5. feladatsor

Folytonos idejű Markov-láncok

2010. november 29. és december 1.

1. Adott egy öt állapotú ($\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$) Markov-lánc a következő átmenetvalószínűségi mátrixszal:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   (az állapot sorrend 0,1,2,3,4 felülről lefelé, illetve balról jobbra).

   Definiáljuk a következő sztochasztikus folyamatot: két ugrás között az egyes állapotokban véletlen hosszú ideig tartózkodik, de ha ugrik, akkor az ugrás helyét a fent definiált Markov-lánc írja le. Pontosabban, ha a 0-ás, 1-es, 2-es, 3-as, vagy 4-es állapotokba ugrott, akkor a következő ugrásig eltelő idő eloszlása sorrendben $Exp(1), Exp(4), Exp(4), Exp(4), Exp(2)$. Feltesszük továbbá, hogy a tartózkodási idők függetlenek egymástól.

   A most definiált sztochasztikus folyamat egy 4 helyet tartalmazó kiszolgáló sorhossz fejlődését írja le, amelyben a kiszolgálás csak véletlen időnként van, de akkor azonnal kiszolgálja az összes igényt. Ha 4-en állnak sorban, akkor a kiszolgálás mindenképpen megtörténik.

   (a) Írjuk fel a folytonos idejű Markov-lánc gráfreprezentációját. (Az irányított éleken az exponenciális órák paramétere van feltüntetve.)

   (b) Határozzuk meg, hogy hosszú távon hány százalékban tartózkodik az egyes állapotokban.

   (c) Az állapotokhoz egy költségrátafüggvény is adott: i állapotba lépésnek a költségrátája $i + 2$, $i = 0, 1, 2, \dots, 4$. Mi a hosszú távú átlagos költsége a folyamatnak?

2. *On-Off rendszer.* Ha egy gép működőképes, akkor $Exp(\lambda)$ ideig még működik. Ha elromlik, akkor a megjavítása $Exp(\mu)$ ideig tart, eddig nem működőképes. Amint megjavították, rögtön működni kezd. Javítási és működési periódusok minden tekintetben függetlenek egymástól. Határozzuk meg, hogy az idő hány százalékában működőképes a gép.

3. Legyen X_t folytonos idejű Markov-lánc az $S = \{1, 2, 3, 4\}$ állapottéren, melynek generátora

$$G = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Írjuk fel az X_t Markov-lánc stacionárius eloszlását.

(b) Tegyük fel, hogy a Markov-lánc az 1 állapotból indul. Mennyi az első ugrásig eltelt idő várható értéke?

(c) Újból tegyük fel, hogy a Markov-lánc az 1 állapotból indul. Mennyi a 4 állapot első elérési idejének várható értéke?

4. Tekintsük az $M/M/2$ kiszolgálómodellt λ beérkezési intenzitással. A csomagok mérete egymástól független, exponenciális eloszlású μ paraméterrel. A /2 azt jelenti, hogy 2 szerver szolgálja ki a csomagokat. Egy szerver egyszerre csak egy csomagot szolgál ki.

   (a) Számoljuk ki a stacionárius eloszlását a rendszernek.

   (b) A rendszer beindítása után sok idővel megvizsgáljuk, hogy hány csomag van a kiszolgálóban. Mi a valószínűsége, hogy ez a szám legfeljebb N, ahol N egy pozitív egész.

   (c) Az idő mekkora hányadában van N-nél több csomag a rendszerben?

   (d) Egy csomag tárolásának az ára egy időegységig \$1. Határozzuk meg, hogy a rendszer működésének mennyi a hosszú távú költsége, azaz egy időegységre eső költsége.

   (e) Legyen $\lambda = 1$ $\mu = 2$. Mekkora legyen a puffer mérete, ha azt szeretnénk, hogy az idő legfeljebb 10^{-8} részében legyen teli a puffer. Közelítsünk végtelen pufferes rendszerrel.

5. A születési–halálozási folyamatok a folytonos idejű reguláris Markov-láncok egy alkalmazások szempontjából nagyon fontos osztálya. Ezekben a folyamatokban az állapottér $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Ha $i \neq 0$ egy állapot, akkor a folyamat, csak $(i+1)$-be (születés) ugorhat λ_i rátával, vagy $(i-1)$-be (halálozás) ugorhat μ_i rátával. A 0 állapotból csak az 1-be lehet ugrani λ_0 rátával. Egy állapotba való ugrás rátája λ azt jelenti, hogy az állapotban indított exponenciális óra $Exp(\lambda)$ eloszlású idő múlva cseng.

   Határozzuk meg, hogy egy születési–halálozási folyamatnak mikor létezik stacionárius eloszlása, és írjuk is fel a stacionárius eloszlást.

   Az alábbi modellek születési–halálozási folyamatokkal leírhatók. Határozzuk meg a rátákat.

   (a) $M/M/1$

   (b) $M/M/c$ kiszolgálómodellt λ beérkezési intenzitással. A csomagok mérete egymástól független, exponenciális eloszlású μ paraméterrel. Egy c pozitív egész számra a $/c$ azt jelenti, hogy c szerver szolgálja ki a csomagokat. Egy szerver egyszerre csak egy csomagot szolgál ki. $X(t) =$ a rendszerben tartózkodó csomagok száma t időben születési–halálozási folyamat.

   (c) $M/M/1$ *with balking.* Ez alapvetően egy $M/M/1$ rendszer. Adottak $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ számok úgy, hogy $0 \leq \alpha_i \leq 1$. Ha egy igény akkor érkezik, amikor i igény már bent van a rendszerben, akkor csak α_i valószínűséggel lép be. Megmutatható, hogy ekkor az $i+1$ állapotba lépés rátája $\alpha_i \lambda$. $X(t) =$ a rendszerben tartózkodó csomagok száma t időben születési–halálozási folyamat.

   (d) *Lineáris növekedés bevándorlással.* Ez egy elágazó folyamat a következőféleképpen definiálva. Minden időben, minden egyed létrehoz egy utódot $Exp(\lambda)$ időnként, ez az idő minden korábbi történéstől független. Hasonlóan minden egyed $Exp(\theta)$ idő múlva kihal. Továbbá $Exp(a)$ időnként megjelenik egy bevándorló, aki ugyanúgy szaporodik és hal meg, mint a többi egyed. $X(t) =$ a populáció egyedszáma t időben születési–halálozási folyamat.

   Mondjuk ki a feladatot precízen, azaz Exp eloszlások helyett rátákkal.

6. Tekintsünk egy születési–halálozási folyamatot, melynek születési rátái $\lambda_n = 1/(n+1)$, halálozási rátái pedig $\mu_n = 1$. Azonosítsuk a stacionárius eloszlást.