A KLASSZIKUS MECHANIKA MATEMATIKAI MÓDSZEREI

Házi feladatok – 2015/16 tavasz

A feladatok közül szabadon lehet választani. Az összpontszám alapján alakul ki az érdemjegy a szokásos ponthatárokkal: 40-55-70-85. A beadás határideje az pótlási hét vége.

1. Differenciálgeometria

1.1. Feladat (5p)**.** Mutassuk meg, hogy $S^1 = \{(x,y)|x^2+y^2=1\}$ részsokaság $\mathbb{R}^2$-ben.

1.2. Feladat (5p)**.** Legyen $\pi : E \to B$ sima vektornyaláb, $f : B' \to B$ sima leképezés. Definiáljuk az $f^*\pi : f^*E \to B'$ visszahúzott nyalábot

$$f^*E = \{(e,b')|\pi(e) = f(b')\}, \qquad f^*\pi(e,b') = b'$$

módon. Bizonyítsuk be, hogy ez sima vektornyaláb B' felett.

1.3. Feladat (5p)**.** Legyen $M = S^1 = \{(\cos\alpha, \sin\alpha)|\alpha \in \mathbb{R}\}$,

$$E = \{(\cos\alpha, \sin\alpha, \beta\cos(\alpha/2), \beta\sin(\alpha/2))|\alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

és Möb : $E \to M$ az első két koordinátára való projekció. Ekkor Möb nemtriviális 1-rangú vektornyaláb S^1 felett. Mutassuk meg, hogy Möb $\oplus$ Möb triviális.

1.4. Feladat (10p)**.** a) Mutassuk meg, hogy minden M sima sokasághoz megadható egy $s_M : T(TM) \to T(TM)$ involúció, amivel $\tau_{TM} = T(\tau_M) \circ s_M$.

b) Bizonyítsuk be, hogy ha $f : M \to N$ kétszer folytonosan differenciálható, akkor $T^2 f \circ s_M = s_N \circ T^2 f$.

1.5. Feladat (5p)**.** Legyen $F : \mathbb{R} \times M \to M$, $(t,m) \mapsto F_t(m)$ sima leképezés, amire $F_{t+s} = F_t \circ F_s$ és $F_0 = \mathrm{id}_M$. Bizonyítsuk be, hogy létezik pontosan egy X vektormező M-en, aminek folyama F.

1.6. Feladat (5p)**.** Keressünk S^1-en olyan zárt 1-formát, ami nem egzakt. Mik S^1 de Rham-kohomológia-csoporjai?

1.7. Feladat (5p)**.** Legyen M kompakt sokaság, X sima vektormező, F_t az X folyama, Ω egy X-invariáns térfogat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $U \subseteq M$ nyílt halmaz és $t \geq 0$ esetén létezik $s \geq t$, amire $U \cap F_s(U) \neq \emptyset$.

2. Riemann-geometria

2.1. Feladat (10p)**.** Gömbi koordinátákban határozzuk meg $\mathbb{R}^3$ egységgömbjén az indukált Riemann-metrika komponenseit és a Christoffel-szimbólumokat. Ellenőrizzük, hogy a geodetikusok éppen a főkörök.

2.2. Feladat (10p)**.** Legyen (Q, g) Lorentz-sokaság, A 1-forma Q-en. Lokális koordinátákat választva a komponenseket jelölje g_{ij} és A_i, ahol $i = 1, 2, 3, 4$. Legyen S^1-en a koordináta θ, és tekintsük a $Q \times S^1$ sokaságon azt a Lorentz-metrikát, amelynek komponensei

$$\begin{aligned} h_{ij} &= g_{ij} + A_i A_j \\ h_{\theta i} = h_{i\theta} &= -A_i \\ h_{\theta\theta} &= 1 \end{aligned}$$

Írjuk fel a geodetikusok egyenletét lokális koordinátákkal.

2.3. Feladat (15p)**.** Tekintsük az $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ félsíkot mint $\mathbb{R}^2$ részhalmazát, ellátva az x, y koordinátafüggvényekkel. Ekkor

$$g = \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}x \otimes \mathrm{d}x + \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y \otimes \mathrm{d}y$$

Riemann-metrika.

a) Írjuk fel a geodetikusok differenciálegyenletét.

b) Lássuk be, hogy a megoldások az y tengellyel párhuzamos egyenesek és az x tengely pontjai körüli félkörök. (Útmutatás: számítsuk ki $\frac{\dot{x}}{y^2}$ és $\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{y^2}$ deriváltját.)

c) Határozzuk meg a geodetikusok paraméteres egyenletét.

3. Variációszámítás

3.1. Feladat (5p)**.** Tegyük fel, hogy az L Lagrange-függvény a $q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, \ldots, q_i^{(m)}$ deriváltak függvénye, ahol a q_i-k valós értékűek. Határozzuk meg az Euler-Lagrange egyenleteket, azaz a hatás stacionárius pontjainak egyenleteit.

3.2. Feladat (5p)**.** Legyen f olyan pozitív C^2-függvény, amelyre $f(-1) = f(1) = (e + e^{-1})/2$. Ha a függvény grafikonját az x tengely körül megforgatjuk, akkor a kapott forgástest felülete

$$S(f) = \int 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

lesz. Milyen f függvény mellett lesz a felület minimális?

3.3. Feladat (20p)**.** Tekintsünk N egyforma tömegű testet, amelyek egy síkban az egymás közötti gravitációs erő hatására mozognak. Jelölje az i. test helyét az idő függvényében $q_i(t)$ $(i = 0, 1, \ldots, N-1)$. A mozgásegyenlet egy megoldását N-koreográfiának nevezzük, ha létezik olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ 2π szerint periodikus függvény, amivel

$$q_i(t) = f\left(t - \frac{i}{N}2\pi\right)$$

teljesül. A Lagrange-függvény

$$L(q_0,\dots,q_{N-1},\dot q_0,\dots,\dot q_{N-1}) = \sum_{i=0}^{N-1}\frac{1}{2}|\dot q_i|^2 + \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N-1}\frac{1}{|q_i-q_j|}$$

alakú, q_i fenti alakját behelyettesítve az

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_0^{2\pi} L(q_0(t),\dots,q_{N-1}(t),\dot q_0(t),\dots,\dot q_{N-1}(t))\,\mathrm{d}t \\ &= N\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}|\dot f(t)|^2 + \sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{f(t)-f\left(t-\frac{i}{N}2\pi\right)}\right)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

hatás stacionárius pontjai között kereshetünk N-koreográfiákat. $N\geq 2$ esetén mindig létezik egy triviális N-koreográfia, ahol a testek egyenletes körmozgást végeznek. Számítógép segítségével keressünk közelítőleg nemtriviális N-koreográfiákat a fenti hatás stacionárius pontjainak (például lokális minimumok) numerikus keresésével az

$$f(t) = \sum_{n=1}^{r}(A_r\cos rt + B_r\sin rt, C_r\cos rt + D_r\sin rt)$$

alakú függvények terén valamely rögzített $N\geq 3$ és (elég nagy) r esetén.

3.4. Feladat (10p)**.** Legyen M kompakt peremes sokaság, N sima sokaság, $b:\partial M\to N$ adott folytonos függvény, $r\in\mathbb{N}$. Legyen

$$C^r(M,N,b) := \left\{f\in C(M,N)\middle| f|_{M\setminus\partial M}\in C^r(M\setminus\partial M,N), f|_{\partial M}=b\right\}.$$

a) Mutassuk meg, hogy $C^r(M,N,b)$ Banach-sokaság.

b) Bizonyítsuk be, hogy ha $c\in C^r(M,N,b)$, akkor

$$T_cC^r(M,N,b)\simeq\{v\in\Gamma(c^*TN)|v_{\partial M}=0\}$$

3.5. Feladat (15p)**.** Legyenek $t_1<t_2$, $x_1<x_2$ valós számok, $D=[t_1,t_2]\times[x_1,x_2]\subseteq\mathbb{R}^2$ és ∂D a határa. Adott $b:\partial D\to\mathbb{R}$ folytonos függvény esetén legyen

$$C^r(D,\mathbb{R},b) = \left\{f\in C(D,\mathbb{R})\middle| f|_{D\setminus\partial D}\in C^r(D\setminus\partial D,\mathbb{R}), f|_{\partial D}=b\right\}$$

Ez affin tér a $C^r(D,\mathbb{R},0)$ Banach-tér felett (0 itt a konstans 0 értékű függvény ∂D-n), tehát beszélhetünk egy rajta értelmezett függvény differenciálhatóságáról.

Legyen $L\in C^2(\mathbb{R}^2)$ függvény, és tekintsük az $S: C^r(D,\mathbb{R},b)\to\mathbb{R}$

$$S(q) = \iint_D L(q'_t(t,x),q'_x(t,x))dtdx$$

funkcionált.

a) Mutassuk meg, hogy S differenciálható.

b) Bizonyítsuk be, hogy $dS(q) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha az

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left.\frac{\partial L(a,b)}{a}\right|_{a=q'_t(t,x),b=q'_x(t,x)}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\left.\frac{\partial L(a,b)}{b}\right|_{a=q'_t(t,x),b=q'_x(t,x)}\right)$$

Euler-Lagrange egyenlet fennáll.

c) Milyen egyenletet kapunk, ha $L(a,b) = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)$?

3.6. Feladat (15p)**.** Legyen M kompakt n dimenziós irányított sokaság. Ha $g \in \Gamma(S^2T^*M)$ Riemann-metrika, jelölje $R_g \in C^\infty(M)$ és $\mu_g \in \Gamma(\Lambda^n T^*M)$ a hozzá tartozó skalárgörbületet és térfogatot. Írjuk fel lokális koordinátákkal az

$$S(g) = \int_M R_g \mu_g$$

hatásból kapott Euler-Lagrange-egyenleteket.

4. Lagrange-rendszerek

4.1. Feladat (5p)**.** Legyen $Q = \mathbb{R}$, $TQ \simeq \mathbb{R}^2$, rajta az indukált koordináták $q, \dot{q}$. Írjuk fel az $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \arctan q$ Lagrange-függvényből kapott Lagrange-2-formát és a Lagrange-vektormezőt.

4.2. Feladat (10p)**.** Legyen $L : TQ \to \mathbb{R}$ Lagrange-függvény.

a) Legyen $f : Q \to Q$ olyan diffeomorfizmus, amire $L \circ Tf = L$. Mutassuk meg, hogy $(Tf)^*\theta_L = \theta_L$, és így Tf szimplektikus.

b) Legyen X vektormező Q-n, F_t a folyama, és tegyük fel, hogy minden t-re $L \circ TF_t = L$. Bizonyítsuk be, hogy TF_t a $\mu : v \mapsto FL(v) \cdot X$ Hamilton-függvényhez tartozó Hamilton-vektormező folyama.

4.3. Feladat (5p)**.** Legyen g Riemann-metrika a Q sokaságon, $V : Q \to \mathbb{R}$ és Y vektormező Q-n. Mutassuk meg, hogy az $L : TQ \to \mathbb{R}$,

$$L(v) = \frac{1}{2}g(v,v) + V(\tau_Q v) + g(v, Y(\tau_Q v))$$

Lagrange-függvény hiperreguláris.

4.4. Feladat (10p)**.** Legyen $Q = \mathbb{R}$ és $H \in C^\infty(T^*Q)$ a

$$H(q,p) = \frac{1}{2}\left(p^2 + \alpha^2 q^2\right)$$

függvény.

a) Határozzuk meg X_H-t és annak folyamát.

b) Adjuk meg az FH függvényt, a hozzá tartozó Lagrange-függvényt, és ellenőrizzük, hogy az Euler-Lagrange egyenletek megoldásai és X_H integrálgörbéi megfelelnek egymásnak a Legendre-transzformáció alatt.

5. Szimplektikus geometria

5.1. Feladat (10p)**.** Legyen (E, ω) szimplektikus vektortér. $e \in E$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén legyen $\tau_{e,\lambda} : E \to E$ a

$$\tau_{e,\lambda}(x) = x + \lambda\omega(x, e)e$$

lineáris leképezés.

a) Mutassuk meg, hogy $\tau_{e,\lambda} \in \mathrm{Sp}(E, \omega)$. (azaz minden $x, y \in E$ esetén $\omega(x, y) = \omega(\tau_{e,\lambda}(x), \tau_{e,\lambda}(y))$)

b) Bizonyítsuk be, hogy az ilyen leképezések generálják $\mathrm{Sp}(E, \omega)$-t.

5.2. Feladat (10p)**.** Legyen M kompakt irányított sokaság, μ és ν két térfogati forma, amelyekre $\int_M \mu = \int_M \nu$.

a) Lássuk be, hogy $\mu - \nu$ egzakt.

b) Ha $\mu - \nu = \mathrm{d}\alpha$, akkor legyen $\nu_t = t\nu + (1 - t)\mu$ és X_t az a (t-től függő) vektormező, amelyre $\iota_{X_t}\nu_t = \alpha$. Legyen F az X_t folyama és $f = F_1$. Mutassuk meg, hogy $f^*\nu = \mu$.

5.3. Feladat (10p)**.** Legyen M sokaság, g Riemann-metrika, J komplex struktúra M-en, azaz TM egy vektornyaláb-automorfizmusa, amelyre minden x pontban $J_x := J|_{T_xM}$ jelöléssel $J_x^2 = -\mathrm{id}_{T_xM}$ teljesül, és tegyük fel, hogy J g-ortogonális. M *Kähler-sokaság*, ha $\nabla J = 0$ (ahol ∇ a Levi-Civita-konnexió). Ha $u, v \in T_xM$, akkor legyen

$$\omega_x(u, v) = g_x(J_xu, v)$$

Bizonyítsuk be, hogy ekkor ω szimplektikus forma M-en.

5.4. Feladat (5p)**.** Tekintsük a $\rho : \mathbb{R} \times S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $(r, \theta) \mapsto (r \cos\theta, r \sin\theta)$ diffeomorfizmust. (θ nem terjeszthető ki sima függvénnyé globálisan, de $\cos\theta$, $\sin\theta$ és $\mathrm{d}\theta$ mégis globálisan értelmes.) Mutassuk meg, hogy $\mathrm{d}(r^2/2) \wedge \mathrm{d}\theta$ térfogat és ρ szimplektikus erre és $\mathbb{R}^2$ standard szimplektikus formájára nézve.

5.5. Feladat (10p)**.** Legyen $\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ $\mathbb{R}$-bilineáris, amivel $C^\infty(M)$ Lie-algebra. Tegyük fel, hogy minden $f \in C^\infty(M)$ esetén $g \mapsto \{f, g\}$ deriváció, és csak akkor azonosan 0, ha f konstans. Mutassuk meg, hogy az

$$\Xi_x((\mathrm{d}f)_x, (\mathrm{d}g)_x) = \{f, g\}(x)$$

formula Λ^2TM egy nemelfajuló szelését határozza meg, ami egy 2-formát határoz meg M-en (Ha $v \in T_xM$, akkor létezik egyértelműen $\alpha \in T_x^*M$, amire minden $\beta \in T_x^*M$ esetén $\Xi_x(\alpha, \beta) = \beta(v)$. Így ha $v_1, v_2 \in T_xM$, akkor ebből hasonlóan α_1, α_2 előállítható, ezzel legyen $\omega_x(v_1, v_2) = \Xi_x(\alpha_1, \alpha_2)$). Mutassuk meg, hogy ez szimplektikus forma.

6. Hamilton-rendszerek

6.1. Feladat (10p)**.** Legyen H_1 és H_2 két Hamilton-függvény az (M, ω) szimplektikus sokaságon, és legyen $\Sigma \subseteq M$ közös reguláris energiafelületük.

a) Lássuk be, hogy $x \in \Sigma$ esetén $E_x = \{v \in T_x\Sigma | \iota_v \omega_x = 0\}$ egydimenziós.

b) Mutassuk meg, hogy ekkor X_{H_1} és X_{H_2} integrálgörbéi paraméterezéstől eltekintve megegyeznek Σ-n.

6.2. Feladat (5p)**.** Adjunk példát $T^*\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$-en olyan Hamilton-rendszerre, amelynek a 0 pont egyensúlyi helyzete, egy irány vonzó, egy taszító és létezik zárt orbitoknak egy kétdimenziós sokasága.

6.3. Feladat (10p)**.** Legyen $M = T^*\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^4$, rajta a kanonikus koordinátákat jelölje q_1, q_2, p_1, p_2. Írjuk fel a $H = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{\alpha}{2}(q_1 - q_2)^2$ Hamilton-függvényhez tartozó Hamilton-vektormezőt és határozzuk meg az integrálgörbéket.

6.4. Feladat (5p)**.** Legyen $M = T^*\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2$, a két koordinátafüggvény q és p, amivel a kanonikus szimplektikus forma $\omega = \mathrm{d}q \wedge \mathrm{d}p$. Határozzuk meg a $H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{\alpha}{2}q^2$ Hamilton-függvényhez tartozó partíciós függvényt.

6.5. Feladat (10p)**.** Legyen M négydimenziós sokaság, g rajta egy Lorentz-metrika (tehát olyan pszeudo-Riemann-metrika, aminek szignatúrája minen pontban $+, -, -, -$). Legyen $H(\alpha_q) = \frac{1}{2}g_q(g^\sharp\alpha_q, g^\sharp\alpha_q)$ Hamilton-függvény T^*M-en. Az X_H egy $(q(t), p(t))$ integrálgörbéjének tömege az $m_0 = \sqrt{H(q(t), p(t))}$ érték (ez nem függ t-től).

a) Mutassuk meg, hogy ha két integrálgörbe $(q_1(0), p_1(0))$ és $(q_2(0), p_2(0))$ kezdőpontjaira igaz, hogy $q_1(0) = q_2(0)$ és $p_1(0)$ párhuzamos $p_2(0)$-val, akkor paraméterezéstől eltekintve megegyezik az integrálgörbék vetülete M-en.

b) Legyen F zárt 2-forma M-en, ω_0 a kanonikus 2-forma, $e \in \mathbb{R}$. Legyen

$$\omega_F = \omega_0 + e(\tau_M^*)^* F.$$

Mutassuk meg, hogy ω_F szimplektikus forma, és írjuk fel koordinátákkal a Hamilton-egyenleteket a fenti H-val és ezzel a szimplektikus formával.

6.6. Feladat (15p)**.** Legyen $Q = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ a szokásos metrikával, $V(q) = -\frac{1}{\|q\|}$, és tekintsük az ebből származó $H = K + V \circ \tau_Q^* : T^*Q \to \mathbb{R}$ Hamilton-függvényt.

a) Bizonyítsuk be, hogy X_H minden negatív energiájú integrálgörbéje periodikus vagy csak véges ideig létezik.

b) Határozzuk meg a periodikus orbitok terét.

c) Lássuk be, hogy H-nak ezen nincsen stacionárius pontja, és így a periódusidő csak az energiától függ.

7. Lie-csoportok

7.1. Feladat (15p)**.** Azonosítsuk $SO(3)$ Lie-algebráját az $\mathbb{R}^3$ térrel az

$$x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto \hat{x} = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

leképezés segítségével.

a) Mutassuk meg, hogy $[\hat{x}, \hat{y}] = (x \times y)\hat{}$, ahol $\times$ a vektoriális szorzás.

b) Legyen $\hat{x} \in T_e SO(3)$. Mutassuk meg, hogy $\exp t\hat{x}$ az x tengely körüli $t\|x\|$ szögű forgatás, ahol $\|\cdot\|$ az euklideszi norma.

c) Tekintsük $SO(3)$-nak az $\mathbb{R}^3$ sokaságon az $(A, y) \mapsto Ay$ hatását. Mutassuk meg, hogy $\hat{x}$ infinitezimális generátora $\hat{x}_{\mathbb{R}^3}(y) = (y, x \times y)$.

7.2. Feladat (5p)**.** Legyen $\mathbb{R}^\times$ a nullától különböző valós számok Lie-csoportja a szorzással. Mutassuk meg, hogy a $\det : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\times$ homomorfizmus érintőleképezése $(T_e \det)A = \operatorname{Tr} A$.

7.3. Feladat (10p)**.** Legyen G Lie-csoport, $e \in G$ egységelem. Legyen $\tilde{G}$ a G univerzális fedőtere, $\pi : \tilde{G} \to G$ a kanonikus projekció. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\tilde{e} \in \pi^{-1}(e)$ választás esetén létezik $\tilde{G}$-on egy egyértelmű Lie-csoport struktúra, amelyre e' egységelem és π homomorfizmus. Az így kapott $\tilde{G}$ a G univerzális fedőcsoportja.

8. Momentum-leképezések

8.1. Feladat (5p)**.** Legyen Q sokaság, G Lie-csoport, aminek adott egy hatása Q-n. Legyen ω_0 a kanonikus 2-forma, $e \in \mathbb{R}$ és A egy G-invariáns 1-forma Q-n. Legyen $F = \mathrm{d}A$ és

$$\omega_F = \omega_0 + e(\tau_Q^*)^* F,$$

így G indukált hatása (T^*Q, ω_F)-en szimplektikus. Mutassuk meg, hogy

$$\hat{J}(\xi) \cdot \alpha_q = (\alpha_q - eA(q)) \cdot \xi_Q(q)$$

momentum-leképezés ehhez a hatáshoz.

8.2. Feladat (10p)**.** Legyen (M, ω) szimplektikus sokaság, amin a G és $\bar{G}$ Lie-csoportok hatnak, legyenek $J : M \to T_e^* G$ és $\bar{J} : M \to T_e^* \bar{G}$ ezekhez tartozó Ad^*-ekvivariáns momentum-leképezések. Tegyük fel, hogy $\mu \in T_e^* G$ reguláris értéke J nek és G_μ hatása $J^{-1}(\mu)$-n szabad és proper. Tegyük fel továbbá, hogy G és $\bar{G}$ hatása kommutál és $\bar{J}$ G-invariáns.

a) Bizonyítsuk be, hogy ekkor J $\bar{G}$-invariáns.

b) Mutassuk meg, hogy M_μ-n indukálódik egy kanonikus $\bar{G}$-hatás, $\bar{J}_\mu : M_\mu \to T_e^*\bar{G}$ momentum-leképezéssel, amelyre $\bar{J}_\mu \circ \pi_\mu = \bar{J} \circ i_\mu$ teljesül.

8.3. Feladat (15p)**.** Legyen $Q = (\mathbb{R}^3)^n$ n darab tömegpont konfigurációs tere, és tekintsük $G = SO(3) \ltimes \mathbb{R}^3$ szokásos hatását tényezőnként. Legyen $H : T^*Q \to \mathbb{R}$

$$H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\|p_i\|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq} U(\|q_i - q_j\|),$$

ahol $U : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ adott sima függvény.

a) Keressünk a T^*Q-n indukált hatáshoz momentum-leképezést.

b) Ellenőrizzük, hogy H G-invariáns.

c) Határozzuk meg a redukált fázisteret és a rajta indukált Hamilton-függvényt.

8.4. Feladat (10p)**.** Hasson $G = SO(2)$ forgatásokkal $Q = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$-n és legyen $V : Q \to \mathbb{R}$ G-invariáns potenciál. Tekintsük $K(v) = \frac{1}{2}m\|v\|^2$ mellett az $L(q, v) = K(v) - V(q)$ Lagrange-függvényt.

a) Hogy néz ki a Hamilton-függvény?

b) Mutassuk meg, hogy a redukált Hamilton-operátor is kinetikus+potenciális energia alakú. Mi az új potenciál?

8.5. Feladat (15p)**.** Mutassuk meg, hogy ha G Lie-csoport, g balinvariáns Riemann-metrika és $V : G \to \mathbb{R}$ potenciál, akkor az effektív potenciál

$$V_\mu(g) = V(g) + \frac{1}{2}\|\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\mu\|^2$$

8.6. Feladat (15p)**.** Legyen $Q = \mathbb{R}^d$, amin a $G = SO(d)$ csoport hat, és legyen $H : T^*Q \to \mathbb{R}$, $H(q, p) = \frac{1}{2}\|p\|^2 + V(\|q\|)$.

a) Keressünk $J : T^*Q \to T_e^*G$ momentum-leképezést az indukált hatáshoz.

b) Adjuk meg a redukált fázisteret.

c) Mi az indukált Hamilton-függvény?

8.7. Feladat (15p)**.** Legyen $Q = S^{d-1} = \{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d | x_1^2 + \cdots + x_d^2 = 1\}$ az indukált Riemann-metrikával, amin a $(0, \ldots, 0, 1)$ pont stabilizátora, a $G = SO(d-1)$ csoport hat, és legyen $H : T^*Q \to \mathbb{R}$, $H = K + V \circ \tau_Q^*$ alakú, ahol V G-invariáns potenciál, K pedig a metrikából származó kinetikus energia.

a) Keressünk $J : T^*Q \to T_e^*G$ momentum-leképezést az indukált hatáshoz.

b) Adjuk meg a redukált fázisteret.

c) Hogy néz ki az indukált Hamilton-függvény?

8.8. Feladat (10p)**.** Legyen G kompakt Lie-csoport, $\mathcal{H}$ véges dimenziós Hilbert-tér, $\rho : G \to U(\mathcal{H})$ homomorfizmus (unitér reprezentáció). Ez indukál egy $G \times P(\mathcal{H}) \to P(\mathcal{H})$ hatást. Adjunk meg egy Ad^*-ekvivariáns momentum-leképezést ehhez a hatáshoz.

8.9. Feladat (20p)**.** Legyen $Q = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ a szokásos metrikával, $V(q) = -\frac{1}{|q|}$, és tekintsük az ebből származó $H = K + V \circ \tau_Q^* : T^*Q \to \mathbb{R}$ Hamilton-függvényt. A

$$\Sigma_- = \{(q,p) \in T^*Q | H(q,p) < 0\}$$

részsokaságon tekintsük $L = q \times p$ és $R = p \times L - \frac{q}{\|q\|}$ vektorokat. (Az előbbi az impulzusmomentum, az utóbbi neve Runge-Lenz-vektor.)

a) Poisson-zárójelek segítségével bizonyítsuk be, hogy L és R komponensei mozgásállandók.

b) Legyen $K = \frac{R}{\sqrt{-2H}}$. Igazoljuk, hogy

$$\{L_i, L_j\} = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} L_k$$
$$\{L_i, K_j\} = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} K_k$$
$$\{K_i, K_j\} = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} L_k$$

ahol $\epsilon_{123} = 1$ és $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji}$.

c) Legyen $J_i^{\pm} = \frac{1}{2}(L_i \pm K_i)$. Hogyan néznek ki ezek Poisson-zárójelei? Igazoljuk, hogy az ezek által meghatározott Hamilton-vektormezők az $SU(2) \times SU(2)$ csoport egy hatásának infinitezimális generátorai.

d) Igaz-e, hogy ez a hatás keresztülfaktorizálódik az $SU(2) \times SU(2) \to SO(4)$ univerzális fedőleképezésen? És az $SU(2) \times SU(2) \to SO(3) \times SO(3)$ univerzális fedőleképezésen?