5. feladatsor

Folytonos idejű Markov-láncok

2010. november 29. és december 1.

1. Adott egy öt állapotú ($\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$) Markov-lánc a következő átmenetvalószínűségi mátrixszal:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(az állapot sorrend 0,1,2,3,4 felülről lefelé, illetve balról jobbra).

Definiáljuk a következő sztochasztikus folyamatot: két ugrás között az egyes állapotokban véletlen hosszú ideig tartózkodik, de ha ugrik, akkor az ugrás helyét a fent definiált Markov-lánc írja le. Pontosabban, ha a 0-ás, 1-es, 2-es, 3-as, vagy 4-es állapotokba ugrott, akkor a következő ugrásig eltelő idő eloszlása sorrendben $Exp(1), Exp(4), Exp(4), Exp(4), Exp(2)$. Feltesszük továbbá, hogy a tartózkodási idők függetlenek egymástól.

A most definiált sztochasztikus folyamat egy 4 helyet tartalmazó kiszolgáló sorhossz fejlődését írja le, amelyben a kiszolgálás csak véletlen időnként van, de akkor azonnal kiszolgálja az összes igényt. Ha 4-en állnak sorban, akkor a kiszolgálás mindenképpen megtörténik.

   (a) Írjuk fel a folytonos idejű Markov-lánc gráfreprezentációját. (Az irányított éleken az exponenciális órák paramétere van feltüntetve.)

   (b) Határozzuk meg, hogy hosszú távon hány százalékban tartózkodik az egyes állapotokban.

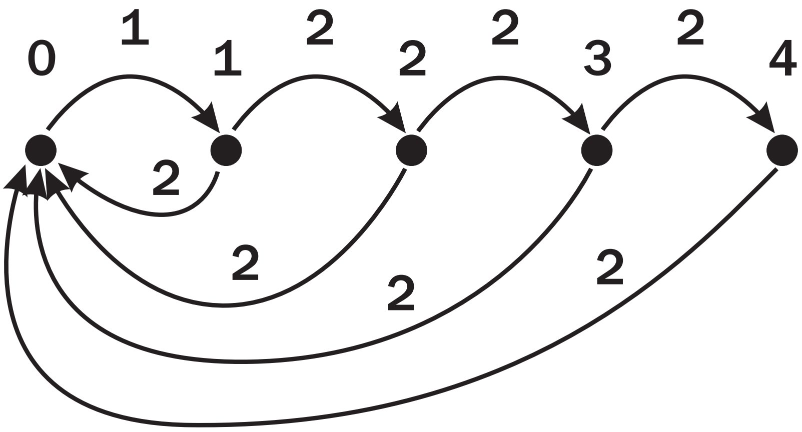
   (c) Az állapotokhoz egy költségrátafüggvény is adott: i állapotba lépésnek a költségrátája $i + 2$, $i = 0, 1, 2, \ldots, 4$. Mi a hosszú távú átlagos költsége a folyamatnak?

Megoldás:

   (a) A folyamat generátora:

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

A gráfreprezentáció:



(b) A hosszú távú viselkedést a diszkrét idejű esethez hasonlóan itt is a stacionárius eloszlás adja meg, amit ez esetben a $\pi G = 0$ egyenlet megoldása ad. Ez egy lineáris egyenletrendszer a π vektor koordinátáira, amelyet az egyenletrenszereknél szokásos alakban írva ($G^T \pi^T = 0$) az együtthatómátrixa

$$G^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ebben az alakban rögtön le is olvasható a megoldás (nincs szükség Gauss-eliminációra). Ha az utolsó koordinátát a t szabad paraméternek választjuk, akkor

$$\pi = (16t, 4t, 2t, t, t)$$

adódik. Hogy valószínűségi eloszlást kapjunk, vagyis a koordináták összege 1 legyen, $t = 1/24$-et választjuk, ezzel az egyes állapotokban az idő ekkora részében tartózkodik a Markov-lánc:

$$\pi = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \frac{1}{24}\right).$$

(c) A hosszú távú átlagos költség adott $f(i) = i + 2$ költségrátafüggvény mellett

$$\mathbf{E}_\pi(f) = \sum_{i=0}^{4} \pi_i f(i) = \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{12} \cdot 4 + \frac{1}{24} \cdot 5 + \frac{1}{24} \cdot 6 = \frac{21}{8}.$$

2. *On-Off rendszer.* Ha egy gép működőképes, akkor $Exp(\lambda)$ ideig még működik. Ha elromlik, akkor a megjavítása $Exp(\mu)$ ideig tart, eddig nem működőképes. Amint megjavították, rögtön működni kezd. Javítási és működési periódusok minden tekintetben függetlenek egymástól. Határozzuk meg, hogy az idő hány százalékában működőképes a gép.

Megoldás: Két állapot van, On és Off. A generátormátrix

$$G = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}.$$

A $G^T \pi^T = 0$ egyenletet megoldva a

$$\pi = \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}, \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)$$

adódik stacionárius eloszlásnak. Az On vagyis a működőképes állapotban a rendszer az idő $\pi_{\mathrm{On}} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$ részét tölti.

3. Legyen X_t folytonos idejű Markov-lánc az $S = \{1, 2, 3, 4\}$ állapottéren, melynek generátora

$$G = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Írjuk fel az X_t Markov-lánc stacionárius eloszlását.

(b) Tegyük fel, hogy a Markov-lánc az 1 állapotból indul. Mennyi az első ugrásig eltelt idő várható értéke?

(c) Újból tegyük fel, hogy a Markov-lánc az 1 állapotból indul. Mennyi a 4 állapot első elérési idejének várható értéke?

Megoldás:

(a) A $G^T \pi^T = 0$ egyenlet megoldásaként megkapjuk a

$$\pi = \left(\frac{3}{38}, \frac{7}{38}, \frac{9}{38}, \frac{19}{38} \right)$$

stacionárius eloszlást.

(b) Az 1 állapotból elugrási ráta $-G_{1,1} = 3$, vagyis az elugrásig eltelt idő 3 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, amelynek várható értéke $1/3$.

(c) Jelölje T a 4 állapot első eléréséig szükséges lépések számát, ami egy valószínűségi változó. Kérdés az $\mathbf{E}(T \mid X_0 = 1)$ feltételes várható érték. Többet fogunk megmondani, kiszámoljuk X_T feltételes várható értékét minden lehetséges kiindulási állapotból. Legyen tehát

$$\begin{aligned} x_1 &= \mathbf{E}(T \mid X_0 = 1), \\ x_2 &= \mathbf{E}(T \mid X_0 = 2), \\ x_3 &= \mathbf{E}(T \mid X_0 = 3). \end{aligned}$$

Jelölje T_1 a Markov-lánc első ugrásának véletlen idejét. Az előző feladat alapján $\mathbf{E}(T_1 \mid X_0 = 1) = 1/3$. A generátor első sora alapján világos, hogy a Markov-lánc a T_1 véletlen időpontban 1/3–1/3 valószínűséggel ugrik a $2, 3, 4$ állapotok valamelyikébe. A teljes várható érték tétele alapján tehát felírható a következő felbontás:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(T \mid X_0 = 1) = \mathbf{E}(T_1 \mid X_0 = 1) & \\ + \mathbf{E}(T - T_1 \mid X_{T_1} = 2, X_0 = 1)\mathbf{P}(X_{T_1} = 2 \mid X_0 = 1) & \\ + \mathbf{E}(T - T_1 \mid X_{T_1} = 3, X_0 = 1)\mathbf{P}(X_{T_1} = 3 \mid X_0 = 1) & \\ + \mathbf{E}(T - T_1 \mid X_{T_1} = 4, X_0 = 1)\mathbf{P}(X_{T_1} = 4 \mid X_0 = 1) & \\ = \frac{1}{3} + x_2 \cdot \frac{1}{3} + x_3 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} & \end{aligned}$$

Hasonló felírás elkészíthető az x_2-t ill. x_3-at definiáló feltételes várható értékekre is, amely után az

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\ x_2 &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_3 \\ x_3 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x_1 + \frac{2}{4}x_2 \end{aligned}$$

egyenletrendszer adódik, amelynek megoldása az $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, vagyis a kérdéses feltételes várható érték 1.

4. Tekintsük az $M/M/2$ kiszolgálómodellt λ beérkezési intenzitással. A csomagok mérete egymástól független, exponenciális eloszlású μ paraméterrel. A /2 azt jelenti, hogy 2 szerver szolgálja ki a csomagokat. Egy szerver egyszerre csak egy csomagot szolgál ki.

   (a) Számoljuk ki a stacionárius eloszlását a rendszernek.

   (b) A rendszer beindítása után sok idővel megvizsgáljuk, hogy hány csomag van a kiszolgálóban. Mi a valószínűsége, hogy ez a szám legfeljebb N, ahol N egy pozitív egész.

   (c) Az idő mekkora hányadában van N-nél több csomag a rendszerben?

   (d) Egy csomag tárolásának az ára egy időegységig \$1. Határozzuk meg, hogy a rendszer működésének mennyi a hosszú távú költsége, azaz egy időegységre eső költsége.

   (e) Legyen $\lambda = 1$ $\mu = 2$. Mekkora legyen a puffer mérete, ha azt szeretnénk, hogy az idő legfeljebb 10^{-8} részében legyen teli a puffer. Közelítsünk végtelen pufferes rendszerrel.

   Megoldás:

   (a) A folyamat egy folytonos idejű Markov-lánc a $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ állapottéren. Generátora:

$$G = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

   A $G^T \pi^T = 0$ egyenletetrendszer egyenleteit egyenként megoldva a

$$\pi_k = \pi_0 \frac{\lambda^k}{2^{k-1}\mu^k} \qquad k = 1, 2, 3, \dots$$

   összefüggés adódik. Hogy ez valószínűségi eloszlás legyen, a

$$\pi_0 = \frac{2\mu - \lambda}{2\mu + \lambda}$$

   értéket választjuk. (Ekkor $\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1$.)

   (b)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\text{sok idő után a csomagok száma} \le N) &= \sum_{k=0}^{N} \pi_k \\ &= 1 - \sum_{k=N+1}^{\infty} \pi_k \\ &= 1 - \frac{2\mu - \lambda}{2\mu + \lambda} \frac{\lambda^{N+1}}{2^N \mu^{N+1}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^j \\ &= 1 - \frac{1}{2\mu + \lambda} \frac{\lambda^{N+1}}{2^{N-1}\mu^N}. \end{aligned}$$

(c)

$$\mathbf{P}(\text{sok idő után a csomagok száma} > N) = \frac{1}{2\mu+\lambda}\frac{\lambda^{N+1}}{2^{N-1}\mu^N}.$$

(d) Hosszú távú költség:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\pi_k = \frac{2\mu-\lambda}{2\mu+\lambda}\cdot\frac{\lambda}{\mu}\cdot\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^{k-1} = \frac{2\mu-\lambda}{2\mu+\lambda}\cdot\frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{2\mu}\right)^2} = \frac{4\mu\lambda}{(2\mu-\lambda)(2\mu+\lambda)},$$

ahol felhasználtuk a

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

összefüggést $x = \lambda/2\mu$ helyettesítéssel, ami a $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1/(1-x)$ azonosság deriválásából adódik.

(e) A (c) rész miatt

$$\mathbf{P}(\text{sok idő után a csomagok száma} \geq N) = \frac{1}{2\mu+\lambda}\frac{\lambda^{N}}{2^{N-2}\mu^{N-1}},$$

ami az N méretű puffer esetén a puffer tele állapot időaránya. Ezért a

$$\frac{1}{2\mu+\lambda}\frac{\lambda^{N}}{2^{N-2}\mu^{N-1}} = 10^{-8}$$

egyenletet kell megoldani $\lambda = 1$ és $\mu = 2$ esetén, amelyből

$$N = \frac{8\log_2 10 - \log_2 5 + 3}{2} \simeq 13,63$$

adódik, vagyis a puffer mérete 14-nek választandó.

5. A születési–halálozási folyamatok a folytonos idejű reguláris Markov-láncok egy alkalmazások szempontjából nagyon fontos osztálya. Ezekben a folyamatokban az állapottér $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Ha $i \neq 0$ egy állapot, akkor a folyamat, csak $(i+1)$-be (születés) ugorhat λ_i rátával, vagy $(i-1)$-be (halálozás) ugorhat μ_i rátával. A 0 állapotból csak az 1-be lehet ugrani λ_0 rátával. Egy állapotba való ugrás rátája λ azt jelenti, hogy az állapotban indított exponenciális óra $Exp(\lambda)$ eloszlású idő múlva cseng.

   Határozzuk meg, hogy egy születési–halálozási folyamatnak mikor létezik stacionárius eloszlása, és írjuk is fel a stacionárius eloszlást.

   Az alábbi modellek születési–halálozási folyamatokkal leírhatók. Határozzuk meg a rátákat.

   (a) $M/M/1$

   (b) $M/M/c$ kiszolgálómodellt λ beérkezési intenzitással. A csomagok mérete egymástól független, exponenciális eloszlású μ paraméterrel. Egy c pozitív egész számra a $/c$ azt jelenti, hogy c szerver szolgálja ki a csomagokat. Egy szerver egyszerre csak egy csomagot szolgál ki. $X(t) =$ a rendszerben tartózkodó csomagok száma t időben születési–halálozási folyamat.

   (c) $M/M/1$ *with balking.* Ez alapvetően egy $M/M/1$ rendszer. Adottak $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ számok úgy, hogy $0 \leq \alpha_i \leq 1$. Ha egy igény akkor érkezik, amikor i igény már bent van a rendszerben, akkor csak α_i valószínűséggel lép be. Megmutatható, hogy ekkor az $i+1$ állapotba lépés rátája $\alpha_i\lambda$. $X(t) =$ a rendszerben tartózkodó csomagok száma t időben születési–halálozási folyamat.

(d) *Lineáris növekedés bevándorlással.* Ez egy elágazó folyamat a következőféleképpen definiálva. Minden időben, minden egyed létrehoz egy utódot $Exp(\lambda)$ időnként, ez az idő minden korábbi történéstől független. Hasonlóan minden egyed $Exp(\theta)$ idő múlva kihal. Továbbá $Exp(a)$ időnként megjelenik egy bevándorló, aki ugyanúgy szaporodik és hal meg, mint a többi egyed. $X(t) =$ a populáció egyedszáma t időben születési–halálozási folyamat.

Mondjuk ki a feladatot precízen, azaz Exp eloszlások helyett rátákkal.

Megoldás: Születési–halálozási folyamat generátora:

$$G = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3+\mu_3) & \lambda_3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \mu_4 & -(\lambda_4+\mu_4) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

A stacionárius eloszlás:

$$\pi_k = \frac{\prod_{j=1}^{k} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}}{\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}} \qquad k = 0, 1, 2, 3, \dots.$$

(a) $\lambda_i = \lambda$, $\mu_i = \mu$.

(b)

$$\lambda_i = \lambda, \mu_i = \begin{cases} i\mu & \text{ha } i \le c \\ c\mu & \text{ha } i > c \end{cases}.$$

(c) $\lambda_i = \alpha_i \lambda$, $\mu_i = \mu$.

(d) $\lambda_i = i\lambda + a$, $\mu_i = i\mu$.

6. Tekintsünk egy születési–halálozási folyamatot, melynek születési rátái $\lambda_n = 1/(n+1)$, halálozási rátái pedig $\mu_n = 1$. Azonosítsuk a stacionárius eloszlást.

Megoldás: 1 pareméterű Poisson-eloszlás.