)$ egyparaméteres részcsoport, akkor J ekvivarianciája alapján $\Phi(g, x) \in J^{-1}(\mu)$ pontosan akkor teljesül, ha $g \in G_\mu$. J mozgásállandó, így $g(t) \in G_\mu$ minden $t \in \mathbb{R}$ mellett, tehát minden t-re $\pi_\mu(F_t(x)) = \pi_\mu(x)$.

A második és harmadik állítás ekvivalenciája abból következik, hogy minden egyparaméteres részcsoport $t \mapsto \exp t\xi$ alakú. $\square$

3.4.8. Példa. Legyen $Q = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $M = TQ \simeq (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^2$, $H : M \to \mathbb{R}$ mint a 3.4.5 példában. A redukált Hamilton-függvénynek (r, p_r) akkor kritikus pontja, ha $p_r = 0$ és

$$-\frac{\mu^2}{mr^3} + V'(r) = 0. \tag{3.62}$$

Az eredeti M sokaságon ennek egy őse $x = (r, 0, 0, \mu/r)$, tehát ez relatív egyensúlyi helyzet.

Legyen $\xi \in \mathbb{R}$ az egyparaméteres részcsoport generátora, azaz

$$F_t(x) = \exp(\xi t) \cdot x = \left(r \cos \xi t, r \sin \xi t, -\frac{\mu}{r} \sin \xi t, \frac{\mu}{r} \cos \xi t \right). \tag{3.63}$$

A Hamilton-vektormező

$$X_H = \frac{p_1}{m} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{p_2}{m} \frac{\partial}{\partial q_2} - \frac{q_1}{|q|} V'(|q|) \frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{q_2}{|q|} V'(|q|) \frac{\partial}{\partial p_2}, \tag{3.64}$$

tehát

$$\xi = \frac{\mu}{mr^2} = \frac{rV'(r)}{\mu}. \tag{3.65}$$

Példaként válasszuk a $V(r) = -Gm_0 \frac{m}{r}$ gravitációs potenciált, ekkor

$$r = \frac{\mu^2}{Gm_0 m^2} \tag{3.66}$$

és

$$\xi = \frac{G^2 m^3 m_0^2}{\mu^3}. \tag{3.67}$$

A periódusidő $2\pi/\xi$, ez rögzített m, m_0, G mellett arányos $r^{3/2}$-nel.

A. függelék

Vegyes felhasznált fogalmak

A.1. Csoportok és hatásaik

A.1.1. Definíció. A $(G, \cdot, e, ^{-1})$ négyes *csoport*, ha G halmaz, $\cdot : G \times G \to G$ asszociatív művelet, amire $e \in G$ *egységelem*, azaz minden $g \in G$ esetén $e \cdot g = g = g \cdot e$, és $^{-1}$ *inverz*, azaz $g \cdot g^{-1} = e = g^{-1} \cdot g$. A csoport *kommutatív*, ha $\forall g_1, g_2 \in G : g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$.

Ha $(G_1, \cdot, e_1, ^{-1})$ és $(G_2, \cdot, e_2, ^{-1})$ csoportok, akkor a $\varphi : G_1 \to G_2$ leképezés *homomorfizmus*, ha $\varphi(e_1) = e_2$ és minden $g, g' \in G_1$ esetén $\varphi(g \cdot g') = \varphi(g) \cdot \varphi(g')$ teljesül.

Csoportokra gyakran az egyszerűség kedvéért az alaphalmaz szimbólumával hivatkozunk, és a művelet (szorzás) jelét elhagyjuk. A szorzás egyértelműen meghatározza az egységelemet és az inverz leképezést.

A.1.2. Definíció. Legyen G csoport, S halmaz. Egy $\Phi : G \times S \to S$, $(g, x) \mapsto \Phi_g(x)$ leképezés *hatás*, ha minden $g, g' \in G$ és $x \in S$ esetén

1. $\Phi_g(\Phi_{g'}(x)) = \Phi_{gg'}(x)$
2. $\Phi_e(x) = x$

teljesül.

Amint arra a jelölés is utal, egy hatást felfoghatunk $\Phi : G \to S_S$ leképezésként is, ahol S_S jelöli az $S \to S$ bijekciók csoportját a kompozícióval mint művelettel. A feltételek ekkor azt jelenti, hogy Φ homomorfizmus. Ha a környezetből kiderül, hogy melyik hatásra gondolunk, akkor $\Phi_g(x)$ helyett a $g \cdot x$ jelölést is szokás használni.

A.1.3. Definíció. Legyen $\Phi : G \times S \to S$ hatás, $x \in S$. Ekkor x *orbitja* (pályája) a

$$G \cdot x := \{\Phi_g(x) | g \in G\} \tag{A.1}$$

halmaz.

x *stabilizátora* a

$$G_x := \{g \in G | \Phi_g(x) = x\} \tag{A.2}$$

részcsoport.

Ha $x_1, x_2 \in S$, akkor vagy $G \cdot x_1 = G \cdot x_2$ vagy $(G \cdot x_1) \cap (G \cdot x_2) = \emptyset$. Eszerint az orbitok S egy partícióját adják.

A.1.4. Definíció. Egy $\Phi : G \times S \to S$ hatás *tranzitív*, ha egyetlen orbit van, azaz minden $x \in S$ elemre $G \cdot x = S$.

A hatás *hű*, ha $g \mapsto \Phi_g$ injektív, és *szabad*, ha minden $x \in S$ esetén $g \mapsto \Phi_g(x)$ injektív.

A.2. Lineáris algebra

A.2.1. Definíció. Legyen $\mathbb{K}$ test. A $(V, +, \cdot, 0)$ négyes $\mathbb{K}$ feletti *vektortér*, ha V kommutatív csoport a $+ : V \times V \to V$ művelettel, 0 egységelem, és $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ olyan leképezés, amire a következők teljesülnek:

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall v \in V : \alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$
2. $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$
3. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall v \in V : (\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$
4. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall v, w \in V : \alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$

V elemeit *vektoroknak* nevezzük.

Ha nem okoz félreértést, vektorterekre gyakran az alaphalmaz szimbólumával hivatkozunk, és a szorzás $\cdot$ jelét elhagyjuk.

Minden test vektortér önmaga felett az összeadás és szorzás műveletekkel.

A.2.2. Definíció. Ha V és W vektorterek, akkor egy $\varphi : V \to W$ leképezést *lineáris leképezésnek* nevezünk, ha csoporthomomorfizmus és minden $\alpha \in \mathbb{K}$, $v \in V$ esetén $\varphi(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot \varphi(v)$. a $V \to W$ lineáris leképezések halmazát $\mathrm{Hom}(V, W)$ jelöli.

$\varphi : V \to W$ *izomorfizmus*, ha bijektív lineáris leképezés. V és W izomorf vektorterek, ha létezik közöttük izomorfizmus.

A V vektortér *duálisa* $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$.

A $\mathrm{Hom}(V, W)$ halmaz vektortér a pontonkénti összeadás és szorzás műveletekkel. Speciálisan V^* is vektortér.

A.2.3. Definíció. Legyen V vektortér, és $(v_i)_{i \in I} \in V^I$ vektorok egy családja. Ezen vektorok *lineáris kombinációi* alatt az olyan

$$\sum_{i \in I} \alpha_i v_i \tag{A.3}$$

alakú összegeket értjük, amelyekben $\alpha_i \neq 0$ csak véges sok i esetén teljesül. Az $\alpha_i \in \mathbb{K}$ számokat a lineáris kombináció *együtthatóinak* nevezzük.

$(v_i)_{i \in I}$ *generátorrendszer*, ha V minden eleme előáll ezek lineáris kombinációjaként. $(v_i)_{i \in I}$ *lineárisan független*, ha egy lineáris kombinációjuk csak úgy lehet a 0 vektor, ha minden együttható 0. A lineárisan független generátorrendszerek neve *bázis*.

Minden V vektort;rnek létezik bázisa, és bármely két bázisának számossága megegyezik, ez a közös számosság a vektortér *dimenziója* ($\dim_{\mathbb{K}} V$, ha nem okoz félreértést, akkor $\mathbb{K}$ elhagyható). Két vektortér pontosan akkor izomorf, ha a dimenziójuk megegyezik. Azonban ilyenkor végtelen sok izomorfizmus található (ha a dimenzió nem 0), amelyek között általában nincsen kitüntetett.

$\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K} = 1$, mivel az egyelemű (1) család bázis. Ha V és W dimenziója véges, akkor $\dim \mathrm{Hom}(V, W)$ a két dimenzió szorzata. Speciálisan ha $\dim V < \infty$, akkor $\dim V^* = \dim V$, de nincsen kitüntetett izomorfizmus[1].

A.2.4. Definíció. Vektorterek egy $(V_i)_{i\in I}$ családjának *direkt összege* alatt a

$$\bigoplus_{i\in I} V_i := \left\{ (v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i \middle| |\{i \in I | v_i \neq 0\}| < \infty \right\} \tag{A.4}$$

halmazt értjük a komponensenkénti műveletekkel. A vektorterek *direkt szorzata* a $\prod_{i\in I} V_i$ halmaz a komponensenkénti műveletekkel.

Ha I véges halmaz, akkor a direkt összeg és a direkt szorzat izomorf egymással.

A.2.5. Definíció. Legyenek V, W vektorterek. Egy U vektortér a $\varphi : V \times W \to U$ bilineáris leképezéssel a V és W *tenzorszorzata*, ha bármely Z vektortér és $h : V \times W \to Z$ bilineáris leképezés esetén létezik egy egyértelmű $\tilde{h} : U \to Z$ lineáris leképezés, amelyre $h = \tilde{h} \circ \varphi$.

A tenzorszorzat kitüntetett izomorfizmus erejéig egyértelmű, és $V \otimes W$ jelöli. Ha $v \in V$ és $w \in W$, akkor a $\varphi(v, w)$ vektort $v \otimes w$ jelöli, az ilyeneket *elemi tenzornak* nevezzük.

Hasonlóan definiálhatjuk vektorterek véges családjának tenzorszorzatát, ez (kitüntetett izomorfizmus erejéig) asszociatív. Számolásoknál hasznos az a tény, hogy ha $\{v_i\}_{i\in I}$ és $\{w_j\}_{j\in J}$ a V, W vektorterek egy-egy bázisa, akkor $\{v_i \otimes w_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ a $V \otimes W$ egy bázisa. Ebből az is következik, hogy $\dim(V \otimes W) = \dim V \dim W$.

A.2.6. Definíció. Legyen V vektortér. Ekkor az S_n csoportnak megadható egy hatása a

$$V^{\otimes n} := \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n \text{ tényező}} \tag{A.5}$$

vektortéren

$$\pi \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{\pi^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\pi^{-1}(n)} \tag{A.6}$$

módon. Az

$$\mathrm{S}^n(V) = \left\{ v \in V^{\otimes n} \middle| \forall \pi \in S_n : \pi \cdot v = v \right\} \tag{A.7}$$

és

$$\Lambda^n(V) = \left\{ v \in V^{\otimes n} \middle| \forall \pi \in S_n : \pi \cdot v = \mathrm{sign}(\pi) v \right\} \tag{A.8}$$

alterek neve *szimmetrikus*- és *külső hatvány.*

---

[1] Viszont V és V^{**} között van kitüntetett leképezés: ha $v \in V$, akkor $\mathrm{ev}_v : V^* \to \mathbb{K}$, $\mathrm{ev}_v(f) = f(v)$ értelmes, és $v \mapsto \mathrm{ev}_v$ izomorfizmus. A „kitüntetettség” matematikailag úgy fogalmazható meg, hogy az $\mathrm{id}_{\mathbf{FinVect}}$ és $-^{**}$ funktorok között létezik természetes izomorfizmus.

A $(v, w) \mapsto v \otimes w$ bilineáris leképezés indukál egy szorzást a külső hatványok direkt összegén, ezzel

$$\Lambda^\bullet V := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Lambda^n(V) \tag{A.9}$$

fokszámozott algebra, a V *külső algebrája.*

A.2.7. Definíció. Egy V $\mathbb{R}$ feletti vektortéren $g : V \times V \to \mathbb{R}$ *belső szorzás* (vagy *skaláris szorzás*), ha szimmetrikus, mindkét változóban lineáris, és pozitív definit, azaz $\forall v \in V : g(v, v) \geq 0$, és itt egyenlőség csak $v = 0$ esetén teljesül.

Egy $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ leképezés *szimplektikus forma*, ha a következők teljesülnek:

1. $\forall v \in V : \omega(v, v) = 0$ (alternáló)
2. $\forall v \in V \setminus \{0\} \exists w \in V : \omega(v, w) \neq 0$ (gyengén nemelfajuló)

Ha egy V véges dimenziós vektortéren adott egy belső szorzás vagy egy szimplektikus forma, akkor megadható egy kitüntetett izomorfizmus V és V^* között $v \mapsto g(v, \cdot) =: v^{\flat_g}$ illetve $v \mapsto \omega(v, \cdot) = v^{\flat_\omega}$ módon. Az inverz leképezés $f \mapsto f^{\sharp_g}$ illetve $f \mapsto f^{\sharp_\omega}$. Ilyenkor a két vektorteret azonosíthatjuk a kitüntetett izomorfizmus segítségével.

A.3. Lie-algebrák

A.3.1. Definíció. $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ *Lie-algebra*, ha $\mathfrak{g}$ vektortér, $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ mindkét változóban lineáris, és teljesülnek rá a következők:

1. $\forall x \in \mathfrak{g} : [x, x] = 0$ (alternáló)
2. $\forall x, y, z \in \mathfrak{g} : [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ (Jacobi-azonosság)

Ha $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_\mathfrak{g})$ és $(\mathfrak{h}, [\cdot, \cdot]_\mathfrak{h})$ Lie-algebrák, akkor egy $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ leképezés *homomorfizmus*, ha lineáris és minden $x, y \in \mathfrak{g}$ esetén

$$\varphi([x, y]_\mathfrak{g}) = [\varphi(x), \varphi(y)]_\mathfrak{h}$$

teljesül.

Ha nem okoz félreértést, akkor egy Lie-algebrára az alaphalmaz szimbólumával is szokás hivatkozni.

A.3.2. Példa. Ha A (asszociatív) algebra, akkor $(A, [\cdot, \cdot])$ Lie-algebra, ahol $[x, y] = xy - yx$.

A.4. Affin terek

Ebben a szakaszban minden szereplő vektortér és lineáris leképezés egy közös $\mathbb{K}$ test felett értendő.

A.4.1. Definíció. Egy $(\mathbf{V}, \Phi)$ pár *affin tér* a V vektortér felett, ha $\Phi : V \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ a V additív csoportjának szabad és tranzitív hatása.

Affin terekre gyakran az alaphalmaz szimbólumával hivatkozunk, ha ez nem okoz félreértést. $\Phi_v(x)$ szokásos jelölése $x + v$. Ha $x, y \in \mathbf{V}$, akkor létezik egy egyértelmű $v \in V$ vektor, amire $y = x + v$. Ezt az egyértelmű vektort $y - x$ jelöli.

A.4.2. Példa. Ha V vektortér, akkor (V, Φ) affin tér, ha $\Phi_v(w) = v + w$.

A.4.3. Definíció. Legyenek $\mathbf{V}$ és $\mathbf{W}$ affin terek a V és a W vektorterek felett. Ha $f : V \to W$ lineáris leképezés, akkor egy $\mathbf{f} : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ leképezés *affin* f felett, ha minden $x, y \in \mathbf{V}$ esetén

$$\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(y) = f(x - y) \tag{A.10}$$

teljesül.

Ha egy leképezés affin két lineáris leképezés felett, akkor a két lineáris leképezés megegyezik.

A.4.4. Példa. Ha V vektortér, akkor az $f : V \to V$ lineáris leképezés feletti affin leképezések éppen a $v \mapsto f(v) + w$ alakú leképezések, ahol $w \in V$.

A.5. Általános topológia

A.5.1. Definíció. Egy $(X, \mathcal{T}_X)$ pár *topologikus tér*, ha X halmaz, $\mathcal{T}_X \in 2^X$ és az alábbiak teljesülnek:

1. $\emptyset \in \mathcal{T}_X$, $X \in \mathcal{T}_X$
2. $\forall (U_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}_X^I : \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_X$
3. $\forall U, V \in \mathcal{T}_X : U \cap V \in \mathcal{T}_X$

$\mathcal{T}_X$ elemeit *nyílt halmazoknak* nevezzük.

Ha $(X, \mathcal{T}_X)$ és $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologikus terek, akkor egy $f : X \to Y$ leképezés *folytonos*, ha $\forall U \in \mathcal{T}_Y : f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$.

Egy $f : X \to Y$ leképezés *homeomorfizmus*, ha folytonos, bijektív, és az inverze is folytonos.

Ha nem okoz félreértést, akkor topologikus terekre gyakran az alaphalmaz szimbólumával hivatkozunk.

Ha $(X, \mathcal{T}_X)$ topologikus tér, $A \subseteq X$ részhalmaz, akkor azon tekinthetjük a $\mathcal{T}_A := \{U \cap A | U \in \mathcal{T}_X\}$ *altértopológiát*, ekkor azt mondjuk, hogy az $(A, \mathcal{T}_A)$ topologikus tér az $(X, \mathcal{T}_X)$ egy *altere*.

A.5.2. Példa. Ha (X, ρ) metrikus tér (azaz $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ nemnegatív, $\rho(x, y) = 0 \implies x = y$, szimmetrikus, teljesíti a $\rho(x, x) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ háromszög-egyenltőtlenséget), akkor topologikus tér is a nyílt golyók által generált topológiával, vagyis azzal a legkisebb topológiával, amelyik tartalmaz minden

$$B_r(x) = \{y \in X | \rho(x, y) < r\} \tag{A.11}$$

alakú halmazt.

A.5.3. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{T}_X)$ topologikus tér. Egy $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}_X$ részhalmaz (nyílt) *fedés*, ha $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X$. $\mathcal{U}'$ az $\mathcal{U}$ fedés *részfedése*, ha fedés és $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$.

Egy $(X, \mathcal{T}_X)$ topologikus tér *kompakt*, ha minden nyílt fedésének van véges részfedése. Egy topologikus tér egy részhalmaza kompakt, ha az altértopológiával ellátva kompakt.

Egy $f : X \to Y$ leképezés *proper*, ha minden $K \subseteq Y$ kompakt részhalmaz esetén $f^{-1}(K)$ kompakt.

A.5.4. Definíció. Egy $(X, \mathcal{T}_X)$ topologikus tér *Hausdorff*, ha bármely $x, y \in X$, $x \neq y$ esetén létezik olyan $U, V \in \mathcal{T}_X$, amelyekre $U \cap V = \emptyset$ és $x \in U$, $y \in V$ teljesül.

A.5.5. Definíció. Egy $(X, \mathcal{T}_X)$ topologikus térnek $\mathcal{B}$ *bázisa*, ha $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_X$ és minden $U \in \mathcal{T}_X$ esetén

$$U = \bigcup_{\substack{V \in \mathcal{B} \\ V \subseteq U}} V \tag{A.12}$$

teljesül.

X teljesíti a *második megszámlálhatósági axiómát*, ha létezik megszámlálható bázisa.

B. függelék

Differenciálgeometriai alapok

B.1. Differenciálható sokaságok

A mechanikai rendszerek konfigurációs tere illetve fázistere (vagyis a lehetséges helyzetek és sebességek illetve impulzusok tere) gyakran nem eukideszi tér. Ennek oka lehet például az, hogy a rendszer részei között valamilyen kényszerfeltétel teljesül a mogzás egésze alatt. Egy egyszerű példa a síkinga, ami egy elhanyagolható tömegű rúd végére erősített tömegpontból áll, amely a rúdra merőleges vízszintes tengely körül körbefordulhat. Ekkor a rendszer helyzetét egyértelműen jellemezhetjük az elfordulás szögével (egy referenciairányhoz, például a függőlegesen lefelé mutatóhoz képest), de a szöghöz 2π egy többszörösét hozzáadva ugyanazt a helyzetet jelentő értéket kapunk. Ez azt mutatja, hogy a lehetséges helyzetek valójában nem egyenest, hanem kört alkotnak. Hasonlóan, ha egy ugyanilyen rúd a rögzített végpont körül tetszőlegesen elfordulhat, akkor a konfigurációs tér egy gömb lesz.

A mozgásegyenlet megfogalmazásához szükség van a fentiekhez hasonló általánosabb terek közötti leképezések differenciálhatóságának fogalmára. Erre többféle definíció alkalmas, a legelterjedtebb a differenciálható sokaságok használata. Ennek alapgondolata az, hogy olyan tereket tekintünk, amelyeket euklideszi térrel homeomorf darabokból lehet összeragasztani olyan módon, hogy az átfedő részek között adódó leképezések diffeomorfizmusok. Ilyen módon a többváltozós analízis konstrukcióit használhatjuk az egyes darabokon, és a ragasztásra vonatkozó feltétel biztosítja, hogy ezek globálisan értelmezett objektumokká álljanak össze.

B.1.1. Definíció. Egy X topologikus téren az (U,φ) pár *térkép*, ha $U \subseteq X$ nyílt részhalmaz, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ homeomorfizmus a képhalmaza és U között, ahol n természetes szám[1]. Ha $x \in X$ és (U,φ) olyan térkép, hogy $x \in U$ és $\varphi(x) = 0$, akkor azt *x-beli térképnek* nevezzük

Az (U,φ) és a (V,ψ) térképek *kompatibilisek*, ha $\psi \circ (\varphi|_{U\cap V})^{-1}$ diffeomorfizmus. X feletti térképek egy $\mathcal{A} = \{(U_i,\varphi_i)|i \in I\}$ halmaza *atlasz* az X téren,

[1]Ha itt $\mathbb{R}^n$ helyett megengednénk tetszőleges Banach-teret, akkor a Banach-sokaságok definíciójához jutnánk.

ha $\bigcup_{i\in I} U_i = X$ és $i, j \in I \implies (U_i, \varphi_i)$ és (U_j, φ_j) kompatibilisek. $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ *ekvivalens atlaszok*, ha $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ atlasz. az $(M, \mathcal{A})$ pár *differenciálható sokaság*, ha M Hausdorff-féle topologikus tér, teljesül rá a második megszámlálhatósági axioma, és $\mathcal{A}$ (tartalmazás tekintetében) maximális atlasz az M téren.

A továbbiakban differenciálható sokaság helyett csak sokaságot írunk, ez nem fog félreértést okozni. Az egyszerűség kedvéért sokaságokra az alaphalmaz jelével is hivatkozunk.

A definícióból könnyen adódik, hogy az atlaszok ekvivalenciája egy ekvivalenciareláció, minden ekvivalenciaosztály pontosan egy maximális atlaszt tartalmaz, és ez éppen az osztályba tartozó összes atlasz uniója. Egy differenciálható sokaságot tehát egyértelműen jellemezhetünk úgy is, ha egy alkalmas topologikus téren egyetlen atlaszt megadunk.

Ha (U, φ) és (V, ψ) olyan térképek, hogy $U \cap V \neq \emptyset$, akkor φ és ψ érkezési terei ugyanolyan dimenziójúak. Eszerint minden differenciálható sokasághoz hozzárendelhetünk egy lokálisan konstans függvényt, aminek értéke az x pontban n, ha valamely (tehát bármely) olyan (U, φ) térkép esetén, amire $x \in U$, a φ érkezési tere n dimenziós. Ez a sokaság *dimenziófüggvénye.* Ha a sokaság össefüggő, akkor a dimenziófüggvény konstans, ennek értékét a sokaság *dimenziójának* nevezzük.

B.1.2. Példa. $\mathbb{R}$ az $(\mathbb{R}, \mathrm{id})$ térképből álló (atlasz által meghatározott maximális) atlasszal 1 dimenziós differenciálható sokaság.

Legyen $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \big| \|x\| = 1\}$, $U_\pm = S^n \setminus \{(0, \dots, 0, \pm 1)\}$, és tekintsük a

$$\varphi_\pm(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 \mp x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 \mp x_{n+1}} \right) \tag{B.1}$$

leképezéseket. Ekkor $\{(U_+, \varphi_+), (U_-, \varphi_-)\}$ atlasz S^n felett, S^n ezzel n dimenziós sokaság.

B.1.3. Definíció. Az $(M_1, \mathcal{A}_1)$ és $(M_2, \mathcal{A}_2)$ sokaságok *szorzata* az $M_1 \times M_2$ topologikus tér az $\{(U_1 \times U_2, \varphi_1 \times \varphi_2) | (U_i, \varphi_i) \in \mathcal{A}_i\}$ atlasszal.

Legyen $(M, \mathcal{A})$ sokaság. Egy $N \subseteq M$ részhalmaz *részsokaság*, ha minden $x \in N$ ponthoz létezik olyan (U, φ) x-beli térkép, amire $\varphi(N \cap U) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^n$, ahol n valamilyen természetes szám.

Ha $N \subseteq M$ részsokaság, akkor a definícióban szereplő térképek megszorításai egy atlaszt határoznak meg N felett. Az így kapott sokaság dimenziófüggvénye az x pontban az n értéket veszi fel.

B.1.4. Példa. $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ részsokaság.

B.1.5. Definíció. Legyen $(M, \mathcal{A})$ és $(N, \mathcal{B})$ két sokaság. Egy $f : M \to N$ függvény *r-szer folytonosan differenciálható* (C^r-osztályú, $r = \infty$ is megengedett), ha minden $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ esetén $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ C^r-osztályú. Az C^r-osztályú $M \to N$ függvények halmaza $C^r(M, N)$. Ha $N = \mathbb{R}$, akkor röviden $C^r(M)$ jelöli ezt a halmazt.

Egy $f : M \to N$ függvény *C^r-diffeomorfizmus*, ha C^r-osztályú, bijekció, és az inverze is C^r-osztályú.

Az atlaszbeli térképek kompatibilitásásból következik, hogy a differenciálhatóságot elég egy-egy atlasz térképein ellenőrizni, ebből automatikusan következik a maximális atlaszok térképeire is.

Ha $N \subseteq M$ részsokaság, akkor az $i : N \hookrightarrow M$ beágyazás C^∞-osztályú.

Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ sima függvény (görbe), akkor a t-beli deriváltja egy $\mathbb{R}^n$-beli vektor, ami a görbe $f(t)$ pontbeli érintőjének irányát adja (ha nem 0). Bár érintőegyenesekről nem lehet általában egy sokaságon beszélni, az érintővektorok egy lehetséges definíciója az eddig megismert fogalmak segítségével könnyedén megadható.

B.1.6. Definíció. Legyen $(M, \mathcal{A})$ sokaság. Egy $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ sima leképezés x-beli *lokális görbe*, ha $\epsilon > 0$, $\gamma(0) = x \in M$. A γ_1 és γ_2 x-beli görbék *ekvivalensek*, ha bármely (U, φ) x-beli térképre a $\varphi \circ \gamma_1$ és a $\varphi \circ \gamma_2$ kompozíciók 0-beli deriváltjai megegyeznek.

A γ x-beli görbe ekvivalenciaosztályát $[\gamma]_x$ jelöli, ezek halmaza T_xM. Az ekvivalenciaosztályok halmazát *érintőtérnek*, elemeit *érintővektoroknak* nevezzük.

A térképek kompatibilitása és a láncszabály miatt elég egy térképen ellenőrizni a lokális görbék ekvivalenciáját. Ha (U, φ) x-beli térkép, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, akkor T_xM azonosítható $\mathbb{R}^n$ elemeivel. Ha ugyanis $v \in \mathbb{R}^n$, akkor $\gamma_v : t \mapsto \varphi^{-1}(tv)$ x-beli lokális görbe, és ezek osztályai mind különbözőek, hiszen $\varphi \circ \gamma_v$ deriváltja 0-ban éppen v. Másrészt ha γ tetszőleges x-beli lokális görbe, és $\varphi \circ \gamma$ deriváltja 0-ban v, akkor γ és γ_v ekvivalensek.

Az így kapott $T_xM \to \mathbb{R}^n$ bijekció függ φ választásától, tehát nem kanonikus. Másrészt ha (U, φ) és (V, ψ) két x-beli térkép, akkor a kétféle azonosítás $\psi \circ \varphi^{-1}$ 0-beli deriváltjában tér el egymástól, tehát speciálisan lineáris. Eszerint van egy kitüntetett valós vektortér struktúra a T_xM halmazon, amivel a fenti módon kapott bijekciók lineárisak.

Ha $f : M \to \mathbb{R}$ differenciálható leképezés, γ x-beli görbe, akkor $f \circ \gamma$ 0-beli deriváltja csak $[\gamma]_x$-től függ. Ezt a többváltozós analízis mintájára az f iránymenti deriváltjának nevezzük. Eszerint egy $v \in T_xM$ érintővektor meghatároz egy $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ leképezést. Könnyen látható, hogy ez a leképezés x-beli deriváció, azaz lineáris és teljesíti a Leibniz-szabályt: $v(fg) = v(f)g(x) + f(x)v(g)$. Az érintőteret ezen az úton is definiálhattuk volna, vagyis az x-beli derivációk tereként, mivel minden ilyen előáll a fenti módon alkalmas γ görbével.

Ez az interpretáció motiválja a következő definíciót és jelöléseket.

B.1.7. Definíció. Legyen $p \in M$, (U, φ) p-beli térkép, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$. Jelölje $x_i = \mathrm{pr}_i \circ \varphi$ az i-edik koordinátafüggvényt. Legyen e_i az i-edik standard bázisvektor. Ekkor $\frac{\partial}{\partial x_i}$ jelöli a γ_{e_i} ekvivalenciaosztályát T_pM-ben.

A definíciók alapján

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = \delta_{ij}. \tag{B.2}$$

Azonban a látszat ellenére $\frac{\partial}{\partial x_i}$ nem csak az x_i koordinátafüggvénytől függ.

Egy harmadik lehetséges definícióhoz juthatunk az $C^\infty(M)$ algebrai tulajdonságait használva. Legyen ugyanis I_x azon $f \in C^\infty$ függvények halmaza, amelyekre $f(x) = 0$. Ekkor I_x ideál, és az I_x/I_x^2 vektortér duálisa azonosítható a T_xM térrel.

B.1.8. Definíció. Legyen M, N két sokaság, $f \in C^\infty(M, N)$. Ha $x \in M$, akkor az f x-beli *érintőleképezése* alatt azt a $T_xf : T_xM \to T_{f(x)}N$ leképezést értjük, ami a γ x-beli görbe ekvivalenciaosztályát $f \circ \gamma$ $f(x)$-beli görbe ekvivalenciaosztályába képezi.

Az érintőleképezés jól definiált és lineáris.

B.1.9. Definíció. Legyen M, N két sokaság, $f \in C^\infty(M,N)$. $n \in N$ f-nek *reguláris értéke*, ha $\forall m \in f^{-1}(n)$ esetén $T_m f$ szürjektív.

B.1.10. Állítás. *Ha n az $f : M \to N$ reguláris értéke, akkor $f^{-1}(n)$ részsokaság, kodimenzója megegyezik N (n-beli) dimenziójával.*

B.1.11. Példa. Ezen állítás segítségével is láthatjuk, hogy S^n n dimenziós sokaság. Legyen ugyanis $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ az

$$f(x_1, \dots, x_n) := x_1^2 + \dots + x_n^2 \tag{B.3}$$

formulával megadva, ekkor 1 az f-nek reguláris értéke.

B.1.12. Tétel (Sard)**.** *Egy $f : M \to N$ leképezés reguláris értékeinek halmaza sűrű.*

B.2. Vektornyalábok

Fontos különbség a többváltozós analízishez képest az, hogy a különböző pontokban definiált érintőterek között nincs kitüntetett leképezés, azaz különböző pontbeli érintővektorokat nem tudunk összehasonlítani. Körültekintően kell tehát eljárnunk, ha a sokaságokon vektormezőket szeretnénk értelmezni. Ebben a szakaszban ezt valamivel általánosabban tesszük meg, a vektornyalábok és szeléseik fogalmán keresztül. Egy vektornyalábra informálisan úgy gondolhatunk, hogy a sokaság minden pontjához rögzítünk egy vektorteret, egy vektornyaláb szelése pedig egy olyan leképezés, ami a sokaság minden pontjához az adott pont feletti vektortér egy elemét rendeli. Mindezt olyan módon szeretnénk definiálni, hogy értelmes legyen a szelés differenciálhatóságáról beszélni.

B.2.1. Definíció. $\pi : E \to M$ *k-rangú* (sima) *vektornyaláb* M felett, ha E, M sima sokaság, π sima szürjekció, és létezik $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ nyílt fedése M-nek és $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^k$ diffeomorfizmusok, amire $\forall x \in U_i, v \in \mathbb{R}^k$: $(\pi \circ \varphi_i^{-1})(x,v) = x$ és ha $i,j \in I$, $x \in \varphi_j(\pi^{-1}(U_i \cap U_j))$, akkor $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}|_{\{x\} \times \mathbb{R}^k}$ lineáris.

Itt E neve *totális tér*, M pedig a *bázis*.

A $\pi : E \to M$ vektornyaláb $x \in M$ feletti *fibruma* az $E_x := \pi^{-1}(x)$ halmaz, ezen van egy kanonikus vektortér-struktúra.

Egy $\xi : M \to E$ sima leképezés a $\pi : E \to M$ vektornyaláb *szelése*, ha $\pi \circ \xi = \mathrm{id}_M$. Ezek halmazát $\Gamma(E)$ jelöli.

Ha $\pi_1 : E_1 \to M$ és $\pi_2 : E_2 \to M$ két vektornyaláb, akkor egy $f : E_1 \to E_2$ sima leképezés *vektornyaláb-leképezés*, ha $\forall x \in M : \pi_2(f(\pi_1^{-1}(\{x\}))) = \{x\}$ és $f_{\pi_1^{-1}(\{x\})}$ lineáris. Az invertálható vektornyaláb-leképezéseket *izomorfizmusnak* nevezzük, két vektornyaláb *izomorf*, ha van közöttük izomorfizmus.

A definícióban szereplő tulajdonságú $\mathcal{U}$ nyílt fedéseket a φ_i diffeomorfizmusokkal együtt a vektornyaláb egy *lokális trivializációjának* nevezzük.

Egy vektornyalábot úgy tudunk megadni (izomorfizmus erejéig), ha egy kiválasztjuk M egy alkalmas nyílt fedését, majd megadjuk a $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ áttérési függvényeket.

A vektornyalábokra gyakran a totális tér szimbólumával hivatkozunk.

Egy M feletti vektornyaláb szelései $C^\infty(M)$ feletti modulust alkotnak a pontonkénti összeadásra és szorzásra nézve.

B.2.2. Példa. Egy vektortér tekinthető az egy pontból álló sokaság feletti vektornyalábnak.

Ha M sokaság, $k \in \mathbb{N}$, akkor az $\epsilon_k : M \times \mathbb{R}^k \to M$ projekció vektornyaláb, ez az M feletti k rangú *triviális vektornyaláb.*

A π vektornyaláb egy szelése úgy is felfogható, mint egy vektornyaláb-leképezés ϵ_1 és π között. ϵ_1 szelései $C^\infty(M)$ elemeivel azonosíthatóak.

Legyen $M = S^1 = \{(\cos\alpha, \sin\alpha)|\alpha \in \mathbb{R}\}$, $E = \{(\cos\alpha, \sin\alpha, b\cos(\alpha/2), b\sin(\alpha/2))|\alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ és Möb : $E \to M$ az első két koordinátára való projekció. Ekkor Möb nemtriviális 1-rangú vektornyaláb S^1 felett, neve Möbius-nyaláb.

B.2.3. Definíció. Legyen $\pi : E \to M$ vektornyaláb, N sokaság, $f : N \to M$ sima leképezés. Ekkor

$$f^*E = \{(n, v) \in N \times E|f(n) = \pi(v)\} \tag{B.4}$$

a *visszahúzott nyaláb* teljes tere, ez vektornyaláb az $(n, v) \mapsto n$ projekcióval. Ha $\xi \in \Gamma(E)$, akkor $(f^*\xi)(n) = \xi(f(n))$ a *visszahúzott szelés*, ez az f^*E egy szelése.

A lineáris algebrában vektorterekből újakat konstruálhatunk műveletek segítségével, például két vektortér direkt összegét, tenzorszorzatát, vagy egy vektortér duálisát. Ezek a műveletek[2] kiterjeszthetőek vektornyalábokra is olyan módon, hogy pontonként a vektortereken értelmezett műveleteket kapjuk.

B.2.4. Definíció. Legyenek $\pi_1 : E_1 \to M$ és $\pi_2 : E_2 \to M$ vektornyalábok, és válasszunk olyan $\mathcal{U}$ nyílt fedést, aminek elemei felett már mindkét nyaláb triviális. Ekkor az $E_1 \oplus E_2 := \{(v_1, v_2) \in E_1 \times E_2|\pi_1(v_1) = \pi_2(v_2)\}$ sokaság a $\pi : (v_1, v_2) \mapsto \pi_1(v_1)$ leképezéssel vektornyaláb, az E_1 és az E_2 *direkt összege.*

Hasonlóan definiáljuk vektornyalábok *tenzorszorzatát* ($E_1 \otimes E_2$), *duálisát* (E^*) és *külső hatványait* ($\Lambda^r(E)$).

Ha $f_1 \in \Gamma(E_1)$, $f_2 \in \Gamma(E_2)$, akkor $f_1 \otimes f_2$ a $\Gamma(E_1 \otimes E_2)$ azon elemét jelöli, aminek értéke az x pontban $f_1(x) \otimes f_2(x)$ (tehát nem $\Gamma(E_1) \otimes \Gamma(E_1)$ eleme!). Általában a szelések közötti műveleteket ehhez hasonlóan pontonként értelmezzük.

B.2.5. Példa. $\epsilon_{k_1} \oplus \epsilon_{k_2} \simeq \epsilon_{k_1+k_2}$.

Möb $\oplus$ Möb $\simeq \epsilon_2$.

$\mathrm{Hom}(E_1, E_2) = E_1^* \otimes E_2$ szeléseit azonosíthatjuk az $f : E_1 \to E_2$ vektornyalábleképezésekkel. Eszerint ezek is modulust alkotnak $C^\infty(M)$ felett.

A sokaságon való differenciálás és integrálás szempontjából kiemelt jelentősége van az érintővektorokból álló nyalábnak és az abból származtatott nyalábok-nak.

B.2.6. Definíció. Legyen M n dimenziós sokaság, ekkor a

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_xM = \{(x, v)|x \in M, v \in T_xM\} \tag{B.5}$$

[2] Pontosabban: ha $F : \mathbf{FinVect}^r \times (\mathbf{FinVect}^{\mathrm{op}})^s \to \mathbf{FinVect}$ olyan funktor, amely a Hom-vektortereken sima függvényeket ad meg, akkor a $\pi_i : E_i \to M$ $(i = 1, 2, \ldots, r + s)$ vektornyalábokból konstruálhatunk egy $\pi : E \to M$ vektornyalábot, amelynek x feletti fibruma természetesen izomorf az $F((E_1)_x, \ldots, (E_{r+s})_x)$ vektortérrel.

halmazon van egy $\tau_M : TM \to M$ kanonikus projekció. Ha (U, φ) térkép, akkor tekinthetjük azt a $\tau_M^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ leképezést, ami szerint $(x, [\gamma]_x)$ képe (x, v), ahol

$$v = \frac{d}{dt}\varphi(\gamma(t))\Big|_{t=0}. \tag{B.6}$$

Az így kapott leképezésekkel $\tau_M : TM \to M$ vektornyaláb, az M sokaság *érintőnyalábja.*

Az érintőnyaláb szeléseit *vektormezőknek* nevezzük.

$T^*M := (TM)^*$ az M sokaság *koérintőnyalábja,* $T_s^r M := (T^*M)^{\otimes r} \otimes (TM)^{\otimes s}$ az (r, s)-rendű *tenzornyaláb.*

Az M n dimenziós sokaság *külső algebra-nyalábja*

$$\Lambda^\bullet T^*M := \bigoplus_{r=0}^{n} \Lambda^n T^*M. \tag{B.7}$$

Ennek szeléseit *differenciálformáknak* nevezzük, $\Lambda^r T^*M$ szelései az r-formák.

M érintőnyalábjának rangja megegyezik a sokaság dimenziójával.

Ha $X \in \Gamma(TM)$, $f \in C^\infty(M)$, akkor $X(f) : x \mapsto X(x)(f)$ is sima függvény. A vektormezőket így $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ lineáris leképezésekként is felfoghatjuk. Belátható, hogy ha X és Y két vektormező, akkor a kommutátoruk is vektormező. Ezt $[X, Y]$ jelöli, tehát $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$. Ezzel a művelettel $\Gamma(TM)$ Lie-algebra.

Ha $f \in C^\infty(M, N)$, akkor meghatároz egy $Tf : TM \to TN$ leképezést olyan módon, hogy $(Tf)(x, v) = (f(x), T_x f(v))$. Ez az f *érintőleképezése.*

B.2.7. Állítás. *Ha $f \in C^\infty(M, N)$, akkor $Tf : TM \to TN$ vektornyalábleképezés. Továbbá a következők igazak:*

1. $T\mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{TM}$
2. *Ha f diffeomorfizmus, akkor $Tf^{-1} = (Tf)^{-1}$.*
3. *Ha $g \in C^\infty(N, L)$, akkor $T(g \circ f) = (Tg) \circ (Tf)$*

Ha V vektorér, akkor $\Lambda^r V^*$ elemeit $V^r \to \mathbb{R}$ függvényekként is felfoghatjuk. Ezt pontonként is megtehetjük, tehát $\Lambda^r T^*M$ egy szelésébe behelyettesíthetünk r darab vektormezőt. Az eredmény egy sima függvény, ami multilineárisan és alternáló módon függ az argumentumoktól. A külső formákon értelmezhetjük a *külső szorzást,* ha α r-forma és β s-forma, $e_1, \dots, e_{r+s}$ vektormezők, akkor

$$(\alpha \wedge \beta)(e_1, \dots, e_{r+s}) = \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \mathrm{sign}(\sigma)\alpha(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(r)})\beta(e_{\sigma(r+1)}, \dots, e_{\sigma(r+s)}), \tag{B.8}$$

ezzel $\Gamma(\Lambda^\bullet T^*M)$ fokszámozott algebra, és $\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha$.

B.2.8. Tétel. *Létezik egyetlen olyan $\mathrm{d} : \Gamma(\Lambda^\bullet T^*M) \to \Gamma(\Lambda^\bullet T^*M)$ lineáris leképezés, amire a következők teljesülnek:*

1. $\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = (\mathrm{d}\alpha) \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge (\mathrm{d}\beta)$
2. *Ha $f \in C^\infty(M) = \Gamma(\Lambda^0 T^*M)$, akkor $\mathrm{d}f(X) = X(f)$.*

3. $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$

4. Minden nyílt U halmazra $\mathrm{d}(\alpha|_U) = (\mathrm{d}\alpha)|_U$.

A tételben szereplő d leképezést *külső deriválásnak* nevezzük.

B.2.9. Példa. Ha $M = \mathbb{R}$, akkor egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény külső deriváltja $\mathrm{d}f = f' \cdot \mathrm{d}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}})$.

Sokaságok közötti sima leképezések mentén a formákat vissza lehet húzni:

B.2.10. Állítás. *Ha $f \in C^\infty(M, N)$, akkor az $f^* : \Gamma(\Lambda^\bullet T^*N) \to \Gamma(\Lambda^\bullet T^*M)$, $(f^*\alpha)|_x(v) = \alpha|_{f(x)}(T_x f(v))$ leképezés algebra-homomorfizmus és $f^*(\mathrm{d}\alpha) = \mathrm{d}(f^*\alpha)$.*

Ez az állítás a számolások szempontjából is lényeges: ha (U, φ) térkép, akkor a $\mathrm{d}x_i = \mathrm{d}(\varphi^* \mathrm{pr}_i)$ (lokálisan értelmezett) 1-formák minden $x \in U$ pontban T_x^*M egy bázisát alkotják.

B.2.11. Definíció. Az olyan α differenciálformákat, amelyekre $\mathrm{d}\alpha = 0$ *zárt formáknak*, a $\mathrm{d}\beta$ alakúakat *egzakt formáknak* nevezzük.

Egy egzakt forma mindig zárt (mivel $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$), de fordítva ez általában nem igaz. A zárt r-formák terének az egzakt r-formák terével vett hányadosa az M sokaság r-edik *de Rham-kohomológia csoportja*, jelölése $H^r_{\mathrm{dR}}(M)$.

B.2.12. Példa. Ha $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$ a standard beágyazás, $x, y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a koordinátafüggvények, akkor $f^*(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$ zárt, de nem egzakt.

B.2.13. Lemma (Poincaré). *Ha $U \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex nyílt halmaz, akkor $\alpha \in \Gamma(\Lambda^\bullet T^*U)$ pontosan akkor zárt, ha egzakt.*

B.3. Differenciálegyenletek, Lie-derivált

Először az elsőredű autonóm közönséges explicit differenciálegyenlet-rendszer fogalmát szeretnénk sokaságokra általánosítani. $\mathbb{R}^n$ esetén tehát ez azt jelenti, hogy minden ponthoz megadunk egy vektort, ami az ott haladó megoldásgörbék érintője. Ennek differenciálgeometriai megfelelője a vektormező lesz, hiszen egy görbe adott pontbeli érintője az ottani érintőtér egy vektorával azonosítható. Mostantól tehát a vektormezőkre úgy is gondolunk, mint közönséges differenciálegyenletekre. Ez motiválja a következő definíciót.

B.3.1. Definíció. A $\gamma : (a, b) \to M$ görbe az $X \in \Gamma(TM)$ *integrálgörbéje*, ha $\forall t \in (a, b) : \dot\gamma(t) \equiv (T_t\gamma)(1) = X(\gamma(t))$.

Lokálisan $X : U \to U \times \mathbb{R}^n$,

$$X(x) = (x, X_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + X_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}) \tag{B.9}$$

és $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$, $\dot\gamma(t) = (\gamma(t), \dot\gamma_1(t)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \dot\gamma_n(t)\frac{\partial}{\partial x_n})$ írható, így a feltétel

$$\dot\gamma_i(t) = X_i(\gamma(t)), \tag{B.10}$$

ami valóban egy differenciálegyenlet-rendszer.

B.3.2. Definíció. Az X vektormező *folyama* $F : \mathbb{R} \times M \to M$, $(t, x) \mapsto F_t(x)$, ha minden $x \in M$ esetén $t \mapsto F_t(x)$ integrálgörbe és $F_0 = \mathrm{id}_M$.

Általában egy vektormezőnek nem feltétlenül létezik folyama. Létezik viszont *lokális folyam*, vagyis minden $x \in M$ ponthoz $U \subseteq M$ környezet és $\varepsilon > 0$, amire a fentihez hasonló tulajdonságú $F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to M$ függvény értelmezhető (ez a Picard-Lindelöf-tétel következménye). Ha F az egész $\mathbb{R} \times M$ halmazon értelmezett, akkor azt mondjuk, hogy X *teljes*. Ilyenkor $t \mapsto F_t$ diffeomorfizmusok egyparaméteres csoportja.

B.3.3. Állítás. *Ha X kompakt tartójú vektormező, akkor teljes.*

Egy diffeomorfizmus szerint tetszőleges (r, s)-rendű tenzormezőt vissza lehet húzni, differenciálformák esetén ez a korábban megismert visszahúzással egyezik meg. Ennek segítségével definiálhatjuk tenzormezők egy adott vektormező szerinti Lie-deriváltját, ami az iránymenti derivált általánosítása.

B.3.4. Definíció. Ha $A \in \Gamma(T^r_s M)$, akkor

$$\mathcal{L}_X A := \frac{d}{dt} F_t^* A \bigg|_{t=0} \tag{B.11}$$

az A *Lie-deriváltja* X mentén, ahol F az X folyama.

Ha nem létezik folyam, akkor is lehet Lie-deriváltat definiálni lokális folyamok segítségével.

A Lie-deriválás a tenzormezők algebráján derivációó, függvényeken pedig az iránymenti deriválttal egyezik meg:

B.3.5. Állítás. *Legyen $X \in \Gamma(TM)$. Ekkor*

1. *Ha $f \in C^\infty(M)$, akkor $\mathcal{L}_X f = \mathrm{d}f(X)$.*
2. *$\mathcal{L}_X(f \otimes g) = (\mathcal{L}_X f) \otimes g + f \otimes (\mathcal{L}_X g)$*

A differenciálformák Lie-deriváltjaival való számolást megkönnyíti néhány azonosság. Ezek felírásához (is) érdemes bevezetni a következő jelölést:

B.3.6. Definíció. Ha $X \in \Gamma(TM)$, akkor $\iota_X : \Gamma(\Lambda^\bullet T^*M) \to \Gamma(\Lambda^\bullet T^*M)$ az az egyértelmű lineáris leképezés, amire a következők telejsülnek:

1. Ha $\alpha \in \Gamma(T^*M)$, akkor $\iota_X \alpha = \alpha(X)$.
2. Ha $\alpha \in \Gamma(\Lambda^r T^*M)$, akkor $\iota_X(\alpha \wedge \beta) = (\iota_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge (\iota_X \beta)$.

B.3.7. Állítás. *Legyen $X, Y \in \Gamma(TM)$, α, β homogén differenciálformák, f 0-forma. Ekkor*

1. *$\iota_X(\alpha \wedge \beta) = (\iota_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge (\iota_X \beta)$*
2. *$\iota_{fX} \alpha = f \iota_X \alpha$*
3. *$\iota_X \,\mathrm{d}f = \mathcal{L}_X f$*
4. *$\mathcal{L}_X \alpha = \iota_X \,\mathrm{d}\alpha + \mathrm{d}\iota_X \alpha$*
5. *$\mathcal{L}_{fX} \alpha = f \mathcal{L}_X \alpha + (\mathrm{d}f) \wedge \iota_X \alpha$*

6. $\mathcal{L}_{[X,Y]}\alpha = \mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y\alpha - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X\alpha$

7. $\mathcal{L}_X \,\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}\mathcal{L}_X\alpha$

8. $\iota_{[X,Y]}\alpha = \mathcal{L}_X\iota_Y\alpha - \mathcal{L}_Y\iota_X\alpha$

B.3.8. Definíció. Legyen $X \in \Gamma(TM)$. Egy $\alpha \in \Gamma(\Lambda^\bullet T^*M)$ elem *X-invariáns forma*, ha $\mathcal{L}_X\alpha = 0$.

A Lie-derivált definíciója alapján tehát ha α X-invariáns és F X folyama, akkor $F_t^*\alpha = \alpha$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén (ahol létezik).

B.3.9. Állítás. *Az X-invariáns formák $\Gamma(\Lambda^\bullet T^*M)$ részalgebráját alkotják, és ha α X-invariáns, akkor $\mathrm{d}\alpha$ és $\iota_X\alpha$ is az.*

Egy sokaságon értelmezhetünk magasabbrendű differenciálegyenleteket is. Ha $\gamma : \mathbb{R} \to M$ görbe, akkor $TT\gamma : TT\mathbb{R} \to TTM$ lokális koordinátákban első és második deriváltakat tartalmaz. Viszont $\dim TTM = 2\dim TM = 4\dim M$ miatt a komponensek nem függetlenek egymástól: meg lehet gondolni, hogy az első deriváltak kétszer szerepelnek. Ezzel összhangban az M feletti másodrendű differenciálegyenletek speciális vektormezők a TM sokaságon.

B.3.10. Definíció. $X \in \Gamma(TTM)$ *másodrendű differenciálegyenlet* M felett, ha $T\tau_M \circ X = \mathrm{id}_{TM}$.
$\gamma : (a,b) \to M$ a másodrendű egyenlet *integrálgörbéje*, ha létezik olyan $c : (a,b) \to TM$ görbe, ami X integrálgörbéje és $\gamma = \tau_M \circ c$.

Érdemes megnézni a definícióban szereplő objektumok lokális alakját is. Ha $U \subseteq \mathbb{R}^n$, akkor $TU = U \times \mathbb{R}^n$ és $TTU = U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, így

$$\tau_M : U \times \mathbb{R}^n \to U \qquad (u,v) \mapsto u \tag{B.12}$$
$$T\tau_M : U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to U \times \mathbb{R}^n \qquad (u,v,\dot{u},\dot{v}) \mapsto (u,\dot{u}) \tag{B.13}$$
$$X : U \times \mathbb{R}^n \to U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \qquad (u,v) \mapsto (u,v,v,x(u,v)) \tag{B.14}$$
$$\gamma : (a,b) \to U \qquad t \mapsto \gamma(t) \tag{B.15}$$
$$c : (a,b) \to U \times \mathbb{R}^n \qquad t \mapsto (\gamma(t),\dot{\gamma}(t)) \tag{B.16}$$
$$\dot{c} : (a,b) \to U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \qquad t \mapsto (\gamma(t),\dot{\gamma}(t),\dot{\gamma}(t),\ddot{\gamma}(t)) \tag{B.17}$$

A $\dot{c}(t) = X(c(t))$ feltétel tehát éppen a $\ddot{\gamma}(t) = x(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))$ másodrendű differenciálegyenlet teljesülését jelenti.

B.4. Konnexiók

Egy vektornyaláb szelései differenciálható függvények, de eddig nem volt arról szó, hogy mit értünk egy szelés deriváltja alatt. A többváltozós analízisben, tehát a $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ nyalábon értelmes iránymenti deriváltakról beszélni, ezt komponensenként értelmezhetjük. Egy tetszőleges $\pi : E \to M$ nyalábon erre általában nincs lehetőség. Ha például lokális trivializációk segítségével próbáljuk a definíciót kiterjeszteni, akkor az jelenti a problémát, hogy az eredmény függ a trivializáció választásától. A megoldást egy további geometriai objektum, a konnexió bevezetése jelenti.

B.4.1. Definíció. Legyen $\pi : E \to M$ sima vektornyaláb. Egy $\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$ leképezés *konnexió*, ha $\mathbb{R}$-lineáris és teljesül rá a

$$\nabla(f\xi) = \mathrm{d}f \otimes \xi + f(\nabla\xi) \tag{B.18}$$

Leibniz-szabály, ahol $f \in C^\infty(N)$ és $\xi \in \Gamma(E)$. $\nabla\xi$ a ξ szelés *kovariáns deriváltja.*

Ha $X \in \Gamma(TM)$, akkor a ξ szelés X irányú *kovariáns deriváltja* $\nabla_X\xi = \nabla\xi \cdot X$, ahol a $\cdot$ az 1-forma és a vektor közötti pontonkénti párosítást jelenti tenzorszorozva E megfelelő fibrumának identitásával.

Lokálisan, tehát egy $U \times \mathbb{R}^k \to U$ alakú vektornyalábon ($U \subseteq \mathbb{R}^n$) választhatunk egy konnexiót azzal, hogy megadjuk a standard bázisvektoroknak megfelelő konstans szelések kovariáns deriváltjait az n koordinátairányban. Ez nk^2 tetszőlegesen választott sima függvényt jelent.

Egy vektornyalábon több konnexiót is találhatunk, és általában nincs köztük kitüntetett. Viszont bármely két konnexió különbsége már $C^\infty(N)$-lineáris, így azonosítható $T^*M \otimes \mathrm{End}(E)$ egy szelésével.

B.4.2. Állítás. *Egy $\pi : E \to M$ vektornyalábon a konnexiók affin teret alkotnak $\Gamma(T^*M \otimes \mathrm{End}(E))$ felett.*

B.4.3. Állítás. *Legyen ∇ egy konnexió a $\pi : E \to M$ vektornyalábon. Ekkor ∇ egyértelműen kiterjeszthető egy olyan $\mathrm{d}_\nabla : \Gamma(\Lambda^\bullet T^*M \otimes E) \to \Gamma(\Lambda^\bullet T^*M \otimes E)$ leképezéssé, ami $\mathbb{R}$-lineáris és teljesíti a*

$$\nabla(\alpha \otimes \xi) = \mathrm{d}\alpha \otimes \xi + (-1)^{\deg\alpha}\alpha \wedge (\nabla\xi) \tag{B.19}$$

Leibniz-szabályt, ahol α homogén differenciálforma.

B.4.4. Állítás. *Ha ∇ konnexió a $\pi : E \to M$ vektornyalábon, akkor $\mathrm{d}_\nabla \circ \mathrm{d}_\nabla$ lineáris $C^\infty(N)$ felett, és így található egy egyértelmű $F_\nabla \in \Gamma(\Lambda^2 T^*M \otimes \mathrm{End}(E))$ szelés, amire $\mathrm{d}_\nabla \mathrm{d}_\nabla\xi = F_\nabla \wedge \xi$, ahol a szorzás az ékszorzás és a kiértékelés tenzorszorzatát jelenti.*

B.4.5. Állítás. *Ha ∇ konnexió a $\pi : E \to M$ vektornyalábon, N sokaság és $f : N \to M$ sima leképezés, akkor létezik egy egyértelmű $f^*\nabla$ konnexió az f^*E visszahúzott nyalábon, amire minden $\xi \in \Gamma(E)$ esetén $(f^*\nabla)(f^*\xi) = f^*(\nabla\xi)$ teljesül.*

Vegyük észre, hogy ez a karakterizáló tulajdonság közvetlenül nem adja meg f^*E összes szelésének kovariáns deriváltját, csak azokét, amelyek E széléseinek visszahúzásával előállnak. Például ha M egy pontból áll, akkor a feltétel azt jelenti, hogy $N \times E$ konstans széléseinek 0 a kovariáns deriváltja, ez csak a komponensenkénti külső deriválásra teljesül.

Ha $\pi_1 : E_1 \to M$ és $\pi_2 : E_2 \to M$ két vektornyaláb és rajtuk ∇_1, ∇_2 egy-egy konnexió, akkor megadhatunk az $E_1 \otimes E_2$ vektornyalábon egy ∇ konnexiót, amelyre $\xi_1 \in \Gamma(E_1)$, $\xi_2 \in \Gamma(E_2)$ esetén

$$\nabla(\xi_1 \otimes \xi_2) = (\nabla\xi_1) \otimes \xi_2 + \xi_1 \otimes (\nabla\xi_2) \tag{B.20}$$

teljesül.

Speciálisan ha egy vektornyalábon adott egy konnexió, akkor annak tenzorhatványain is indukálódik egy. Hasonló módon egy $\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$

konnexió indukál egy ∇ konnexiót az E^* duális nyalábon is, amelyre $\xi \in \Gamma(E)$, $\varphi \in \Gamma(E^*)$ esetén

$$\mathrm{d}(\varphi \cdot \xi) = (\nabla \varphi) \cdot \xi + \varphi \cdot (\nabla \xi) \tag{B.21}$$

teljesül. Az egyszerűség kedvéért ugyanazzal a szimbólummal szokás jelölni az $E^{\otimes r} \otimes (E^*)^{\otimes s}$ alakú nyalábokon ilyen módon indukált konnexiókat, mint az eredeti E vektornyalábon adott konnexiót.

B.5. Riemann-sokaságok

B.5.1. Definíció. Egy M sokaságon *Riemann-metrikának* nevezünk egy $g \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ szelést, ha minden pontban szimmetrikus és pozitív definit. Az (M, g) párt ilyenkor *Riemann-sokaságnak* nevezzük.

Ha pozitív definit helyett tetszőleges nemelfajuló értékeket is megengedünk, akkor *pszeudo-Riemann-metrikáról* és *pszeudo-Riemann-sokaságról* beszélünk.

Gyakran azt is mondjuk, hogy M (pszeudo-)Riemann-sokaság, ha adott rajta egy Riemann-metrika. Egységosztás segítségével belátható, hogy minden sokaságon létezik Riemann-metrika. Ha M pszeudo-Riemann-sokaság, N sokaság és $f : N \to M$ immerzió (azaz Tf injektív), akkor megadható N felett egy f^*g pszeudo-Riemann-metrika

$$(f^*g)(v, w) = g(Tf(v), Tf(w)) \tag{B.22}$$

módon.

B.5.2. Példa. Ha V euklideszi tér, $TV = V \times V$, akkor $(x, v), (x, w) \in TV$ esetén legyen $g_x(v, w) = \langle v, w\rangle$. Ezzel (V, g) Riemann-sokaság.

Ha $i : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ a beágyazás, $\mathbb{R}^{n+1}$ a szokásos skalárszorzattal ellátva Riemann-sokaság, i^*g a kerek Riemann-metrika.

Ha $x_1, \dots, x_n$ lokális koordinátákat választunk, akkor g megadható komponensfüggvények segítségével:

$$g_{ij}(x) = g_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right). \tag{B.23}$$

Ha a (g_{ij}) értékeket egy mátrix elemeinek tekintjük, akkor az inverz mátrix elemeit szokásosan g^{ij} jelöli.

Alapvető tulajdonsága a pszeudo-Riemann-metrikáknak, hogy kitüntetnek egy egyértelműen meghatározott konnexiót az érintőnyalábon.

B.5.3. Tétel. *Legyen (M, g) pszeudo-Riemann-sokaság. Ekkor létezik egyetlen ∇ konnexió a TM vektornyalábon, amire*

$$\nabla g = 0 \tag{B.24}$$

és

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \tag{B.25}$$

teljesül tetszőleges $X, Y \in \Gamma(TM)$ esetén.

A tételben szereplő konnexió a pszeudo-Riemann-sokaság *Levi-Civita-konnexiója.*

Ha lokális koordinátákat választunk, akkor azok meghatározzák minden pontban az érintő- és koérintőtér egy-egy bázisát, amelyek szelésekké állnak össze. A konnexiót jellemzi az ezen szelésekből képzett kovariáns deriváltak értéke. A komponensfüggvények szokásos jelölése Γ^i_{jk}, ahol

$$\nabla_{\partial/\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \sum_{j=1}^{n} \Gamma^i_{jk} \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{B.26}$$

A Γ^i_{jk} függvényeket a konnexió *Christoffel-szimbólumainak* nevezzük. A pszeudo-Riemann-metrika komponensfüggvényeiből a Christoffel-szimbólumokat a következő módon számíthatjuk ki:

$$\Gamma^k_{ij}(x) = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{n} g^{hk}(x)\left(\frac{\partial g_{hj}(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ih}(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}(x)}{\partial x_h}\right). \tag{B.27}$$

B.5.4. Definíció. Legyen (M, g) pszeudo-Riemann-sokaság. Egy $\gamma : (a, b) \to M$ görbe *geodetikus*, ha

$$(\gamma^*\nabla)\dot{\gamma} = 0, \tag{B.28}$$

ahol $\dot{\gamma}$ a γ^*TM azon szelését jelöli, amire $\dot{\gamma}(t) = (T_t\gamma)(1)$.

Lokális koordinátákat választva egy $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ görbe pontosan akkor geodetikus, ha teljesülnek rá a

$$\ddot{\gamma}_i(t) + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^i_{jk}(\gamma(t))\dot{\gamma}_j(t)\dot{\gamma}_k(t) \tag{B.29}$$

geodetikus egyenletek $(i = 1, \dots, n)$.

C. függelék

Lie-csoportok

C.1. Lie-csoportok

C.1.1. Definíció. Egy G sima sokaság *Lie-csoport*, ha adott rajta egy olyan $(\cdot, e, ^{-1})$ csoportstruktúra, amire $\cdot : G \times G \to G : (g, h \mapsto g \cdot h)$ és $^{-1} : G \to G : g \mapsto g^{-1}$ sima leképezések.

Ha $g \in G$, akkor az $L_g : G \to G : h \mapsto gh$ leképezést *baleltolásnak*, az $R_g : G \to G : h \mapsto hg$ leképezést *jobbeltolásnak* nevezzük.

$X \in \Gamma(TG)$ *balinvariáns*, ha minden $g, h \in G$ esetén $T_h L_g X(h) = X(gh)$.

Egy leképezés két Lie-csoport között *Lie-csoport homomorfizmus*, ha sima és csoporthomomorfizmus.

Ha G Lie-csoport, $H \leq G$ *Lie-részcsoport*, ha részcsoport és részsokaság.

A következő állítás segítségével sok fontos csoportról láthatjuk, hogy Lie-csoportok, köztük az ortogonális, szimplektikus, unitér csoportokról.

C.1.2. Állítás. *Ha G Lie-csoport, $H \leq G$ zárt vagy nyílt részcsoport, akkor Lie-részcsoport.*

C.1.3. Példa. Ha V véges dimenziós vektortér, akkor $\mathrm{GL}(V)$, a $V \to V$ invertálható lineáris leképezések csoportja Lie-csoport, mivel $\mathrm{End}(V)$ nyílt részhalmaza (tehát sokaság), és a szorzás és inverz műveletek racionális törtfüggvényekkel kifejezhetőek (tehát differenciálhatóak). Ebben az 1 determinánsú leképezések zárt részcsoportot alkotnak, ez $\mathrm{SL}(V)$.

Ha V-n adott egy $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ skaláris szorzás, akkor $\mathrm{O}(V) = \{A \in \mathrm{GL}(V) | \forall u, v \in V : \langle u, v \rangle = \langle Au, Av \rangle\} \leq \mathrm{GL}(V)$ zárt részcsoport. Ugyanígy zárt részcsoport $\mathrm{SO}(V) = \mathrm{SL}(V) \cap \mathrm{O}(V)$.

A balinvariáns vektormezők Lie-részalgebrát alkotnak az összes sima vektormezők között. Másrészt megadható egy lineáris bijekció a balinvariáns vektormezők és $T_e G$ között, ami az X vektormezőhöz az $X(e)$ elemet rendeli. Az inverz leképezés a $\xi \in T_e G$ vektorhoz az $X_\xi(g) = T_e L_g(\xi)$ képlettel adott vektormezőt rendeli. Így $T_e G$ is ellátható Lie-algebra struktúrával.

C.1.4. Definíció. $T_e G$ a fenti Lie-algebra struktúrával a G Lie-csoport *Lie-algebrája.*

C.1.5. Állítás. *Ha G, H két Lie-csoport, $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $T_e \varphi$ Lie-algebra homomorfizmus.*

Minden balinvariáns vektormező teljes. Az egységelemtől induló integrálgörbék segítségével definiálhatunk egy leképezést a Lie-algebrából a Lie-csoportba.

C.1.6. Definíció. Legyen $\xi \in T_eG$, és F az X_ξ vektormező folyama, $\exp \xi := F_1(e)$. Az így definiált $\exp : T_eG \to G$ leképezés neve *exponenciális leképezés.*

Az exponenciális leképezés deriváltja 0-ban id_{T_eG}, tehát 0 egy környezetében diffeomorfizmus.

Ha $\xi \in T_eG$, akkor $t \mapsto \exp(t\xi)$ *egyparaméteres részcsoport*, azaz Lie-csoport homomorfizmus $\mathbb{R}$ additív csoportjából a G csoportba.

Ha $g \in G$, akkor $\gamma_g : G \to G$ legyen a $\gamma_g(h) := ghg^{-1}$ formulával adott leképezés, azaz a g-vel való konjugálás. Ez Lie-csoport homomorfizmus.

C.1.7. Definíció. Legyen $\mathrm{Ad}_g = T_e\gamma_g : T_eG \to T_eG$. A $g \mapsto \mathrm{Ad}_g$ hozzárendelés a G *adjungált hatása*, $g \mapsto \mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}$ a *koadjungált hatás.*

C.1.8. Állítás. *Legyen G n dimenziós Lie-csoport. Ekkor létezik $\mu \in \Gamma(\Lambda^n T^*G)$ balinvariáns térfogat. Bármely két balinvariáns térfogat egymás konstansszorosa. Ha G kompakt, akkor μ jobbinvariáns is.*

C.2. Sima csoporthatások

C.2.1. Definíció. Legyen M sima sokaság, G Lie-csoport. A G egy *hatása* M-n egy $\Phi : G \times M \to M$ leképezés, ami csoporthatás és sima.

A Φ hatás *proper*, ha a $(g, x) \mapsto (x, \Phi(g, x))$ leképezés proper.

C.2.2. Példa. Legyen $F : \mathbb{R} \times M \to M$ az X teljes vektormező folyama az M sokaságon. Ekkor F az $\mathbb{R}$ additív csoportjának hatása. Minden $\mathbb{R}$-hatás előáll így.

C.2.3. Állítás. *Ha a G Lie-csoport szabad és proper módon hat az M sokaságon, akkor M/G ellátható egy kanonikus sokaságstruktúrával, és ezzel a $\pi : M \to M/G$ projekció sima szubmerzió.*

C.2.4. Definíció. Ha $\Phi : G \times M \to M$ hatás, akkor egy $\xi \in T_eG$ elemhez tartozó *infinitezimális generátor* a ξ

$$\xi_M(x) = \frac{d}{dt}\Phi(\exp(t\xi), x)\bigg|_{t=0} \tag{C.1}$$

módon definiált vektormező.

C.2.5. Állítás. *Legyen $\Phi : G \times M \to M$ hatás. Ekkor*

1. *ha $g \in G$ és $\xi \in T_eG$, akkor $(\mathrm{Ad}_g\xi)_M = \Phi^*_{g^{-1}}\xi_M$*
2. *ha $\xi, \eta \in T_eG$, akkor $[\xi_M, \eta_M] = -[\xi, \eta]_M$.*

C.2.6. Állítás. *Legyen G Lie-csoport, M és N két sokaság, $\Phi : G \times M \to M$ és $\Psi : G \times N \to N$ hatások. Ha $f : M \to N$ sima ekvivariáns leképezés, akkor minden $\xi \in T_eG$ esetén $Tf \circ \xi_M = \xi_N \circ f$.*

Egy fontos speciális eset, ha Ψ triviális hatás, azaz $\Psi(g, x) = x$, akkor T_mf az m (lokális) G-orbitjának érintőterét 0-ba viszi.

Tárgymutató