1. feladatsor

Ismétlés

2010. október 25. és 27.

1. 5 szabályos érmét feldobunk, mi a valószínűsége, hogy pontosan 2 fejet kapunk?

   Megoldás: $\binom{5}{2}\frac{1}{2^5}$.

2. Jelölje X egy szabályos kockával való dobás után a felső lapon lévő számot. Számoljuk ki X várható értékét.

   Megoldás: $\mathbf{E}(X) = 3,5$.

3. Nagyon sok kétgyermekes család közül választunk véletlenszerűen egyet. Megtudjuk, hogy legalább az egyik gyermek lány, mennyi a valószínűsége, hogy fiú is van a családban? Mi a valószínűsége, hogy 2 fiú van a családban?

   Megoldás: $\mathbf{P}(\text{fiú is van a családban} \mid \text{lány is van a családban}) = 2/3$.

4. Két szabályos kockát feldobunk. Jelölje E_1 azt az eseményt, hogy a kockákon az összeg 6 és jelölje F azt az esményt, hogy az első kockán 4-es jött ki. Mutassuk meg, hogy E_1 és F nem függetlenek. Legyen E_2 az az esemény, hogy a kockákon az összeg 7. E_2 független F-től?

   Megoldás: $\mathbf{P}(F) = 1/6 \neq 1/5 = \mathbf{P}(F|E_1)$, ezért F és E_1 nem függetlenek, viszont $\mathbf{P}(F) = 1/6 = \mathbf{P}(F|E_2)$ miatt F és E_2 függetlenek.

5. Egy tesztvizsgán 20 kérdés van, mindegyikre igen vagy nem a válasz. Minden kérdésnél három eset lehet: tudjuk a helyes választ – ennek $\frac{4}{7}$; csak azt hisszük, hogy tudjuk a helyes választ – ennek $\frac{2}{7}$; illetve nem tudjuk a helyes választ – ennek $\frac{1}{7}$ a valószínűsége, és ekkor $\frac{1}{2}$–$\frac{1}{2}$ valószínűséggel válaszolunk igent, vagy nemet. Mi a helyes válasz valószínűsége?

   Megoldás:

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{\text{tudjuk a helyes választ}\} \\ A_2 &:= \{\text{azt hisszük, hogy tudjuk a helyes választ}\} \\ A_3 &:= \{\text{nem tudjuk a helyes választ}\} \end{aligned}$$

   teljes eseményrendszert alkot, ezért a teljes valószínűség tétele miatt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\text{helyesen válaszolunk}) &= \sum_{k=1}^{3} \mathbf{P}(\text{helyesen válaszolunk} \mid A_k)\mathbf{P}(A_k) \\ &= 1 \cdot \frac{4}{7} + 0 \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} = \frac{9}{14}. \end{aligned}$$

6. Egy céllövöldében hat puska van. Közülük három olyan, hogy azokkal 0,5 valószínűséggel találunk célba, eggyel a találati valószínűség 0,7, kettővel pedig 0,8. Találomra kiválasztunk egy puskát, majd lövünk. Mekkora a valószínűsége, hogy célbatalálunk? Mekkora a valószínűsége, hogy 0,8-as puskát választottunk, feltéve, hogy a lövésünk talált?

7. Móricka a zoknijait két dobozban tartja, mindkettőben sok zokni van. Az egyikbe igyekszik a lyukasakat gyűjteni, ebben a zoknik 90%-a lyukas. A másikba a jókat próbálja tenni, ebben csak 10% lyukas zokni van. Ma reggel a nagy sietségben Móricka véletlenszerűen belenyúlt az egyik dobozba, és felvett belőle két zoknit. Az egyetemre menet észrevette, hogy a bal lábán lyukas a zokni. Ezek után mennyi annak a valószínűsége, hogy a jobb lábán is lyukas zokni van?

   Megoldás:

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{\text{reggel a több lukas zoknit tartalmazó dobozba nyúlt}\} \\ A_2 &:= \{\text{reggel a több jó zoknit tartalmazó dobozba nyúlt}\} \\ LB &:= \{\text{lukas van a bal lábán}\} \\ LJ &:= \{\text{lukas van a jobb lábán}\} \end{aligned}$$

   Bayes tételének segítségével

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_1 \mid LB) &= \frac{\mathbf{P}(LB \mid A_1)\mathbf{P}(A_1)}{\sum_{k=1}^{2} \mathbf{P}(LB \mid A_k)\mathbf{P}(A_k)} \\ &= \frac{0,9 \cdot \frac{1}{2}}{0,9 \cdot \frac{1}{2} + 0,1 \cdot \frac{1}{2}} = 0,9 \\ \mathbf{P}(A_2 \mid LB) &= 0,1 \end{aligned}$$

   A teljes valószínűség tételével alkalmazva LB mellett feltételesen:

$$\mathbf{P}(LJ|LB) = \sum_{k=1}^{2} \mathbf{P}(LJ|A_k, LB)\mathbf{P}(A_k|LB) = 0,9 \cdot 0,9 + 0,1 \cdot 0,1 = 0,82.$$

8. Egy internetes közösségi oldal felhasználói körébe meghívásos alapon lehet bejutni. Eredetileg két tagja van a közösségnek, Ádám és Éva. Néha a közösség valamelyik (egyenletesen választott) tagja meghív egy új embert. Ádám köréhez tartozik valaki, ha ő maga Ádám vagy egy Ádám köréhez tartozó tag hívta meg. Mekkora valószínűséggel áll 1, 2, illetve 3 főből Ádám köre akkor, amikor 4 fős a közösség?

   Megoldás: Amikor 4 fős a közösség, akkor 1/3 a valószínűsége, hogy 1, 2 vagy 3 fős Ádám köre. Sőt, amikor $k+1$ fős a közösség, akkor $1/k$ a valószínűsége, hogy 1, 2, ... vagy k fős Ádám köre.

9. Egy nagyvárosban a Hulla és a Nulla TV adókat lehet fogni, melyeket szombat este 10 órakor a felnőtt lakosság kb. 20, illetve 30 százaléka néz. A felnőttek másik fele nem mérgezi magát ezekkel az adókkal. Véletlenszerűen kiválasztva 5 felnőttet a városból, mi a valószínűsége annak, hogy a jelzett időpontban közülük pontosan ketten a Hulla és pontosan hárman a Nulla TV-t nézik?

   Megoldás: $\frac{5!}{2!3!} 0,2^2 \cdot 0,3^3$.

10. András és Béla ilyen sorrendben, felváltva dobnak egy szabályos dobókockával. Az nyer, aki először dob hatost. Mi a valószínűsége, hogy András nyer? Mi a valószínűsége, hogy Béla nyer?

    Megoldás: $\mathbf{P}(\text{András nyer}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{2k} = \frac{6}{11}$.

11. Egy egyszerű alkatrész tömeggyártása során azt tapasztalták, hogy egy nap alatt átlagosan 11 hibás készül. Mi a valószínűsége annak, hogy 20-nál kevesebb hibásat gyártottak? Hány hibás elemet gyártanak legvalószínűbben?

    Megoldás: $\mathbf{P}(\text{20-nál kevesebb a hibás}) = \sum_{k=0}^{19} e^{-11}\frac{11^k}{k!}$. Legvalószínűbb a 10 vagy 11 hibás alkatrész gyártása.

12. Péter, ha kockával páratlant dob 100 Ft-ot veszít, ha 6-ot dob 400 Ft-ot nyer, ha 2-öt, vagy 4-et dob, újból dob. A második dobásnál 10 Ft-ot nyer, ha párost dob, 20-at veszít, ha páratlant dob. Előnyös-e ez a játék számára hosszú távon?

    Megoldás: $\mathbf{E}(\text{nyereség}) = -100 \cdot \frac{1}{2} + 400 \cdot \frac{1}{6} + \left(10 \cdot \frac{1}{2} - 20 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{3} = 15 > 0$, nyereséges.

13. Tegyük fel, hogy egy izzó élettartama, X (100 órában megadva) exponenciális eloszlású úgy, hogy $\mathbf{P}(X > 10) = 0.8$. Mi az eloszlás paramétere, mi az eloszlás várható értéke és szórása?

    Megoldás: $e^{-\lambda \cdot 10} = \mathbf{P}(X > 10) = 0,8$ megoldása $\lambda = -\frac{\ln 0,8}{10}$. Várható érték: $1/\lambda$, szórás: $1/\lambda$.

14. Egy mágneses szalagon az első hibás hely pozíciója a kezdettől számítva X (cm-ben). Tegyük fel, hogy X exponenciális eloszlású 100 várható értékkel. Mi az exponenciális eloszlás paramétere? Mi annak a valószínűsége, hogy $X < 200$, feltéve $X > 150$?

    Megoldás: $\lambda = \frac{1}{100}$. Az örökifjúság miatt $\mathbf{P}(X < 200 | X > 150) = \mathbf{P}(X < 50) = 1 - e^{-1/2}$.

15. Egy 500 oldalas könyv 500 sajtóhibát tartalmaz. Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenül választott oldalon legalább 3 sajtóhiba van?

    Megoldás: $X :=$ sajtóhibák száma az oldalon. $\mathbf{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbf{P}(X < 3) = 1 - e^{-1}\left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\right)$.

16. Tegyük fel, hogy egy webkiszolgálóhoz Poisson-folyamat szerint érkeznek igények percenként 5 paraméterrel. Mi a valószínűsége, hogy legalább 8 kérést kell kiszolgálni egy 2 perces periódusban?

    Megoldás: $\sum_{k=8}^{\infty} e^{-10}\frac{10^k}{k!}$.

17. Egy bizonyos típusú kábelben két hibás szektor között fekvő kábel hossza exponenciális eloszlású 1,5 méter várható értékkel. Mi a valószínűsége, hogy legfeljebb 4 hibás rész van egy 2 méteres darabon?

18. Egy útkereszteződésben az átlagos zajszint 45 dB. 100 mérés közül kb. tízszer fordul elő, hogy 50 dB fölé emelkedik a zaj. Milyen gyakran fordul elő, hogy 37 dB alá süllyed a zajszint?

    Megoldás: $Z :=$ zajszint dB-ben. $Z \sim \mathcal{N}(45, \sigma^2)$, ahol σ az ismeretlen szórás. $\mathbf{P}(Z > 50) = 0,1$. $\frac{Z-45}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$, ebből $\mathbf{P}\left(\frac{Z-45}{\sigma} < \frac{50-45}{\sigma}\right) = 0,9 = \Phi(\frac{5}{\sigma})$, $\sigma \simeq \frac{5}{1,28}$. $\mathbf{P}\left(\frac{Z-45}{\sigma} < \frac{37-45}{\sigma}\right) = \Phi(-\frac{8}{\sigma}) \simeq \Phi(-2,05) = 1 - \Phi(2,05) \simeq 0,02$.

19. Egy teherautón lévő sóder mennyisége 8 és 10 m^3 között egyenletes eloszlású. A teherautóról leömlő sóder egy kúpba rendeződik, ahol a kúp magassága és sugara egyenlő. Mekkora a sóder által elfoglalt terület várható értéke (m^2-ben)?

Megoldás: $A = \left(\frac{3V}{\pi}\right)^{2/3} \pi$, ezért $\mathbf{E}(\text{elfoglalt terület}) = \int\limits_8^{10} \frac{1}{2} \cdot 3^{2/3} \pi^{1/3} V^{2/3} dV$.