

### 3. feladatsor

#### Egyszerű elágazó folyamat és nagy eltérések

2010. november 10. és 15.

1. Egy vállalkozó üzleteket nyit sorban. Idén nyitotta meg az elsőt, és innentől kezdve minden egyes üzlet minden évben

- 0,2 valószínűséggel becsődöl, és be kell zárni;
- 0,4 valószínűséggel nullszaldós lesz, ekkor folytatja a működést a következő évben;
- 0,4 valószínűséggel akkora hasznot termel, amennyiből meg lehet nyitni még egy üzletet.

(Úgy tekintjük, hogy minden üzlet teljesítménye a többitől és a saját korábbi teljesítményétől is független.)

Modellezzük a feladatot elágazó folyamattal. Írjuk fel az utóeloszlás generátorfüggvényét.

- (a) Számítsuk ki, mennyi az üzletek számának várható értéke 5 év múlva.
- (b) Mekkora a valószínűsége, hogy a vállalkozó legfeljebb 2 éven belül becsődöl (azaz bezárja az összes üzletét)?
- (c) Mekkora a valószínűsége, hogy sohasem csődöl be teljesen a vállalkozó?
2. Tegyük fel, hogy egy végtelennek tekinthető számítógép populációban ha egy számítógép megfertőződik egy bizonyos típusú kártékony programmal, akkor a következő 1 nap során  $p = \frac{1}{4}$  valószínűséggel kiirtják, így nem fertőz meg mást.  $(1-p)p$  valószínűséggel nem irtják ki, de nem is fertőz. Továbbá  $(1-p)^k p$  valószínűséggel  $k$  nem fertőzött gépet fertőz meg, ha beleszámoljuk a fertőzés forrásának tekinthető gépet,  $k = 2, 3, 4, \dots$ . Tegyük fel, hogy minden megfertőzött számítógép az összes többi fertőzött számítógéptől függetlenül „szaporodik”.

Modellezzük az egyes napokon a fertőzött számítógépek számát elágazó folyamattal. Milyen eloszlású az utóeloszlás?

Tegyük fel, hogy az első napon egy fertőzött gép van és  $p = \frac{1}{4}$ . Írjuk fel az utóeloszlás generátorfüggvényét.

- (a) Számítsuk ki, mennyi a fertőzött számítógépek várható száma 30 nap múlva.
- (b) Mekkora a valószínűsége, hogy 3 nap múlva már nincs fertőzött gép?
- (c) Mekkora a valószínűsége, hogy sohasem sikerül kiirtani a kártevőt?
3. Móricka frissen nyitott szoftver kereskedése nagyon jól megy. Egy rendelés kitöltésére fordított ideje 3 perc. Ezalatt  $j$  új vásárló áll be a várakozók közé  $p_j$  valószínűséggel, ahol  $p_0 = 0,2$ ,  $p_1 = 0,2$  és  $p_2 = 0,6$ . Tegyük fel, hogy a várakozó szoba kapacitása végtelen. Móricka csak akkor tud kávészünetet tartani, ha nincs várakozó igény. Mi a valószínűsége, hogy Mórickának valaha lesz kávészünete?

Ha lefixáljuk  $p_1 = 0,2$ -t és feltesszük, hogy  $p_0 + p_1 + p_2 = 1$ , akkor milyen érkezés eloszlás a feltétele a stabil kiszolgáló rendszernek, azaz 1 valószínűséggel elfogynak az igények véges időn belül?

4. Ottó gyermekeinek száma 0, 1, 2 vagy 3, mindegyik  $1/4 - 1/4$  valószínűséggel. Ottó minden egyes leszármazottjának gyermekeinek száma is ugyanilyen eloszlású és a többiekétől független.
- (a) Jelölje  $X$  Ottó ükunokáinak számát. Adjuk meg  $X$  generátorfüggvényét. Számítsuk ki  $\mathbf{E}X$  és  $\mathbf{D}X$  értékét.
- (b) Számítsuk ki annak az esélyét, hogy Ottó leszármazottai előbb-utóbb kihalnak.

5. Jelölje  $\theta(p)$  annak a valószínűségét, hogy soha nem pusztul ki egy olyan elágazó folyamat, amelyben az utódok eloszlása geometriai eloszlású  $p$  paraméterrel. Rajzoljuk fel a  $p \mapsto \theta(p)$  függvény grafikonját.

#### Hoeffding-egyenlőtlenség, centrális határeloszlás-tétel

6. Egy helyi internetszolgáltató 2015-ben 12000 előfizetőt szolgál ki. Csúcsidőben az előfizetők az előfizetésük, és internetezési szokásaik alapján a következő 3 kategóriába sorolhatók:
- kezdő: az átlagos sávszélesség fogyasztás 100 Mbps, de semmiképpen nem több, mint 200 Mbps;
  - haladó: az átlagos sávszélesség fogyasztás 160 Mbps, de semmiképpen nem több, mint 280 Mbps;
  - mester: az átlagos sávszélesség fogyasztás 250 Mbps, de semmiképpen nem több, mint 400 Mbps.

Az egyes kategóriákba tartozó felhasználók száma rendre 3500, 6500 és 2000. Mekkora legyen a kiszolgáló sávszélesség kapacitása, ha azt szeretnénk, hogy legfeljebb  $10^{-6}$  eséllyel legyen kevés a csúcsidei szükséglet fedezésére? Mi lesz a kapacitás, ha a kapacitás túllépés valószínűsége legfeljebb  $10^{-7}$ , illetve  $10^{-8}$ ?

7. Két egymáshoz közeli szélfarmon 400  $A$  típusú és 200  $B$  típusú szélerőművet telepítettek. Az  $A$  típusú termelése 0,5 MW és 1,6 MW között ingadozik 1 MW átlagos termeléssel. A  $B$  típusú termelése 1,2 MW és 2,8 MW között van, átlagosan 2 MW.
- (a) Számítsuk ki, hogy mekkora az a kapacitás, amit legalább  $1 - 10^{-8}$  valószínűséggel nem lép túl a 600 erőmű össztermelése.
  - (b) Tegyük fel, hogy adott egy névleges kapacitás,  $C = 800$  MW. Mekkora valószínűséggel lépi túl  $C$ -t az aktuális kapacitás?
  - (c) Oldjuk meg az előző feladatot, ha 360  $A$  típusú és 200  $B$  típusú szélerőművet kapcsolnak be.  $C$  ugyanaz.
  - (d) Tegyük fel, hogy a  $B$  típusúak mind be vannak kapcsolva. Ha  $C = 800$  MW-ot nem szeretnénk túllépni legalább  $1 - 10^{-8}$  valószínűséggel, akkor hány  $A$  típusú erőművet kapcsolunk be.
8. Egy városban 40000 család él. Az egy család által egy nap alatt termelt szemét mennyisége semmiképpen nem több, mint 50 liter; a várható értéke 20 liter, szórása 10 liter.
- (a) Mekkora napi kapacitású szemétegető üzemeltetést építsen az önkormányzat a háztartási szemétnak, ha azt szeretnék, hogy annak az esélye, hogy az üzem nem tudja feldolgozni az egy nap alatt termelődött szemetet, legfeljebb 1% legyen? Adjunk becslést a CHT alapján.
  - (b) Miért nem alkalmazható a CHT, ha az önkormányzat 1% helyett  $10^{-8}$ -os biztonságot szeretne? Ebben az esetben adjunk becslést a Hoeffding-korlát segítségével.
9. A Sóder kft. az építőiparban tevékenykedik. Minden hónap elején 70% eséllyel kapnak munkát. A munka mindig ugyanaz, minden esetben egy hónapig tart, és a bevétel egy ilyen munkából 1 millió forint. Egy tétlenül töltött hónap bevétele 0.
- (a) Mennyi 30 hónap alatt a bevételük várható értéke?
  - (b) Becsüljük meg, mekkora annak az esélye, hogy 30 hónap alatt a bevételük kevesebb, mint 20 millió forint.
  - (c) Becsüljük meg, mekkora annak az esélye, hogy 30 hónap alatt a bevételük kevesebb, mint 15 millió forint.
10. Egy úrhajóban egy alkatrészre 200 különböző forrásból érkezik terhelés. A várható terhelés összesen 1000 Pa, a terhelés minden egyes forrásból legfeljebb 50 Pa. Mekkora legyen az alkatrész terhelhetősége, ha azt szeretnénk, hogy a túlterhelés esélye legfeljebb  $10^{-10}$  legyen?