2. feladatsor

Generátorfüggvények

2010. november 3. és 8.

1. Legyen $X_1, X_2, \ldots$ független azonos, $\mathbb{N}$ értékű valószínűségi változók sorozata. Továbbá legyen N egy $\mathbb{N}$ értékű valószínűségi változó, amely független az X-ektől. Legyen $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Tudjuk, hogy $\mathbf{E}Y = \mathbf{E}N \cdot \mathbf{E}X_1$. Mutassuk meg, hogy a szórásnégyzetre a következő egyenlőség áll fenn:
$$\mathbf{D^2}(Y) = \mathbf{D^2}(N)\mathbf{E}(X_1)^2 + \mathbf{E}(N)\mathbf{D^2}(X_1).$$

2. Egy fizetős autópályán kapuknál kell befizetni az úthasználati díjat. Egy motornak 1, egy személyautónak 2, egy teherszállító autónak 5 pénzegységet kell fizetni. Tudjuk, hogy a járművek Poisson-folyamat szerint érkeznek $\lambda = 2$ jármű per perc rátával. Megfigyeltük, hogy egy jármű a fenti sorrendben 1/2, 1/3 és 1/6 valószínűséggel esik egy járműosztályba. Továbbá az egymás utáni járművek típusa független.

   Határozzuk meg, hogy egy óra alatt átlagosan mennyi pénzegységet gyűjtenek a kapunál. Milyen folyamat szerint érkeznek a motorosok?

3. Egy bányász a bánya egy termében rekedt. A teremből öt ajtó nyílik: az első ajtó 2 órányi út végén a szabadba vezet. A második ajtó egy alagútba nyílik, mely 1 órányi séta után visszavezet ugyanebbe a terembe a harmadik ajtón keresztül. A negyedik ajtó szintén egy alagútba nyílik, mely 3 órányi séta után vezet vissza ugyanebbe a terembe az ötödik ajtón keresztül. A bányász találomra választ egy ajtót, majd minden alkalommal, amikor a terembe visszaér, elfelejti az addigi választásait, és az öt ajtó közül választ egyet egyenlő valószínűséggel, az előző választásoktól függetlenül.

   Határozzuk meg a szabadba érés idejének generátorfüggvényét. Határozzuk meg a szabadba érés idejének várható értékét.

4. Van egy kék és egy piros dobókockánk, mindkettő szabályos. Dobunk először a piros kockával, majd annyiszor dobunk a kékkel, amennyi a piroson kijött. Jelölje Y a piroson kijött számot, X pedig a kéken kijött számok összegét.
   (a) Írjuk fel egy dobókocka generátorfüggvényét. Hogyan kapható meg ebből $\mathbf{E}Y$ értéke?
   (b) Írjuk fel X generátorfüggvényét és számítsuk ki ez alapján $\mathbf{E}X$-et és $\mathbf{D}X$-et.
   (c) Milyen előjelű $\mathrm{cov}(X, Y)$?

5. Legyen X $\mathbb{N}$-értékű valváltozó. Jelöljük $G(z)$-vel a generátorfüggvényét. Írjuk fel $Y := X+1$ és $Z := 2X$ generátorfüggvényét G segítségével.

6. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, közös eloszlásfüggvényük $F(x) = \mathbf{P}(X_i < x)$. Gondoljuk meg, hogy az $Y = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $H(x) = F^n(x)$.

7. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, közös eloszlásfüggvényük $F(x) = \mathbf{P}(X_i < x)$. Legyen ν ezektől független, pozitív egész értékű valószínűségi változó. Jelölje ν *generátorfüggvényét* $G(z)$. Mutassuk meg, hogy az $Y = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_\nu\}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $H(x) = G(F(x))$.

8. Egy vetélkedőn 3–5 fős csapatok vesznek részt. Egy csapat minden tagjának háromszor kell dobnia egy labdával, és a csapat eredménye ezen dobások közül a legnagyobb. A versenyen minden résztvevő egyformán jól dob, egy dobás nagyságának sűrűségfüggvénye (méterben):

$$f(x) = \frac{50}{3x^2}, \quad 10 \leq x \leq 25$$

   A versenyen ugyanannyi 3, 4 illetve 5 fős csapat van. Találomra kiválasztunk egy csapatot. Mi az eredményük eloszlásfüggvénye?

9. (a) Jelölje X egy szabályos kockával az első 6-osig szükséges dobások számát. Határozzuk meg X eloszlásának generátorfüggvényét az első dobás szerinti feltételes felbontásból adódó rekurzió segítségével.

   (b) Jelölje Y az ahhoz szükséges dobások számát, hogy két 6-os jöjjön egymás után. Mi lesz Y eloszlásának generátorfüggvénye? (Írjunk fel rekurziót az első 6-os utáni dobás értéke szerint feltételesen.)

10. Tekintsünk egy diszkrét idejű prioritásos kiszolgáló rendszert (non-preemtive, FIFO) két osztállyal: 1. és 2. Az 1. osztálynak prioritása van a 2. osztállyal szemben. Minden csomagnak a kiszolgálása két időegységet igényel. Egy időegység alatt mindkét osztályba legfeljebb egy új csomag érkezhet: az 1. osztályba p valószínűséggel, a 2. osztályba r valószínűséggel érkezik csomag. Tegyük fel, hogy $0 < p, r < 1$.

    Határozzuk meg egy 2. osztálybeli csomag kiszolgálásához szükséges idő generátorfüggvényét, ha a csomag nem üres 2. osztályba érkezik.

<u>Centrális határeloszlás-tétel</u>

11. A Sóder kft. az építőiparban tevékenykedik. Minden hónap elején 70% eséllyel kapnak munkát. A munka mindig ugyanaz, minden esetben egy hónapig tart, és a bevétel egy ilyen munkából 1 millió forint. Egy tétlenül töltött hónap bevétele 0.

    (a) Mennyi 30 hónap alatt a bevételük várható értéke?

    (b) Becsüljük meg, mekkora annak az esélye, hogy 30 hónap alatt a bevételük kevesebb, mint 20 millió forint.

    (c) Becsüljük meg, mekkora annak az esélye, hogy 30 hónap alatt a bevételük kevesebb, mint 15 millió forint.

12. Dömötör rulettezik a kaszinóban. Minden egyes körben 1000 forintot tesz „piros”-ra. 100 játék után 3000 forint a vesztesége. Érdemes-e csalásra gyanakodnia? (A rulettkorongon összesen 37 mező szerepel, melyek közül 1 zöld, 18 piros és 18 fekete. Szabályos játék esetén mindegyik egyforma eséllyel jön ki.)

13. Az egy zsákban lévő cement súlyának várható értéke 50 kg, szórása 3 kg. Hány zsák cementet vásároljunk, hogy legalább 2 tonna cementünk legyen legalább 95% eséllyel? Ha ennél eggyel több zsákot vásárolunk, mekkora biztonsággal lesz legalább 2 tonna cementünk?