4. feladatsor

Diszkrét idejű Markov-láncok

2010. november 22. és 24.

1. Londonban egy esős napot 70% eséllyel követ esős nap és 30% eséllyel száraz nap, míg száraz napot 50% eséllyel követ esős és 50% eséllyel száraz nap.
   (a) Számítsuk ki, hosszú távon a napok hányadrésze esős (azaz a stacionárius eloszlást).
   (b) Tegyük fel, hogy ma esett. Mekkora a valószínűsége, hogy két nap múlva is esni fog? És annak, hogy 3 nap múlva esni fog?

2. Egy dobókockát minden perc végén véletlenszerűen átfordítunk valamelyik szomszédos lapjára. Jelölje X_n az n-edik perc végén felül lévő számot. Gondoljuk meg, hogy X_n irreducibilis Markov-lánc. Mi az átmenetmátrix és a stacionárius eloszlás?

3. Egy bonyolult berendezést (gyár, nagyméretű számítógép-hálózat, társasház, stb.) kis szakértelemmel rendelkező személyzet felügyel. A berendezéssel számos probléma adódik folyamatosan, ami különbözőképpen befolyásolja a berendezés produktivitását. Az igazi szakértők hetente jönnek, és minden egyes alkalommal rendbe rakják a berendezést. Amikor megérkeznek, négy állapot valamelyikébe sorolják az aktuális szituációt: 1 – problémamentes; 2 – kis javítás; 3 – nagy javítás; 4 – katasztrófa.
   Az állapotfelmérés és a rendberakás ára az egyes állapotokban:
   10 (1), 30 (2), 100 (3), 1000 (4) pénzegység.

   Az egymás utáni hetek állapotai Markov-lánccal modellezhetőek. Egyrészt, az aktuális állapot mindig csak az előző hét állapotától függ. Másrészt, a problémák véletlenül merülnek fel, továbbá a folyamatosan ott lévő személyzet is képes véletlen nagyságú mértékben megjavítani a berendezést. Az egyes állapotokból a következő állapotba való átmenet mátrixa a következő:

$$\begin{bmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,5 & 0,4 & 0,1 & 0 \end{bmatrix}$$

   (az állapot sorrend 1,2,3,4 felülről lefelé, illetve balról jobbra).

   (a) Mi a valószínűsége annak, hogy egy kis javítás után két héttel (tehát egy hét regisztrációját kihagyjuk) problémamentes a rendszer?
   (b) Mi a valószínűsége annak, hogy egy problémamentes hetet három további problémamentes hét követ?
   (c) Hosszú távon a felülvizsgálatok hány százalékában lesz a rendszer az i állapotban? Vizsgáljuk meg minden a négy állapotra.
   (d) Mi a szakértők alkalmazásának hosszú távú átlagos költsége?

4. Egy építőipari cég minden évben 3 alvállalkozó közül egynek oszt ki egy bizonyos típusú munkát. Egy évben az alvállalkozó neve csak az előző évben kiválasztott alvállalkozó nevétől függ. Az alábbi mátrixban össze van gyűjtve, hogy ha az n. évben az i sorindexű alvállalkozót választották, akkor az $(n+1)$-edik évben milyen valószínűséggel választják a j oszlopindexű vállalkozót.

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 1/4 & 1/12 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

   A) Ha az első évben az első alvállalkozót $\frac{1}{3}$ valószínűséggel választják ki, akkor mi a valószínűsége, hogy az első és a második évben is az első kapja meg a munkát?
   B) Ha az első évben az első alvállalkozó kapja meg a munkát, akkor mi a valószínűsége, hogy a harmadik évben megint az első alvállalkozó kapja meg a munkát (a második évről nem tudunk semmit)?

C) Tegyük fel, hogy az első évben az i. alvállalkozó kapja meg a munkát. Mi a valószínűsége, hogy további n egymás követő évben nem választanak mást?

D) Hosszú idő alatt milyen gyakorisággal választják ki az első alvállalkozót?

E) Az 1., 2., 3. alvállalkozó választásának éves költsége sorrendben 50 mFt, 40 mFt, 45 mFt. Határozzuk meg, hogy hosszú távon mennyit költ a cég az alvállalkozóra.

F) Mi a valószínűsége, hogy elegendően hosszú idő múlva kétszer egymás után ugyanazt az alvállalkozót választják?

5. Tekintsünk egy tárolót c kapacitással, ahol c pozitív egész. Minden pozitív egész n esetén az $[n, n+1)$ időintervallumban A_{n+1} véletlen egész értékű beérkezés történik a tárolóba. Ha a tárolt mennyiség a beérkezéssel együtt túlnő a tároló kapacitásán, akkor túlcsordulás fordul elő. Az $[n, n+1)$ intervallum végén m egységet eltávolítanak a tárolóból, ahol $m < c$. Ha a tárolóban m egységnél kevesebbet tárolnak, akkor az egész tárolót kiürítik. A $0, 1, \ldots$ időpontokban a tárolóban lévő mennyiség az ürítés előtt legyen $X_0, X_1, \ldots$, melyek egész értékű valószínűségi változók.

   Tegyük fel, hogy $A_0, A_1, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínű változók, és függetlenek X_0-tól. Mutassuk meg, hogy fennáll a következő rekurzió:
$$X_{n+1} = (X_n + A_{n+1} - m)_+ \wedge c,$$
   ahol $a \wedge b$ jelöli két szám, a és b, minimumát. Határozzuk meg az $\{X_n\}$ folyamat átmenetvalószínűségi mátrixát. (Legyen $q_n = \mathbf{P}(A_1 = n)$, $a_{\le n} = \mathbf{P}(A_1 \le n)$, és $a_{\ge n} = \mathbf{P}(A_1 \ge n)$.)

6. Tekintsük a 5. feladatban bemutatott modellt. Tegyük fel, hogy
$$\mathbf{P}(A_1 = m-1) = q,\ \mathbf{P}(A_1 = m) = r,\ \mathbf{P}(A_1 = m+1) = p,$$
   ahol q, p, r nemnegatív számok és $p + q + r = 1$. Mutassuk meg, hogy a stacionárius eloszlás a következő:
$$\pi_j = (konstans)\left(\frac{p}{q}\right)^j,\ j = 0, 1, \ldots, c.$$

7. Jelölje $\mathcal{T}$ egy Markov-lánc átmeneti állapotainak halmazát. Ha $i \in \mathcal{T}, j \in \mathcal{T}^C$, legyen $u_{ij} = \mathbf{P}(X_\alpha = j \mid X_0 = i)$, ahol α az első időpont, amikor a Markov-lánc egy visszatérő állapotba lép. A teljes valószínűség tételt használva mutassuk meg, hogy
$$u_{ij} = \sum_{k \in \mathcal{T}} Q_{ik} u_{kj} + p_{ij},$$
   vagy ami ezzel ekvivalens,
$$U = QU + R.$$
   Ebből következik, hogy ha az $I - Q$ mátrixnak van inverze, akkor U kiszámolható:
$$U = (I - Q)^{-1} R.$$

8. Tekintsük a 3. feladatban bemutatott modellt. Mi a valószínűsége annak, hogy a rendszer előbb lép az 1-es állapotba, mint a 4-esbe, ha a 2-esből indult?

9. Használjuk a 7. feladat jelöléseit. Legyen $i \in \mathcal{T}$ és
$$M_i = \mathbf{E}(\alpha | X_0 = i).$$
   Mutassuk meg a teljes várható érték segítségével, hogy $M_i = 1 + \sum_{j \in T} p_{ij} M_j,\ i \in \mathcal{T}$.

10. A Sóder kft. bővítette repertoárját. Most már kétféle munkát vállalnak: A és B típusút. Az A típusú munka 1 hónapig tart, és a bevételük belőle 1,6 millió forint, a B típusú munka 2 hónapig tart és a bevételük belőle 3 millió forint. Minden hónap elején vesznek fel rendelést, feltéve, hogy nem tartanak éppen egy B típusú munka közepén. Minden hónap elején 50% eséllyel érkezik megrendelés B típusú munkára és 60% eséllyel A típusú munkára (függetlenül). Ha csak az egyik típusú munkára érkezik megrendelés, azt vállalják el. Ha nem érkezik megrendelés, tétlenül töltik a hónapot, és a bevételük 0. Melyiket érdemes választani, ha mindkettőre érkezik megrendelés? Azaz:

    (a) Modellezzük a Sóder kft. havi tevékenységét Markov-lánccal. Mik legyenek az állapotok? Mik az átmenetvalószínűségek akkor, ha az A munkát preferálják, amikor mindkettőre érkezik megrendelés? Mik az átmenetvalószínűségek akkor, ha a B munkát preferálják?

    (b) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást mindkét esetben, majd ez alapján adjuk meg, mennyi a Sóder kft. átlagos havi bevétele hosszú távon abban az esetben, ha az A, és abban az esetben, ha a B munkát választják.