1. HF. Legyen $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, \lambda)$, ahol λ a Lebesgue-mérték. A $(Qf)(x) = xf(x)$ és $(Pf)(x) = -if'(x)$ definíciók önadjungált operátorokat határoznak meg (pl. kompakt tartójú sima függvények terén értelmesek, ez sűrű), hasonlóan $H = \frac{P^2}{2} + \frac{Q^2}{2}$ is. Jelölje $|\psi\rangle$ a $\psi(x) = \pi^{-1/4}e^{-x^2/2}$ módon adott függvényt. Ellenőrizzük, hogy $|\psi\rangle\langle\psi|$ állapot, és határozzuk meg Q illetve H eloszlását ebben az állapotban.

2. HF. Adjuk meg a $D_p : \mathcal{T}(\mathbb{C}^{\mathcal{X}}) \to \mathcal{T}(\mathbb{C}^{\mathcal{X}})$

$$D_p(\varrho) = (1-p)\varrho + p\sum_{x\in\mathcal{X}} \langle x|\varrho|x\rangle |x\rangle\langle x|$$

csatorna Kraus- és Stinespring-reprezentációját.

3. HF. Adjuk meg az $N_p : \mathcal{T}(\mathcal{H}) \to \mathcal{T}(\mathcal{H} \oplus \mathbb{C}^{\{}e\})$

$$N_p(\varrho) = (1-p)(\varrho \oplus 0) + p(0 \oplus |e\rangle\langle e|)$$

csatorna Kraus- és Stinespring-reprezentációját.

4. HF. Adjuk meg a $D_p : \mathcal{T}(\mathbb{C}^{\mathcal{X}}) \to \mathcal{T}(\mathbb{C}^{\mathcal{X}})$

$$D_p(\varrho) = (1-p)\varrho + p\sum_{x\in\mathcal{X}} \langle x|\varrho|x\rangle |x\rangle\langle x|$$

csatornának a komplementerét.

5. HF. Legyen $N_p : \mathcal{T}(\mathcal{H}) \to \mathcal{T}(\mathcal{H} \oplus \mathbb{C}^{\{e\}})$ az a csatorna, amire

$$N_p(\varrho) = (1-p)(\varrho \oplus 0) + p\,\mathrm{Tr}\,\varrho(0 \oplus |e\rangle\langle e|)$$

p milyen értékei mellett lesz ez degradálható illetve anti-degradálható?

6. HF. Legyen $\|\cdot\|_{\mathrm{kl}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ olyan norma, ami csak a komponensek abszolútértékeitől függ és permutációinvariáns. Ekkor a

$$\|\omega\|'_{\mathrm{kl}} = \sup_{x:\|x\|_{\mathrm{kl}}\leq 1} |\omega(x)|$$

duális norma is permutációinvariáns és csak a komponensek abszolútértékétől függ. A $\|\cdot\|_{\mathrm{kl}}$ normából a fenti módon konstruált unitér-invariáns norma duálisa megegyezik a $\|\cdot\|'_{\mathrm{kl}}$ normából kapott unitér-invariáns normával.

7. HF. $\mathcal{T}(\mathbb{C}^2)$ egy bázisa

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Minden állapot felírható

$$\frac{1}{2}(I + r_x\sigma_x + r_y\sigma_y + r_z\sigma_z) \equiv \frac{1}{2}(I + \vec{r}\cdot\vec{\sigma})$$

alakban, ahol $\|\vec{r}\|^2 = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 \leq 1$.

Legyen $\varrho = \frac{1}{2}(I + \vec{r}\cdot\vec{\sigma})$ és $\sigma = \frac{1}{2}(I + \vec{s}\cdot\vec{\sigma})$. Számoljuk ki $\|\varrho - \sigma\|_1$ és $F(\varrho, \sigma)$ értékét.

8. HF. Bármely $T : \mathcal{T}(\mathbb{C}^2) \to \mathcal{T}(\mathbb{C}^2)$ csatorna mátrixa az $I, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ bázisban kifejtve

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_x & a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ t_y & a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ t_z & a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vec{t} & A \end{pmatrix}$$

alakú. Mennyi ennek a trace-távolság kontrakciós együtthatója?

Ha $T(\varrho) = U\varrho U^* =: \Gamma_U(\varrho)$ valamely U unitér operátorral, akkor $\vec{t} = 0$ és $A \in \mathrm{SO}(3)$, így mindig lehet találni olyan U, V unitéreket, amivel $\Gamma_U \circ T \circ \Gamma_V$ mátrixában a jobb alsó elem diagonális. Hogyan lehet ezen diagonális elemekkel kifejezni a trace-távolság kontrakciós együtthatót?

9. HF. Egy $T : \mathcal{T}(\mathbb{C}^2) \to \mathcal{T}(\mathbb{C}^2)$ csatorna mátrixa az $I, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ bázisban

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vec{t} & A \end{pmatrix}$$

Mennyi a $\left\| T - \mathrm{id}_{\mathcal{T}(\mathbb{C}^2)} \right\|_{1-1}$ távolság?

10. HF. Legyen $T : \mathcal{T}(\mathcal{H}) \to \mathcal{T}(\mathcal{K})$ lineáris leképezés és $\mathcal{H}'$ Hilbert-tér. Ekkor

$$\left\| T \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{T}(\mathcal{H}')} \right\|_{\Diamond} = \|T\|_{\Diamond}$$

11. HF. Legyen $L : \mathcal{T}(\mathcal{H}) \to \mathcal{T}(\mathcal{H})$ lineáris leképezés. Ekkor a következők ekvivalensek:

1. L egy kvantum dinamikai félcsoport generátora
2. $L(\varrho) = \Phi(\varrho) - \kappa\varrho - \varrho\kappa^*$, ahol Φ teljesen pozitív, $\Phi^*(I) = \kappa + \kappa^*$
3. $$L(\varrho) = i[\varrho, H] + \sum_i \left(L_i \varrho L_i^* - \frac{1}{2}\{L_i^* L_i, \varrho\} \right)$$
4. $$L(\varrho) = i[\varrho, H] + \frac{1}{2}\sum_i \left([L_i, \varrho L_i^*] + [L_i\varrho, L_i^*] \right)$$

ahol $H = H^* = \frac{\kappa - \kappa^*}{2i}$, és L_i a Φ Kraus-operátorai.

12. HF. Legyenek $\varrho, \sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_X \otimes \mathcal{H}_A)$ klasszikus-kvantum állapotok, azaz

$$\varrho_{XA} = \sum_{x \in \mathcal{X}} P_X(x) |x\rangle\langle x| \otimes \varrho_x \sigma_{XA} \qquad = \sum_{x \in \mathcal{X}} Q_X(x) |x\rangle\langle x| \otimes \sigma_x$$

Ekkor

$$D(\varrho || \sigma) = D(P||Q) + \sum_{x \in \mathcal{X}} P_X(x) D(\varrho_x || \sigma_x)$$

13. HF. Legyen $\varrho_{A_1 \dots A_n B} \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_{A_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{A_n} \otimes \mathcal{H}_B)$. Ekkor

$$\begin{aligned} I(A_1 \dots A_n; B)_\varrho \\ = I(A_1; B)_\varrho + I(A_2; B|A_1)_\varrho + \dots + I(A_n; B|A_1 \dots A_{n-1})_\varrho \end{aligned}$$

14. HF. Legyen $\mathcal{H}_A = \mathcal{H}_B = \mathbb{C}^d$, $\varrho_{AB} \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ szeparált. Ekkor $I(A; B)_\varrho \leq \log d$.

15. HF. Legyen $\varrho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$. Ekkor

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} H_\infty^\varepsilon(\varrho^{\otimes n}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} H_\infty^\varepsilon(\varrho^{\otimes n}) = H(\varrho)$$

16. HF. Legyen $T : \ell^1(\mathcal{X}) \to \ell^1(\mathcal{Y})$ lineáris leképezés. Ekkor $\|T\|_{1-1} = \|T\|_\diamondsuit$.

17. HF. Legyen $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$, $S_{xy} = (1-p)\delta_{xy} + p(1-\delta_{xy})$ a szimmetrikus bináris csatorna. Mi ennek a klasszikus kapacitása?

18. HF. Legyen $N_p : \mathcal{T}(\mathbb{C}^2) \to \mathcal{T}(\mathbb{C}^2)$ az a csatorna, amire $N_p(\varrho) = (1 - p)\varrho + p\sigma_z \varrho \sigma_z$. Mutassuk meg, hogy $C_{\mathrm{ent}}(N_p) = 2 - h(p)$.

19. HF. Egy $\varrho \in \mathcal{H}$ állapot pontosan akkor szeparált, ha $1 \xrightarrow{\text{LOCC}} \varrho$, ahol $1 \in \mathcal{S}(\bigotimes_{k \in K} \mathbb{C}) \simeq \mathcal{S}(\mathbb{C})$.

20. HF. Mutassuk meg, hogy ha $\varrho, \sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_{AB})$ tiszta állapotok és létezik $n \in \mathbb{N}$, hogy $\varrho \xrightarrow{\text{LOCC}} \sigma$, akkor létezik olyan $\tau \in \mathcal{S}(\mathcal{K}_{AB})$ tiszta állapot egy alkalmas Hilbert-téren, amire $\varrho \otimes \tau \xrightarrow{\text{LOCC}} \sigma \otimes \tau$.