A k-adik leghosszabb rekord határeloszlása véletlen bolyongásokban

TDK dolgozat

2014

NÉV:	Szabó Réka
NEPTUN KÓD:	I25ZNU
KÉPZÉS:	alkalmazott matematikus MSc.
TÉMAVEZETŐ:	Dr. Vető Bálint

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

A véletlen bolyongások számtalan területen alkalmazhatók különféle folyamatok modellezésére, mint például a természettudományok vagy a pénzügyek. Az utóbbi években egyre több kutatás foglalkozott a rekordok vizsgálatával, statisztikai jellemzésével, melyeknek különösen nagy jelentősége van a statisztikus fizika területén. (Egy véletlen bolyongás során a k-adik lépésben rekord esemény történik, ha a bolyongás értéke k-ban meghaladja a bolyongás által összes előzőleg felvett értéket.)

A fent említett kutatások szimmetrikus és aszimmetrikus bolyongások esetén keresik a választ a következő kérdésekre: Hány rekord esemény történik n lépés alatt? Mennyi ideig áll fenn egy rekord? Mekkora a leghosszabb rekord élettartama?

A dolgozatomban véletlen bolyongások rekord statisztikáit vizsgálom tetszőleges szimmetrikus és folytonos lépéseloszlás esetén. A rekordok élettartamát tekintem; azt az időt, ameddig egy rekord fennáll. Ez egy független azonos eloszlású valószínűségi változó sorozatot határoz meg: $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$. Az utolsó rekord élettartama az n-edik lépéskor még ismeretlen, többféleképpen lehet definiálni, és minden eset más-más eredményhez vezet. A_n-nel jelölöm az utolsó rekord éppen aktuális élettartamát, τ_m-mel pedig az utolsó rekord n-ben még ismeretlen teljes élettartamát. A számítások során ezt a két esetet fogom vizsgálni.

Szimmetrikus véletlen bolyongás esetén a leghosszabb ideig fennálló rekord statisztikáit vizsgálták [4]-ben: mekkora valószínűséggel dől meg a rekord az n-edik lépésben, illetve mennyi ideig áll fenn ez a rekord. Én ezeket az eredményeket terjesztem ki a k-adik leghosszabb élettartamú rekordra, azaz a k-adik leghosszabb elemre a $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ valószínűségi változók közül. A munkám során a cikk jelöléseit használom, illetve az ott leírt gondolatmenetet követem.

A k-adik leghosszabb rekord statisztikát ($k = 2, 3, \dots$) két mennyiséggel jellemzem: meghatározom a k-adik leghosszabb rekord várható értékét ($\mathbf{E}(l_k(n))$), illetve annak a valószínűségét, hogy a k-adik leghosszabb rekord éppen n lépés után dől meg ($Q_k(n)$). A generátorfüggvényeik segítségével megvizsgálom a két mennyiség aszimptotikus viselkedését, továbbá az első esetben megmutatom, hogy a $k = 1$-nél megállapított összefüggés fennáll átalános esetben is $\mathbf{E}(l_k(n))$ és $Q_k(n)$ között.

Számításaim során azt az eredményt kapom, hogy $Q_k(n)$ értéke független a bolyongás lépéseloszlásától, minden k-ra egy univerzális konstans segítségével jellemezhetem. Ezzel a konstanssal az első esetben $\frac{\mathbf{E}(l_k(n))}{n}$ növekedési ütemét is jellemezhetem, míg a második esetben $\frac{\mathbf{E}(l_k(n))}{n}$ növekedési üteme egy új, az irodalomban eddig még nem látott sorozatot definiál. Belátom továbbá, hogy $Q_k(n)$ mindkét esetben egy valószínűségi eloszláshoz tart, ahogy $n \to \infty$.

2. fejezet

Korábbi eredmények

Az utóbbi időben egyre nagyobb népszerűségnek örvend a rekordok statisztikáinak vizsgálata véletlen bolyongások esetén. A dologzatomban szimmetrikus bolyongásokkal foglalkozom, az ezen a téren elért legfontosabb korábbi eredmények a következők:

[6]-ban megmutatták, hogy egy véletlen bolyongás során a rekordok sorozatának statisztikái függetlenek a lépéseloszlástól feltéve, hogy a lépéseloszlás folytonos és szimmetrikus. Ezzel a megfigyeléssel már [1]-ben is találkozhattunk, ahol azt bizonyították be, hogy a rekordidők eloszlását a $\mathbf{P}(x_n > 0)$ valószínűségek meghatározzák.

[5]-ben jelent meg először a $Q(\infty)$ konstans, mint a leghosszabb élettartamú rekord ($l_{max}(t)$) várható érétkének növekedési üteme. Ez a konstans később több más cikkben is előfordult, mint például [3]-ban, ahol frakcionális Brown mozgás esetén vizsgálták $l_{max}(t)$-t. [5]-ben továbbá egy egyszerű összefüggést is megállapítottak $l_{max}(t)$ és $Q(t)$ között, ahol $Q(t)$ annak a valószínűsége, hogy a leghosszabb rekord élettartama t-ben dől meg.

[4]-ben véletlen bolyongásokban vizsgálták a rekordok élettartamát n lépés alatt tetszőleges szimmetrikus lépéseloszlás esetén. Háromféleképpen definiálták

az utolsó rekord élettartamát (az utolsó rekord aktuális hossza; az utolsó rekord n-ben még ismeretlen teljes hossza; illetve az utolsó ismert rekord hossza n-ig). Megmutatták, hogy az élettartamok sorozatának statisztikai viselkedése eltér a független azonos eloszlású valószínűségi változók sorozatáétól; az élettartamok nem tekinthetőek teljesen függetlennek, hiszen mindhárom esetben egy bizonyos korlát írható elő az összegükre (n lépés miatt). Megfigyelték továbbá, hogy az utolsó rekord megválasztása nagy mértékben befolyásolja a sorozat viselkedését: a leghosszabb rekord várható értéke ($\mathbf{E}(l_{max}(n))$), illetve annak a valószínűsége, hogy az utolsó rekord a leghosszabb n-ig ($Q(n)$) mindhárom esetben más-más eredményre vezetett. Az első esetben $Q^I(n) \to Q^I(\infty)$ egy (már korábban [5]-ben megjelent) konstanshoz tart, $\mathbf{E}(l^I_{max}(n))$ pedig a lépésszámmal arányosan nő, a növekedés ütemét $Q^I(\infty)$ határozza meg. Ebben az esetben az [5]-ben bemutatott egyszerű összefüggés is fennáll a két mennyiség között. A második esetben $Q^{II}(n)$ szintén konvergál, azonban egy másik konstanshoz. A harmadik esetben $Q^{III}(n)$ 0-hoz, $\frac{\mathbf{E}(l^{III}_{max}(n))}{n}$ pedig egy konstanshoz tart. Megmutatták továbbá, hogy a kapott konstansok univerzálisak, azaz függetlenek a lépéseloszlástól, tetszőleges szimmetrikus véletlen bolyongás esetén fennállnak.

A dolgozatban ennek a cikknek az eredményeit terjesztem ki az első két vizsgált esetben a k-adik leghosszabb intervallum statisztikáira.

[2]-ben azt vizsgálták, hogy egy standard Brown-mozgás során mekkora a valószínűsége, hogy az utolsó kirándulás hossza a k-adik leghosszabb. Az utolsó kirándulást kétféleképpen definiálták: az utolsó kirándulás aktuális hossza t-ben, illetve az utolsó kirándulás teljes (t-ben még ismeretlen) hossza. Megmutatták, hogy ezek a valószínűségek minden k-ra egy konstanssal jellemezhetők. A dolgozat során ugyanezeket a konstansokat kapom meg $Q^I_k(\infty)$ és $Q^{II}_k(\infty)$ értékeire.

A második esetben kapott konstansok azonban sokkal előbb, [7]-ben jelentek meg először. Itt azt vizsgálták, hogy egy felújítási folyamat során mekkora annak a valószínűsége, hogy az utolsó kirándulás a k-adik leghosszabb. A dolgozatomban azonban egy sokkal egyszerűbb módszert mutatok be az eredmények kiszámítására.

3. fejezet

Saját eredmények

A munkám során véletlen bolyongások rekord statisztikáit jellemzem tetszőleges szimmetrikus és folytonos lépéseloszlás esetén. A rekordok élettartamát vizsgálom n lépés után. Az utolsó rekord élettartamát többféleképpen lehet definiálni, és minden eset más-más eredményhez vezet. A dolgozatban az utolsó rekordot kétféleképpen definiálom ($\alpha = I, II$ eset): az utolsó rekord élettartamának aktuális hossza (A_n), illetve az utolsó rekord n-ben még ismeretlen, valós hossza (τ_m).

A k-adik ($k > 1$) leghosszabb rekord statisztikáit jellemzem két mennyiség segítségével: n lépés után a k-adik leghosszabb rekord várható értéke ($\mathbf{E}^{\alpha}(l_k(n))$), illetve annak a valószínűsége, hogy n lépés után az utolsó rekord a k-adik leghosszabb ($Q_k^{\alpha}(n)$). Az utóbbi mennyiség megegyezik annak a valószínűségével, hogy a k-adik leghosszabb rekord az n-edik lépésben dől meg.

$Q_k^{\alpha}(n)$ aszimptotikus vizsgálata során mindkét esetben azt az eredményt kapom, hogy e mennyiség értéke független a bolyongás lépéseloszlásától, minden k-ra egy univerzális konstans segítségével jellemezhető.

$$Q_k^{\alpha}(n) \to Q_k^{\alpha}(\infty) \tag{3.1}$$

$Q_k^{\alpha}(\infty)$ univerzális konstans mindkét esetben tetszőleges k-ra kifejezhető, a következő tételeket mondom ki róluk:

1. Tétel. *Tetszőleges $k > 1$ egész szám esetén $Q_k^I(n)$ generátorfüggvényére fennáll $\sum_{n\geq 0} Q_k^I(n)e^{-sn} \approx \frac{1}{s}Q_k^I(\infty)$, amint $s \to 0$, ahol*

$$Q_k^I(\infty) = \frac{1}{2^{k-1}} \int_0^\infty \frac{\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \left(\int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y^{3/2}} dy \right)^{k-1}}{\left(\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} + \sqrt{\pi} erf(\sqrt{x}) \right)^k} dx$$

Következésképpen

$$Q_k^I(n) \to Q_k^I(\infty)$$

2. Tétel. *Tetszőleges $k > 1$ egész szám esetén $Q_k^{II}(n)$ generátorfüggvényére fennáll $\sum_{n\geq 0} Q_k^{II}(n)e^{-sn} \approx \frac{1}{s}Q_k^{II}(\infty)$, amint $s \to 0$, ahol*

$$Q_k^{II}(\infty) = \frac{1}{2^k} \int_0^\infty \frac{x^{-3/2}(1-e^{-x}) \left(\int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y^{3/2}} dy \right)^{k-1}}{\left(\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} + \sqrt{\pi} erf(\sqrt{x}) \right)^k} dx$$

Következésképpen

$$Q_k^{II}(n) \to Q_k^{II}(\infty)$$

$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ a Gauss-féle hibafüggvény.

$Q_k^\alpha(\infty)$ értékeit mindkét esetben $2 \leq k \leq 6$-ra a 3.1 táblázat tartalmazza. Ezek a konstansok korábban már megjelentek [2]-ben, ahol egy speciális esetben, a standard Brown-mozgás során vizsgálták annak a valószínűségét, hogy az utolsó kirándulás hossza a k-adik leghosszabb. Ez az eredmény összhangban áll az itt bemutatott eredményekkel, mivel egy véletlen bolyongásban kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van a kirándulások hossza és a rekordok élettartama között. A dolgozatomban azonban más esetre, tetszőleges folytonos és szimmetrikus lépéseloszlású véletlen bolyongásra igazolom ezt az összefüggést. A második estben kapott konstansok egy korábbi cikkben [7] is megjelentek már, ahol egy felújítási folyamat során vizsgálták annak a valószínűségét, hogy az utolsó kirándulás a k-adik leghosszabb. A dolgozatomban azonban egy sokkal egyszerűbb módszert mutatok be az eredmények kiszámítására, generátorfüggvények segítségével.

k	$Q_k^I(\infty)$	$Q_k^{II}(\infty)$
2	$0,143009\ldots$	$0,0812482\ldots$
3	$0,0630157\ldots$	$0,0334197\ldots$
4	$0,0356484\ldots$	$0,0184591\ldots$
5	$0,0230037\ldots$	$0,0117759\ldots$
6	$0,0161046\ldots$	$0,00819089\ldots$

3.1. táblázat. $Q_k^\alpha(\infty)$ értékei különböző k-kra

Belátom továbbá $Q_k^\alpha(\infty)$-ről, hogy mindkét esetben egy valószínűségi eloszlást definiál, azaz $\sum_{k>0} Q_k^\alpha(\infty) = 1$.

Az első esetben $\mathbf{E}^I(l_k(n))$ aszimptotikus vizsgálata során azt az eredményt kapom, hogy értéke lineárisan nő a lépésszámmal, a növekedés ütemét pedig a $Q_k^I(n)$-nél kapott konstanssal jellemezhetem.

3. Tétel. *Tetszőleges $k > 1$ egész számra $\boldsymbol{E}(l_k^I(n))$ generátorfüggvényére fennáll $\sum_{n\geq 0}\boldsymbol{E}(l_k^I(n))e^{sn} \approx \frac{1}{s^2}C_k^I$ amint $s \to 0$, ahol*

$$C_k^I = C_{k-1}^I - \frac{1}{2^{k-2}}\int_0^\infty \frac{\left(\int_x^\infty y^{-3/2}e^{-y}dy\right)^{k-2}\int_x^\infty y^{-1/2}e^{-y}dy}{\left(x^{-1/2}e^{-x}+\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})\right)^{k-1}}dx -$$

$$-\frac{1}{2^{k-1}}\int_0^\infty \frac{\left(\int_x^\infty y^{-3/2}e^{-y}dy\right)^{k-1}\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})}{\left(x^{-1/2}e^{-x}+\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})\right)^{k}}dx$$

és $C_1^I = Q^I(\infty)$. Következésképpen

$$\frac{\boldsymbol{E}(l_k^I(n))}{n} \approx C_k^I$$

Ezenkívül ebben az esetben csakúgy, mint $k = 1$ esetén [4] a következő összefüggés áll fenn $\mathbf{E}^I(l_k(n))$ és $Q_k^I(n)$ között:

$$\mathbf{E}^I(l_k(n+1)) = \mathbf{E}^I(l_k(n)) + Q_k^I(n) \tag{3.2}$$

k	C_k^{II}
2	$0,29664\ldots$
3	$0,180855\ldots$
4	$0,14805\ldots$
5	$0,133905\ldots$
6	$0,12645\ldots$

3.2. táblázat. C_k^{II} értékei különböző k-kra

A második esetben $\mathbf{E}^{II}(l_k(n))$ aszimptotikus vizsgálata során szintén azt az eredményt kapom, hogy értéke lineárisan nő a lépésszámmal, azonban a növekedés ütemét egy új, eddig nem látott konstansok sorozatával jellemezhetem:

4. Tétel. *Tetszőleges $k > 1$ egész számra $\boldsymbol{E}(l_k^{II}(n))$ generátorfüggvényére fennáll $\sum_{n\geq 0}\boldsymbol{E}(l_k^{II}(n))e^{sn} \approx \frac{1}{s^2}C_k^{II}$ amint $s \to 0$, ahol*

$$C_2^{II} = \int_0^\infty \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\int_0^\infty y^{-3/2}(1-e^{-y})dy}{x^{-1/2}e^{-x} + \sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}\frac{\int_x^\infty y^{-3/2}e^{-y}dy \int_0^x y^{-3/2}(1-e^{-y})dy}{\left(x^{-1/2}e^{-x} + \sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})\right)^2}\right) dx$$

$$C_k^{II} = C_{k-1}^{II} - \int_0^\infty \left(\frac{1}{2^{k-1}} \frac{\int_x^\infty y^{-3/2}(1-e^{-y})dy \left(\int_x^\infty y^{-3/2}e^{-y}dy\right)^{k-2}}{x^{-1/2}e^{-x} + \sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2^k}\frac{\int_0^\infty y^{-3/2}(1-e^{-y})dy \left(\int_x^\infty y^{-3/2}e^{-y}dy\right)^{k-1}}{\left(x^{-1/2}e^{-x} + \sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})\right)^k}\right) dx$$

Következésképpen

$$\frac{\boldsymbol{E}(l_k^{II}(n))}{n} \approx C_k^{II}$$

C_k^{II} értékeit $2 \leq k \leq 6$ esetben a 3.2 táblázat tartalmazza.

3.1. A modell

A dolgozat során [4] jelöléseit használom.

Tekintsünk egy véletlen bolyongást tetszőleges szimmetrikus és folytonos lépéseloszlással: $x_0 = 0$, és minden $t > 0$ időpillanatban $x_t = x_{t-1} + \eta_t$, ahol η_t-k független azonos eloszlású valószínűségi változók, $p(\eta)$ folytonos és szimmetrikus sűrűségfüggvénnyel.

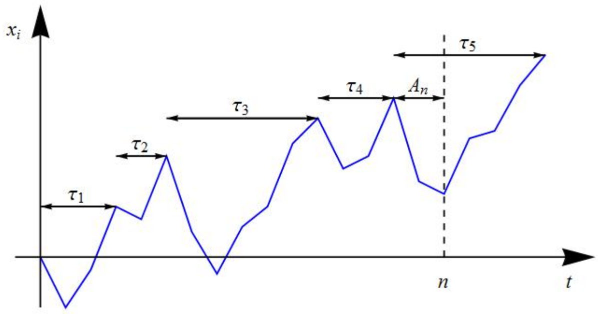
1. Definíció (Rekord)**.** *A k-adik lépésben rekord esemény történik, ha a bolyongás értéke k-ban meghaladja a bolyongás által összes előzőleg felvett értéket, azaz* $x_k = \max(x_0, \dots, x_k)$.

A legelső rekordot x_0-nak tekintem. Egy rekord élettartama az az idő, ameddig az adott rekord fennáll.

2. Definíció (Rekord élettartama)**.** *Legyen* x_k *rekord esemény, ekkor* x_k *élettartama* τ*, ha* $x_k \geq x_i$ *minden* $k < i < k+\tau$*-ra, de* $x_{k+\tau} > x_k$.

A rekordok élettartamai egy független azonos eloszlású valószínűségi változó sorozatot határoznak meg:$\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$, ahol τ_k jelöli a k-adik és $(k+1)$-edik rekord közötti lépések számát. Jelölje R_n a rekord események számát n lépés alatt. Az n-edik lépésben az utolsó rekord élettartama még ismeretlen, jelöljük az éppen aktuális hosszát A_n-nel. Feltéve, hogy $R_n = m$, a számításaink során tekinthető az utolsó intervallum a még ismeretlen nagyságú τ_m-nek, az utolsó ismert élettartamnak, azaz τ_{m-1}-nek, illetve A_n-nek is (3.1 ábra). Ezek az esetek mind különböző eredményekre vezetnek. Ebben a dolgozatban az utolsó intervallum releváns hosszát $\alpha = I$ esetben A_n-nek, $\alpha = II$ esetben τ_m-nek tekintem. Legyen $A^I_{n,m} = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{m-1}, A_n\}$ és $A^{II}_{n,m} = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m\}$.

Ahhoz, hogy a k-adik leghosszabb ideig fennálló rekord statisztikáit vizsgáljam, $\alpha = I$ esetén τ_i $(0 < i < R_n)$, A_n és R_n; $\alpha = II$ esetén τ_i $(0 < i \leq R_n)$ és R_n együttes eloszlásának ismeretére van szükségem.



3.1. ábra. A véletlen bolyongás során $R_n = 5$ esetén az utolsó rekord élettartama n-ben A_n, τ_4 vagy τ_5

Legyenek $\bar{l}^I = (l_1, l_2, \ldots, l_{m-1}, a)$ és $\bar{l}^{II} = (l_1, l_2, \ldots, l_m)$ az élettartamok lehetséges realizációi n lépés alatt az I. és II. esetben feltéve, hogy m rekord született. Ennek valószínűsége:

$$\mathbf{P}(\bar{l}^\alpha, n, m) = \mathbf{P}(A^\alpha_{n,m} = \bar{l}^\alpha, R_n = m) \tag{3.3}$$

Ahhoz, hogy ezt a valószínűséget meghatározzuk, két további mennyiséget kell definiálnunk: $q(k)$ jelölje annak a valószínűségét, hogy egy x_0-ból induló bolyongás k lépés után is x_0 alatt marad (q(0)=1); $f(k)$ pedig annak a valószínűségét, hogy ez a bolyongás a k-adik és $(k-1)$-edik lépés között lépi át x_0 szintjét ($f(0) = 0$):

$$q(k) = \mathbf{P}(x_j < x_0 \quad \forall 1 \le j \le k) \tag{3.4}$$

$$f(k) = \mathbf{P}(x_j < x_0 \quad \forall 1 \le j < k, \;\; x_k \ge x_0) \tag{3.5}$$

A két mennyiség közötti kapcsolat egyszerűen kifejezhető a következő egyenlettel:

$$f(k) = q(k-1) - q(k) \tag{3.6}$$

A későbbi számítások során szükség lesz $f(k)$ és $q(k)$ generátorfüggvényére.

1. Állítás. *$f(k)$ illetve $q(k)$ generátorfüggvénye:*

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n\geq 1} f(n)z^n = 1-\sqrt{1-z}$$

$$\tilde{q}(z) = \sum_{n\geq 0} q(n)z^n = \frac{1}{\sqrt{1-z}}$$

Bizonyítás. $f(k)$ generátorfüggvényét egy [1]-beli tétel segítségével számíthatjuk ki, amely a következőt mondja ki:

5. Tétel.
$$\log\frac{1}{1-\tilde{f}(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{n}\boldsymbol{P}(x_n \geq 0)$$

(A tétel bizonyítását a Függelékben ismertetem.)

A véletlen bolyongásunkban a lépéseloszlás folytonos és szimmetrikus, ezért $\mathbf{P}(x_n \geq 0) = \mathbf{P}(x_n \leq 0) = \frac{1}{2}$. Ezt felhasználva:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\mathbf{P}(x_n \geq 0) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} = -\frac{1}{2}\log(1-z) = \log\left(\frac{1}{\sqrt{1-z}}\right)$$

A 2. egyenlőségnél azt használtam, hogy $\log(1-a) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}$. A fenti kifejezés átalakításából adódik, hogy $\tilde{f}(z) = 1-\sqrt{1-z}$.

Felhasználva (3.6)-ot, $\tilde{f}(z)$ a következőképpen írható fel:

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n\geq 1} f(n)z^n = \sum_{n\geq 1}\left(q(n-1)-q(n)\right)z^n =$$

$$= z\sum_{m\geq 0} q(m)z^m - \sum_{n\geq 1} q(n)z^n = z\tilde{q}(z) - \tilde{q}(z) + q(0) = \tilde{q}(z)(z-1) - 1$$

Behelyettesítve $\tilde{f}(z) = 1-\sqrt{1-z}$-t, és átrendezve az egyenletet, azt kapjuk, hogy $\tilde{q}(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z}}$.

□

$\tilde{q}(z)$ felírható a következő negatív binomiális sorként (Függelék (5.3)):

$$\tilde{q}(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}z^n \tag{3.7}$$

Mivel a generátorfüggvény meghatározza az eloszlást, $q(k) = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$. Ez a kifejezés átalakítható a következőképpen:

$$\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} = \frac{(2k)!}{(2k)!!(2k)!!} = \frac{1}{2^{2k}}\frac{(2k)!}{k!k!} = \frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}$$

Tehát azt kapjuk, hogy

$$q(k) = \frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k} \tag{3.8}$$

Így explicit módon kifejezhető $q(k)$ és $f(k)$ ((3.6) segítségével).

A későbbiekben szükség lesz $q(k)$ és $f(k)$ aszimptotikus viselkedésének jellemzésére is, ekkor a következő állítást használható:

2. Állítás.

$$q(k) = \frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$$

$$f(k) = q(k-1) - q(k) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{3/2}}$$

Bizonyítás. Először $q(k)$ aszimptotikus viselkedését bizonyítom, ehhez (3.8)-at és a Stirling formulát használom fel:

$$q(k) = \frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k} = q(k) = \frac{1}{2^{2k}}\frac{(2k)!}{k!k!} \approx \frac{\sqrt{4\pi k}(2k)^{2k}e^k e^k}{e^{2k}(2\pi k)k^k k^k 2^{2k}} = \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$$

$f(k)$ aszimptotikus viselkedésének vizsgálatához (3.6)-ot használom:

$$f(k) = q(k-1) - q(k) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi(k-1)}} - \frac{1}{\sqrt{\pi k}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{\sqrt{(k-1)k}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{k-(k-1)}{\sqrt{(k-1)k}(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{k\sqrt{(k-1)}+(k-1)\sqrt{k}}\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2k^{3/2}}$$

□

Visszatérve (3.3)-hoz, $q(k)$ és $f(k)$ segítségével a következőképpen írható fel annak a valószínűsége, hogy n lépés alatt m rekord születik $\bar{l}^{\alpha}$ hosszakkal, ha felhasználjuk azt a tényt, hogy véletlen bolyongásnál a kirándulások hossza kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésben áll a rekordok élettartamával:

$$\mathbf{P}^{I}(\bar{l}^{I},n,m)=f(l_1)f(l_2)\dots f(l_{m-1})q(a)\delta(\sum_{k=1}^{m-1}l_k+a,n) \tag{3.9}$$

$$\mathbf{P}^{II}(\bar{l}^{II},n,m)=f(l_1)f(l_2)\dots f(l_m)\mathbf{I}(\sum_{k=1}^{m-1}l_k<n\leq\sum_{k=1}^{m}l_k) \tag{3.10}$$

ahol $\mathbf{I}(\cdot)$ az indikátorfüggvény, $\delta(i,j)$ pedig a Kronecker delta, azaz $\delta(i,j)=1$, ha $i=j$, különben 0.

3.2. I. eset

Ebben az esetben az utolsó rekord élettartamának A_n-t tekintem.

Jelölje $l_k^I(n)$ az első esetben k-adik leghosszabb rekord élettartamát n lépés alatt és $Q_k^I(n)$ annak a valószínűségét, hogy n lépés után az utolsó rekord élettartama a k-adik leghosszabb. Ez a valószínűség megegyezik annak a valószínűségével, hogy a k-adik leghosszabb rekord éppen n-ben dől meg.

Vegyük észre, hogy bármely lépésben legfeljebb egy rekord dőlhet meg. Tegyük fel, hogy az utolsó intervallum a k-adik leghosszabb. Ha a következő lépésben tovább nő a hossza, de még nem éri el a $(k-1)$-edik leghosszabb intervallum nagyságát, akkor csak $l_k(n)$ fog nőni. Ha eléri $l_{k-1}(n)$-t, akkor ez a lépés után két egyforma hosszú intervallumunk lesz; $l_k(n+1)$ és $l_{k-1}(n+1)$. Ezután azonban az utolsó intervallum további növekedése már nem eredményezi $l_k(n+1)$ további növekedését, ez az intervallum az eddigi $(k-1)$-edik leghosszabb lesz, és $l_{k-1}(n+1)$ fog tovább nőni.

Ezt az észrevételt felhasználva a két mennyiség között egy egyszerű összefüggés állapítható meg, csakúgy, mint a leghosszabb rekord esetén [4]: a k-adik rekord élettartama n-ben csak akkor nő, ha ebben a lépésben az utolsó intervallum hossza volt a k-adik leghosszabb, mégpedig $Q_k^I(n)$ valószínűséggel.

$$\mathbf{E}(l_k^I(n+1)) = \mathbf{E}(l_k^I(n)) + Q_k^I(n) \tag{3.11}$$

Először a második leghosszabb élettartamú rekord statisztikáit vizsgálom. Ez a mennyiség lehet az utolsó, még befejezetlen inetrvallum (A_n) hossza, vagy valamely korábbi rekord (τ_i) élettartama. $l_2^I(n)$ eloszlásfüggvénye $F_2^I(t,n)$:

$$F_2^I(t,n) = \mathbf{P}(l_2^I(n) \le t) = \mathbf{P}(l_1, l_2, \ldots, A_n \le t) + \mathbf{P}(l_1^I(n) > t, l_2^I(n) \le t) \tag{3.12}$$

Az eloszlásfüggvény felírható $F_2^I(t,n) = \sum_{m\ge 1} F_2^I(t,n,m)$ alakban, ahol

$$F_2^I(t,n,m) = \mathbf{P}(l_2^I(n) \le t, R_n = m) \tag{3.13}$$

$l_2^I(n) \le t$ akkor áll fenn, ha mindegyik rekord élettartama kisebb vagy egyenlő t-nél, vagy ha a leghosszabb rekord élettartama nagyobb, mint t, de a többié kisebb vagy egyenlő. A leghosszabb rekord az utóbbi esetben lehet A_n, vagy $\tau_1, \ldots, \tau_{m-1}$ valamelyike. Ez alapján a következő mennyiségek összegeként áll elő $F_2^I(t,n,m)$:

$$\begin{aligned} F_2^I(t,n,m) = & \sum_{l_1=1}^{t} \sum_{l_2=1}^{t} \cdots \sum_{l_{m-1}=1}^{t} \sum_{a=0}^{t} \mathbf{P}(\bar{l}^I, n, m) + \\ & + (m-1) \sum_{l_1=t+1}^{\infty} \sum_{l_2=1}^{t} \cdots \sum_{l_{m-1}=1}^{t} \sum_{a=0}^{t} \mathbf{P}(\bar{l}^I, n, m) + \\ & + \sum_{l_1=1}^{t} \sum_{l_2=1}^{t} \cdots \sum_{l_{m-1}=1}^{t} \sum_{a=t+1}^{\infty} \mathbf{P}(\bar{l}^I, n, m) \end{aligned} \tag{3.14}$$

Jelölje $F_2^I(t,n,m)$ generátorfüggvényét $\tilde{F}_2^I(t,m,z)$. Ekkor (3.9)-et behelyettesítve a következőt kapom:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_2^I(t,m,z) = \sum_{n\ge 0} F_2^I(t,n,m) z^n = \left(\sum_{j=1}^{t} f(j) z^j \right)^{m-1} \sum_{j=0}^{t} q(j) z^j + \\ + (m-1) \left(\sum_{j=1}^{t} f(j) z^j \right)^{m-2} \sum_{j=t+1}^{\infty} f(j) z^j \sum_{j=0}^{t} q(j) z^j + \left(\sum_{j=1}^{t} f(j) z^j \right)^{m-1} \sum_{j=t+1}^{\infty} q(j) z^j \end{aligned} \tag{3.15}$$

Legyen $F_2^I(t,n)$ generátorfüggvénye $\tilde{F}_2^I(t,z)$, ez kifejezhető $\tilde{F}_2^I(t,m,z)$ segítségével:

$$\tilde{F}_2^I(t,z) = \sum_{n\geq 0} F_2^I(t,n)z^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 1} F_2^I(t,n,m)z^n = \sum_{m\geq 1} \tilde{F}_2^I(t,m,z) \tag{3.16}$$

Alkalmazva, hogy $\sum_{m\geq 1}(m-1)x^{m-2} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{m\geq 1} x^{m-1}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{m\geq 0} x^m\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$, azt kapom, hogy

$$\begin{aligned}\tilde{F}_2^I(t,z) &= \frac{\sum_{j=0}^{t} q(j)z^j}{1-\sum_{j=1}^{t} f(j)z^j} + \frac{\sum_{j=t+1}^{\infty} f(j)z^j \sum_{j=0}^{t} q(j)z^j}{\left(1-\sum_{j=1}^{t} f(j)z^j\right)^2} + \frac{\sum_{j=t+1}^{\infty} q(j)z^j}{1-\sum_{j=1}^{t} f(j)z^j} = \\ &= \frac{\sum_{j=0}^{\infty} q(j)z^j}{1-\sum_{j=1}^{t} f(j)z^j} + \frac{\sum_{j=t+1}^{\infty} f(j)z^j \sum_{j=0}^{t} q(j)z^j}{\left(1-\sum_{j=1}^{t} f(j)z^j\right)^2}\end{aligned} \tag{3.17}$$

$F_2^I(t,n)$ segítségével kiszámítható a második leghosszabb rekord élettartamának várható értéke:

$$\mathbf{E}(l_2^I(n)) = \sum_{t\geq 0}\left(1-F_2^I(t,n)\right) \tag{3.18}$$

$\mathbf{E}(l_2^I(n))$ generátorfüggvénye a következő:

$$\sum_{n\geq 0}\mathbf{E}(l_2^I(n))z^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{t\geq 0}\left(1-F_2^I(t,n)\right)z^n = \sum_{t\geq 0}\left(\frac{1}{1-z} - \tilde{F}_2^I(t,z)\right) \tag{3.19}$$

Felhasználva (3.17)-et:

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\mathbf{E}(l_2^I(n))z^n &= \sum_{t\geq 0}\left(\frac{1}{1-z} - \frac{\sum_{j=0}^{\infty} q(j)z^j}{1-\sum_{j=1}^{t} f(j)z^j} - \frac{\sum_{j=t+1}^{\infty} f(j)z^j \sum_{j=0}^{t} q(j)z^j}{\left(1-\sum_{j=1}^{t} f(j)z^j\right)^2}\right) = \\ &= \underbrace{\sum_{t\geq 0}\left(\frac{1}{1-z} - \frac{\sum_{j=0}^{t} q(j)z^j}{1-\sum_{j=1}^{t} f(j)z^j}\right)}_{\sum_{t\geq 0}\frac{1}{1-z}-\tilde{F}_1^I(t,z)} - \underbrace{\sum_{t\geq 0}\frac{\sum_{j=t+1}^{\infty} q(j)z^j}{1-\sum_{j=1}^{t} f(j)z^j}}_{\textbf{(a)}} - \\ &- \underbrace{\sum_{t\geq 0}\frac{\sum_{j=t+1}^{\infty} f(j)z^j \sum_{j=0}^{t} q(j)z^j}{\left(1-\sum_{j=1}^{t} f(j)z^j\right)^2}}_{\textbf{(b)}}\end{aligned} \tag{3.20}$$

Az első tag megegyezik a leghosszabb élettartamú rekord várható értékének generátorfüggvényével, amire a következő áll fenn $Q_1^I(\infty) = 0,626508\ldots$ konstanssal [4]:

$$\sum_{n\geq 0} e^{-sn}\mathbf{E}(l_1^I(n)) \approx \frac{1}{s^2}Q_1^I(\infty) \tag{3.21}$$

Külön-külön kiszámítom **(a)**-t és **(b)**-t. Ezekhez a következő állítást alkalmazom:

3. Állítás.

$$1-\sum_{k=1}^{t} f(k)z^k = q(t)z^t + (1-z)\sum_{k=0}^{t-1} q(k)z^k$$

Bizonyítás. $f(k)$-t átírom (3.6) szerint:

$$1-\sum_{k=1}^{t} f(k)z^k = 1-\sum_{k=1}^{t}\left(q(k-1)-q(k)\right)z^k = q(0)-\sum_{k=1}^{t} q(k-1)z^k + \sum_{k=1}^{t} q(k)z^k =$$

$$= -z\sum_{j=0}^{t-1} q(j)z^j + \sum_{k=0}^{t} q(k)z^k = q(t)z^t + (1-z)\sum_{k=0}^{t-1} q(k)z^k$$

□

Először **(a)**-t számítom ki. Az előbbi állítás felhasználásával

$$\textbf{(a)} = \sum_{t\geq 0} \frac{\sum_{j=t+1}^{\infty} q(j)z^j}{q(t)z^t + (1-z)\sum_{j=0}^{t-1} q(j)z^j} \tag{3.22}$$

Ahhoz, hogy megkapjam $\mathbf{E}(l_2^I(n))$ viselkedését nagy n-re, a generátorfüggvény viselkedését $z \to 1$ határértékben vizsgálom. Alkalmazva a következő helyettesítést: $z = e^{-s}$, ahol $s \to 0$, azt kapom, hogy

$$\textbf{(a)} = \sum_{t\geq 0} \frac{\sum_{j=t+1}^{\infty} q(j)e^{-js}}{q(t)e^{-ts} + \underbrace{(1-e^{-s})}_{\approx s}\sum_{j=0}^{t-1} q(j)e^{-js}} \tag{3.23}$$

Használjuk a $q(j) = \frac{1}{\sqrt{\pi j}}$ és az $f(j) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{3/2}}$ aszimptotikát (2. Állítás):

$$\textbf{(a)} \approx \sum_{t\geq 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{j=t+1}^{\infty} j^{-1/2}e^{-js}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}t^{-1/2}e^{-ts} + s\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{j=0}^{t-1} j^{-1/2}e^{-js}} \tag{3.24}$$

Ahogy $s \to 0$, a diszkrét összeget helyettesíthetem integrállal. Végrehajtva a $t = \frac{x}{s}$ és a $j = \frac{y}{s}$ változócserét azt kapom, hogy:

$$\begin{aligned}
\textbf{(a)} &\approx \int_0^\infty \frac{\int_x^\infty \left(\frac{s}{y}\right)^{1/2} e^{-y}\frac{dy}{s}}{\left(\frac{s}{x}\right)^{1/2} e^{-x} + s\int_0^x \frac{s}{y}^{1/2} e^{-y}\frac{dy}{s}} \frac{dx}{s} = \\
&= \frac{1}{s^2}\int_0^\infty \frac{\int_x^\infty y^{-1/2}e^{-y}dy}{x^{-1/2}e^{-x} + \int_0^x y^{-1/2}e^{-y}dy} dx = \\
&= \frac{1}{s^2}\int_0^\infty \frac{\int_x^\infty y^{-1/2}e^{-y}dy}{x^{-1/2}e^{-x} + \sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})} dx
\end{aligned} \tag{3.25}$$

ahol $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$ a Gauss-féle hibafüggvény. $y = t^2$ helyettesítéssel $erf(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-y}y^{-1/2}dy$.

(b) hasonlóképp számítható, mint **(a)**. A következő aszimptotikát kapom rá:

$$\textbf{(b)} \approx \frac{1}{s^2}\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})\int_x^\infty y^{-3/2}e^{-y}dy}{\left(x^{-1/2}e^{-x} + \sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})\right)^2} dx \tag{3.26}$$

Tehát az következőt kapom $\mathbf{E}(l_2^I(n))$ generátorfüggvényére:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} e^{-sn}\mathbf{E}(l_2^I(n)) \approx \frac{1}{s^2}\Bigg(Q_1^I(\infty) - \int_0^\infty \frac{\int_x^\infty y^{-1/2}e^{-y}dy}{x^{-1/2}e^{-x} + \sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})} dx - \\
- \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})\int_x^\infty y^{-3/2}e^{-y}dy}{\left(x^{-1/2}e^{-x} + \sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})\right)^2} dx \Bigg) = \frac{1}{s^2}0,143009\ldots
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Ezt az azonosságot átírom $\sum_{n\geq 0} e^{-sn}\mathbf{E}(l_2^I(n)) = -\frac{d}{ds}\left(\sum_{n\geq 0} e^{-sn}\frac{\mathbf{E}(l_2^I(n))}{n}\right) \approx \frac{1}{s^2}0,143009\ldots$ alakra, amiből a következőt kapom:

$$\sum_{n\geq 0} se^{-sn}\frac{\mathbf{E}(l_2^I(n))}{n} \approx 0,143009\ldots \tag{3.28}$$

$se^{-sn} \approx (1-e^{-s})e^{-sn} = \mathbf{P}(\xi = n)$, ahol $\xi \sim Geo(1-e^{-s})$. Mivel $l_1(n)$, $l_1(n) + l_2(n)$, $l_1(n) + l_2(n) + l_3(n)$, $\ldots$ szubadditív, ezért $\frac{l_1(n)}{n}$, $\frac{l_1(n)+l_2(n)}{n}$, $\frac{l_1(n)+l_2(n)+l_3(n)}{n}$,

... konvergálnak (Függelék, 7. Állítás), így $\frac{l_k(n)}{n}$ is konvergál minden k-ra, ebből pedig az következik, hogy

$$\frac{\mathbf{E}(l_2^I(n))}{n} \approx 0,143009\ldots \tag{3.29}$$

Most $Q_2^I(n)$ aszimptotikus viselkedését vizsgálom. Jelölje $Q_2^I(n,m)$ annak a valószínűségét, hogy n lépés alatt m rekord születik, és ezek közül az utolsó élettartama a második leghosszabb. Ebben az esetben $\tau_1,\ldots,\tau_{m-1}$ közül pontosan az egyik intervallum hossza nagyobb A_n-nél, ezért ezt a valószínűséget a következőképpen fejezhetjük ki:

$$Q_2^I(n,m) = \mathbf{P}(A_n = l_2(n), R_n = m) = (m-1)\sum_{a\geq 0}\sum_{l_1=a+1}^{\infty}\sum_{l_2=1}^{a}\ldots\sum_{l_{m-1}=1}^{a}\mathbf{P}(\bar{l}^I,n,m) \tag{3.30}$$

Annak a valószínűségét, hogy n lépés után az utolsó rekord élettartama a második leghosszabb ($Q_2^I(n)$) megkaphatjuk úgy, hogy az előbbi valószínűséget összegezzük minden lehetséges m-re: $Q_2^I(n) = \sum_{m\geq 0} Q_2^I(n,m)$. $Q_2^I(n)$ generátorfüggvényét jelölje $\tilde{Q}_2^I(z)$.

$$\tilde{Q}_2^I(z) = \sum_{n\geq 0} Q_2^I(n)z^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 1} Q_2^I(n,m)z^n = \sum_{j\geq 0}\frac{q(j)z^j\sum_{k=j+1}^{\infty} f(k)z^k}{\left(1-\sum_{k=1}^{j} f(k)z^k\right)^2} \tag{3.31}$$

Hasonló módszerrel, mint $\tilde{F}_2^I(t,n)$ kiszámításánál, azt kapom $Q_2^I(n)$ generátorfüggvényére, hogy

$$\tilde{Q}_2^I(e^{-s}) \approx \frac{1}{s}\int_0^{\infty}\frac{x^{-1/2}e^{-x}\int_x^{\infty} y^{-3/2}e^{-y}dy}{\left(x^{-1/2}e^{-x}+\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})\right)^2}dx = \frac{1}{s}0,143009\ldots \tag{3.32}$$

Azaz ugyanazt a konstanst kaptuk, mint $\mathbf{E}(l_2^I(n))$ generátorfüggvényének kiszámításakor. Tehát $\sum_{n\geq 0} Q_(^I n)e^{-sn} \approx \frac{1}{s}Q_2^I(\infty)$. Mivel $Q^I(n)$ konvergál, ugyanazt a gondolatmenetet használva, mint a várható érték esetén, azt kapom, hogy:

$$Q_2^I(n) \to Q_2^I(\infty) = 0,143009\ldots \tag{3.33}$$

és a következő összefüggés áll fenn $\mathbf{E}(l_2^I(n))$ és $Q_2^I(n)$ között:

$$\frac{\mathbf{E}(l_2^I(n))}{n} \approx Q_2(n) \tag{3.34}$$

Ez az eredmény összhangban áll (3.11)-gyel, továbbá a két mennyiség generátorfüggvénye egymásból kifejezhető a következőképpen:

4. Állítás.

$$(1-z)\sum_{n\geq 0} \boldsymbol{E}(l_2^I(n))z^n = z\sum_{n\geq 0} Q_2^I(n)z^n$$

Bizonyítás. Az állítás (3.11) egyszerű következménye. □

Ezután a k-adik leghosszabb élettartamú rekordra számítom ki ugyanezeket a statisztikákat (k tetszőleges).

Először $l_k^I(n)$-t vizsgálom, jelölje $F_k^I(t,n)$ az eloszlásfüggvényét. Ez az eloszlásfüggvény kifejezhető $F_{k-1}^I(t,n)$ segítségével, ugyanis $l_k^I(n) \leq t$ akkor áll fenn, ha már $l_{k-1}^I(n) \leq t$ is fennáll, vagy ha $l_{k-1}^I(n) > t$, de $l_k^I(n) \leq t$:

$$F_k^I(t,n) = \mathbf{P}(l_k^I(n) \leq t) = F_{k-1}^I(t,n) + \mathbf{P}(l_k^I(n) \leq t, l_{k-1}^I(n) > t) \tag{3.35}$$

Ezt az eloszlásfüggvényt felírhatjuk $F_k^I(t,n) = \sum_{m\geq 1} F_k^I(t,n,m)$ alakban, ahol

$$F_k^I(t,n,m) = \mathbf{P}(l_k^I(n) \leq t, R_n = m) \tag{3.36}$$

Hasonlóan $l_k^I(n)$ eloszlásfüggvényéhez, ez a mennyiség is felírható $F_{k-1}^I(t,n,m)$ segítségével:

$$F_k^I(t,n,m) = F_{k-1}^I(t,n,m) + \mathbf{P}(l_k^I(n) \leq t, l_{k-1}^I(n) > t, R_n = m) \tag{3.37}$$

Akkor, ha az első $(k-1)$ leghosszabb intervallum nagyobb, mint t, két esetet különböztethetünk meg: ha az utolsó intervallum (A_n) is ezek között van, illetve ha az első $(k-1)$ leghosszabb intervallum mind $\tau_1, \dots, \tau_{m-1}$ közül kerül ki. Ez alapján $F_k^I(t,n,m)$ a következőképpen számítható ki:

$$\begin{aligned}
F_k^I(t,n,m) = {} & F_{k-1}^I(t,n,m) + \\
& + \binom{m-1}{k-1} \sum_{l_1=t+1}^{\infty} \cdots \sum_{l_{k-1}=t+1}^{\infty} \sum_{l_k=1}^{t} \cdots \sum_{l_{m-1}=1}^{t} \sum_{a=0}^{t} \mathbf{P}(\bar{l}^I, n, m) + \\
& + \binom{m-1}{k-2} \sum_{l_1=t+1}^{\infty} \cdots \sum_{l_{k-2}=t+1}^{\infty} \sum_{l_{k-1}=1}^{t} \cdots \sum_{l_{m-1}=1}^{t} \sum_{a=t+1}^{\infty} \mathbf{P}(\bar{l}^I, n, m)
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Jelölje $F_k^I(t,n,m)$ generátorfüggvényét $\tilde{F}_k^I(t,m,z)$:

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_k^I(t,m,z) = {} & \sum_{n \geq 0} F_k^I(t,n,m) z^n = \tilde{F}_{k-1}^I(t,n,m) + \\
& + \binom{m-1}{k-1} \left(\sum_{j=1}^{t} f(j) z^j \right)^{m-k} \left(\sum_{j=t+1}^{\infty} f(j) z^j \right)^{k-1} \sum_{j=0}^{t} q(j) z^j + \\
& + \binom{m-1}{k-2} \left(\sum_{j=1}^{t} f(j) z^j \right)^{m-k+1} \left(\sum_{j=t+1}^{\infty} f(j) z^j \right)^{k-2} \sum_{j=t+1}^{\infty} q(j) z^j
\end{aligned} \tag{3.39}$$

$\tilde{F}_k^I(t,m,z)$ segítségével felírható $F_k^I(t,n)$ generátorfüggvénye is:

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_k^I(t,z) = {} & \sum_{n \geq 0} F_k^I(t,n) z^n = \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 1} F_k^I(t,n,m) z^n = \tilde{F}_{k-1}^I(t,n) + \\
& + \frac{\left(\sum_{j=t+1}^{\infty} f(j) z^j \right)^{k-1} \sum_{j=0}^{t} q(j) z^j}{\left(1 - \sum_{j=1}^{t} f(j) z^j \right)^{k}} + \frac{\left(\sum_{j=t+1}^{\infty} f(j) z^j \right)^{k-2} \sum_{j=t+1}^{\infty} q(j) z^j}{\left(1 - \sum_{j=1}^{t} f(j) z^j \right)^{k-1}}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Itt azt az összefüggést használtam, hogy

$$\sum_{m \geq 1} \binom{m-k}{k-1} x^{m-k} = \frac{d^{k-1}}{(dx)^{k-1}} \frac{x^{m-1}}{(k-1)!} = \frac{d^{k-1}}{(dx)^{k-1}} \frac{1}{1-x} \frac{1}{(k-1)!} = \frac{1}{(1-x)^k} \tag{3.41}$$

illetve hasonlóképpen $\sum_{m \geq 1} \binom{m-k}{k-2} x^{m-k+1} = \frac{1}{(1-x)^{k-1}}$.

$l_k^I(n)$ eloszlásfüggvényének segítségével ki tudom számítani a k-adik leghosszabb rekord élettartamának várható értékét:

$$\mathbf{E}(l_k^I(n)) = \sum_{t\geq 0}\left(1 - F_k^I(t,n)\right) \tag{3.42}$$

Hasonlóan, mint $k = 2$ esetben, a várható érték aszimptotikus viselkedésének vizsgálatához a generátorfüggvényét számítom ki:

$$\sum_{n\geq 0}\mathbf{E}(l_k^I(n))z^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{t\geq 0}\left(1 - F_k^I(t,n)\right)z^n = \sum_{t\geq 0}\left(\frac{1}{1-z} - \tilde{F}_k^I(t,z)\right) \tag{3.43}$$

Behelyettesítve (3.40)-et, a következőt kapom:

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0}\mathbf{E}(l_k^I(n))z^n = \sum_{t\geq 0}\Bigg(&\frac{1}{1-z} - \tilde{F}_{k-1}^I(t,z) - \\
&- \frac{\left(\sum_{j=t+1}^{\infty} f(j)z^j\right)^{k-2}\sum_{j=t+1}^{\infty} q(j)z^j}{\left(1-\sum_{j=1}^{t} f(j)z^j\right)^{k-1}} - \frac{\left(\sum_{j=t+1}^{\infty} f(j)z^j\right)^{k-1}\sum_{j=0}^{t} q(j)z^j}{\left(1-\sum_{j=1}^{t} f(j)z^j\right)^{k}}\Bigg) = \\
= \underbrace{\sum_{t\geq 0}\left(\frac{1}{1-z} - \tilde{F}_{k-1}^I(t,z)\right)}_{\sum_{n\geq 0}\mathbf{E}(l_{k-1}^I(n))z^n} &- \underbrace{\sum_{t\geq 0}\frac{\left(\sum_{j=t+1}^{\infty} f(j)z^j\right)^{k-2}\sum_{j=t+1}^{\infty} q(j)z^j}{\left(1-\sum_{j=1}^{t} f(j)z^j\right)^{k-1}}}_{\mathbf{(c)}} - \\
- \underbrace{\sum_{t\geq 0}\frac{\left(\sum_{j=t+1}^{\infty} f(j)z^j\right)^{k-1}\sum_{j=0}^{t} q(j)z^j}{\left(1-\sum_{j=1}^{t} f(j)z^j\right)^{k}}}_{\mathbf{(d)}}&
\end{aligned} \tag{3.44}$$

(c) és **(d)** kiszámításához a $k = 2$-nél már alkalmazott módszert használom:

$$\mathbf{(c)} \approx \frac{1}{s^2}\frac{1}{2^{k-2}}\int_0^{\infty}\frac{\left(\int_x^{\infty} y^{-3/2}e^{-y}dy\right)^{k-2}\int_x^{\infty} y^{-1/2}e^{-y}dy}{\left(x^{-1/2}e^{-x}+\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})\right)^{k-1}}dx \tag{3.45}$$

$$\mathbf{(d)} \approx \frac{1}{s^2}\frac{1}{2^{k-1}}\int_0^{\infty}\frac{\left(\int_x^{\infty} y^{-3/2}e^{-y}dy\right)^{k-1}\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})}{\left(x^{-1/2}e^{-x}+\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})\right)^{k}}dx \tag{3.46}$$

Tehát azt kapom $\mathbf{E}(l_k^I(n))$ generátorfüggvényére tetszőleges $k \geq 2$ esetén, hogy:

$$\sum_{n\geq 0} \mathbf{E}(l_k^I(n))e^{sn} \approx$$

$$\approx \sum_{n\geq 0} \mathbf{E}(l_{k-1}^I(n))e^{sn} - \frac{1}{s^2}\frac{1}{2^{k-2}}\int_0^\infty \frac{\left(\int_x^\infty y^{-3/2}e^{-y}dy\right)^{k-2}\int_x^\infty y^{-1/2}e^{-y}dy}{\left(x^{-1/2}e^{-x}+\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})\right)^{k-1}}dx-$$
$$-\frac{1}{s^2}\frac{1}{2^{k-1}}\int_0^\infty \frac{\left(\int_x^\infty y^{-3/2}e^{-y}dy\right)^{k-1}\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})}{\left(x^{-1/2}e^{-x}+\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})\right)^{k}}dx \tag{3.47}$$

$k=2$ esetén azt kaptam, hogy $\sum_{n\geq 0}\mathbf{E}(l_2^I(n))e^{sn} \approx \frac{1}{s^2}0,143009\ldots$, ezt az eredményt felhasználva kiszámítható $k=3$-ra az aszimptotika, majd ezzel $k=4$-re, és így tovább. Minden esetben azt kapjuk, hogy $\sum_{n\geq 0}\mathbf{E}(l_k^I(n))e^{sn} \approx \frac{1}{s^2}C_k^I$, ahol C_k^I egy k-tól függő konstans. C_k^I értékeit $2 \leq k \leq 6$-ra a 3.3 táblázat tartalmazza. Ugyanúgy, mint $k=2$ esetén ebből és $\frac{l_k^I(n)}{n}$ konvergenciájából az következik, hogy

$$\frac{\mathbf{E}(l_k^I(n))}{n} \approx C_k^I \tag{3.48}$$

Tehát az I. esetben $\mathbf{E}(l_k^I(n))$-ről a következő tétel mondható ki:

6. Tétel. *Tetszőleges $k>1$ egész számra $\boldsymbol{E}(l_k^I(n))$ generátorfüggvényére fennáll $\sum_{n\geq 0}\boldsymbol{E}(l_k^I(n))e^{sn} \approx \frac{1}{s^2}C_k^I$ amint $s \to 0$, ahol*

$$C_k^I = C_{k-1}^I - \frac{1}{2^{k-2}}\int_0^\infty \frac{\left(\int_x^\infty y^{-3/2}e^{-y}dy\right)^{k-2}\int_x^\infty y^{-1/2}e^{-y}dy}{\left(x^{-1/2}e^{-x}+\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})\right)^{k-1}}dx-$$

$$-\frac{1}{2^{k-1}}\int_0^\infty \frac{\left(\int_x^\infty y^{-3/2}e^{-y}dy\right)^{k-1}\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})}{\left(x^{-1/2}e^{-x}+\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})\right)^{k}}dx$$

és $C_1^I = Q^I(\infty)$. Következésképpen

$$\frac{\boldsymbol{E}(l_k^I(n))}{n} \approx C_k^I$$

k	C_k^I
2	$0,143009\ldots$
3	$0,0630157\ldots$
4	$0,0356484\ldots$
5	$0,0230037\ldots$
6	$0,0161046\ldots$

3.3. táblázat. C_k^I értékei különböző k-kra

Ezután ebben az esetben is megvizsgálom $Q_k^I(n)$ aszimptotikus viselkedését. Jelölje annak a valószínűségét, hogy n lépés alatt m rekord születik, és ezek közül az utolsó élettartama a k-adik leghosszabb $Q_k^I(n,m)$. Ebben az esetben $\tau_1,\ldots,\tau_{m-1}$ közül pontosan $k-1$ intervallum hossza nagyobb A_n-nél, ezért ez a valószínűség a következőképpen fejezhető ki:

$$\begin{aligned} Q_k^I(n,m) &= \mathbf{P}(A_n = l_k^I(n), R_n = m) = \\ &= \binom{m-1}{k-1} \sum_{a\geq 0} \sum_{l_1=a+1}^{\infty} \cdots \sum_{l_{k-1}=a+1}^{\infty} \sum_{l_k=1}^{a} \cdots \sum_{l_{m-1}=1}^{a} \mathbf{P}(\bar{l}^I, n, m) \end{aligned} \tag{3.49}$$

$Q_k^I(n)$-et úgy kaphatjuk meg, ha ezt a mennyiséget összegezzük minden m-re: $Q_k^I(n) = \sum_{m\geq 0} Q_k^I(n,m)$. $Q_k^I(n)$ viselkedését is a generátorfüggvénye segítségével vizsgálom:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_k^I(z) &= \sum_{n\geq 0} Q_k^I(n) z^n = \sum_{n\geq 0} \sum_{m\geq 1} Q_k^I(n,m) z^n = \\ &= \sum_{m\geq 1} \sum_{j\geq 0} q(j) z^j \binom{m-1}{k-1} \left(\sum_{l=1}^{j} f(l) z^l \right)^{m-k} \left(\sum_{l=j+1}^{\infty} f(l) z^l \right)^{k-1} \end{aligned} \tag{3.50}$$

Alkalmazva (3.41)-et a következőt kapom:

$$\tilde{Q}_k^I(z) = \sum_{j\geq 0} \frac{q(j) z^j \left(\sum_{l=j+1}^{\infty} f(l) z^l \right)^{k-1}}{\left(1 - \sum_{l=1}^{j} f(l) z^l \right)^k} \tag{3.51}$$

Ismét a szokásos átalakításokat használva $\tilde{Q}_k^I(z)$ aszimptotikus viselkedése az alábbi:

$$\tilde{Q}_k^I(z) \approx \frac{1}{s}\frac{1}{2^{k-1}}\int_0^\infty \frac{\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\left(\int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y^{3/2}}dy\right)^{k-1}}{\left(\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}+\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})\right)^k}dx \tag{3.52}$$

ahol

$$Q_k^I(\infty) = \frac{1}{2^{k-1}}\int_0^\infty \frac{\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\left(\int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y^{3/2}}dy\right)^{k-1}}{\left(\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}+\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})\right)^k}dx \tag{3.53}$$

egy k-tól függő konstans, melynek értékeit $2 \leq k \leq 6$-ra a 3.4 táblázat tartalmazza. Tehát csakúgy, mint $k = 2$ esetén, azt kapjuk, hogy

$$Q_k^I(n) \to Q_k^I(\infty) \tag{3.54}$$

Tehát az I. esetben $Q_k^I(n)$-ről a következő tétel mondható ki:

7. Tétel. *Tetszőleges $k > 1$ egész szám esetén $Q_k^I(n)$ generátorfüggvényére fennáll $\sum_{n\geq 0} Q_k^I(n)e^{-sn} \approx \frac{1}{s}Q_k^I(\infty)$, amint $s \to 0$, ahol*

$$Q_k^I(\infty) = \frac{1}{2^{k-1}}\int_0^\infty \frac{\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\left(\int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y^{3/2}}dy\right)^{k-1}}{\left(\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}+\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})\right)^k}dx$$

Következésképpen

$$Q_k^I(n) \to Q_k^I(\infty)$$

Vegyük észre, hogy $Q_k^I(\infty)$ értékei megegyeznek C_k^I konstansok értékeivel minden k-ra. Ez alapján $\mathbf{E}(l_k^I(n))$ és $Q_k^I(n)$ mennyiségek között is fennáll a $k = 2$ esetén bemutatott összefüggés:

$$\frac{\mathbf{E}(l_k^I(n))}{n} \approx Q_k^I(n) \tag{3.55}$$

Ez a megfigyelés összhangban áll (3.11)-gyel, továbbá a két mennyiség generátorfüggvényéről hasonlóan belátható a következő állítás, mint $k = 2$ esetén:

k	$Q_k^I(\infty)$
2	$0,143009\ldots$
3	$0,0630157\ldots$
4	$0,0356484\ldots$
5	$0,0230037\ldots$
6	$0,0161046\ldots$

3.4. táblázat. $Q_k^I(\infty)$ értékei különböző k-kra

5. Állítás.

$$(1-z)\sum_{n\geq 0}\boldsymbol{E}(l_k^I(n))z^n = z\sum_{n\geq 0}Q_k^I(n)z^n$$

Mivel minden $k\geq 1$-re ismerjük $Q_k^I(n)$ aszimptotikus viselkedését, megvizsgálható, hogy ez egy valószínűségi eloszláshoz tart-e (3.2 ábra). Ha összegezük minden k-ra $Q_k^I(\infty)$-t, akkor a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}Q_k^I(\infty) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}}\int_0^{\infty}\frac{\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\left(\int_x^{\infty}\frac{e^{-y}}{y^{3/2}}dy\right)^{k-1}}{\left(\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}+\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})\right)^k}dx = \\ &= \int_0^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}}{\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}+\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})}\left(\frac{\int_x^{\infty}\frac{e^{-y}}{y^{3/2}}dy}{2\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}+2\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})}\right)^{k-1}dx\end{aligned} \tag{3.56}$$

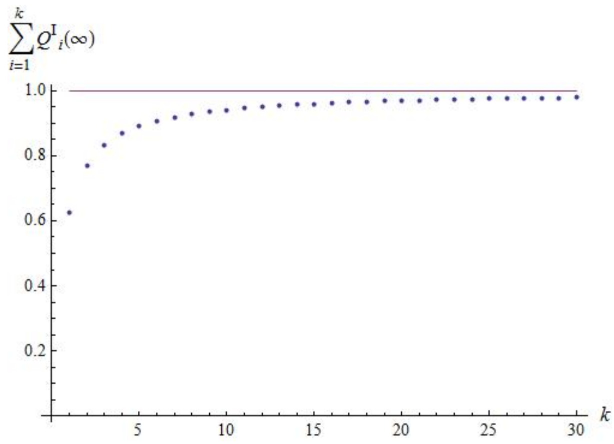
A geometriai sor összegképletét alkalmazom, illetve a következő kifejezést:

$$\int_x^{\infty}y^{-3/2}e^{-y}dy = 2x^{-1/2}e^{-x}-2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)+2\sqrt{\pi}erf(x) \tag{3.57}$$

ahol $\Gamma(x)=\int_0^{\infty}y^{x-1}e^{-x}dy$ a Gamma-függvény.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}Q_k^I(\infty) &= \int_0^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}}{\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}+\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})}\left(\frac{2e^{-x}x^{-1/2}+2\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right)dx = \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\infty}e^{-x}x^{-1/2}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = 1\end{aligned} \tag{3.58}$$

Az utolsó előtti egyenlőség parciális integrálással kapható meg.



3.2. ábra. $\sum_{i=1}^{k} Q_i^I(n)$ konvergál egyhez

Tehát $Q_k^I(\infty)$ $(1 \leq k)$ valószínűségi eloszlást határoz meg.

3.3. II. eset

Ebben az esetben az utolsó intervallum (τ_m) hossza az n-edik lépésben még ismeretlen, $R_n = m$ esetén a rekordok élettartamának egy lehetséges $\bar{l} = l_1, l_2, \ldots, l_m$ realizációjára a következő teljesül:

$$\sum_{k=1}^{m-1} l_k \leq n < \sum_{k=1}^{m} l_k \tag{3.59}$$

Itt is ugyanazzal a két mennyiséggel jellemzem a k-adik leghosszabb rekord statisztikáit, mint az I. esetben: az élettartamának várható értékével, és annak a valószínűségével, hogy az utolsó rekord élettartama a második leghosszabb.

Jelölje $l_k^{II}(n)$ a k-adik leghosszabb rekord élettartamát n lépés alatt és $Q_k^{II}(n)$ annak a valószínűségét, hogy n lépés után az utolsó rekord élettartama a k-adik leghosszabb.

Először a második leghosszabb élettartamú rekord statisztikáit vizsgálom. Ez a mennyiség lehet az utolsó, még ismeretlen inetrvallum (τ_m) hossza, vagy valamely korábbi rekord ($\tau_1, \ldots, \tau_{m-1}$) élettartama. $l_2^{II}(n)$ eloszlásfüggvényét jelölje $F_2^{II}(t,n)$:

$$F_2^{II}(t,n) = \mathbf{P}(l_2^{II}(n) \leq t) = \mathbf{P}(l_1^{II}(n) \leq t) + \mathbf{P}(l_1^{II}(n) > t, l_2^{II}(n) \leq t) \tag{3.60}$$

Az eloszlásfüggvény felírható $F_2^{II}(t,n) = \sum_{m \geq 1} F_2^{II}(t,n,m)$ alakban, ahol

$$F_2^{II}(t,n,m) = \mathbf{P}(l_2^{II}(n) \leq t, R_n = m) \tag{3.61}$$

Az I. esethez hasonlóan $F_2^{II}(t,n,m)$ a következő mennyiségek összegeként áll elő:

$$\begin{aligned} F_2^{II}(t,n,m) = & \sum_{l_1=1}^{t} \sum_{l_2=1}^{t} \cdots \sum_{l_{m-1}=1}^{t} \sum_{l_m=0}^{t} \mathbf{P}^{II}(\bar{l},n,m) + \\ & + (m-1) \sum_{l_1=t+1}^{\infty} \sum_{l_2=1}^{t} \cdots \sum_{l_{m-1}=1}^{t} \sum_{l_m=0}^{t} \mathbf{P}^{II}(\bar{l},n,m) + \\ & + \sum_{l_1=1}^{t} \sum_{l_2=1}^{t} \cdots \sum_{l_{m-1}=1}^{t} \sum_{l_m=t+1}^{\infty} \mathbf{P}^{II}(\bar{l},n,m) \end{aligned} \tag{3.62}$$

Jelölje $F_2^{II}(t,n,m)$ generátorfüggvényét $\tilde{F}_2^{II}(t,m,z)$. Ekkor (3.10)-et behelyettesítve a következőt kapom:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_2^{II}(t,m,z) = & \sum_{n \geq 0} F_2^{II}(t,n,m) z^n = \\ = & \left(\sum_{j=1}^{t} f_j z^j \right)^{m-1} \sum_{j=1}^{t} f(j) \frac{1-z^j}{1-z} + \left(\sum_{j=1}^{t} f_j z^j \right)^{m-1} \sum_{j=t+1}^{\infty} f(j) \frac{1-z^j}{1-z} + \\ & + (m-1) \sum_{j=t+1}^{\infty} f(j) z^j \left(\sum_{j=1}^{t} f_j z^j \right)^{m-2} \sum_{j=1}^{t} f(j) \frac{1-z^j}{1-z} \end{aligned} \tag{3.63}$$

Az utolsó intervallum esetén a generátorfüggvényben $\sum_{j=1}^{t} f(j) \frac{1-z^j}{1-z}$ jelenik meg $\sum_{j=1}^{t} f(j) z^j$ helyett. Ennek az az oka, hogy (3.10) szerint $\sum_{k=1}^{m} l_k > n$, tehát a generátorfüggvényben $f(l_m)$ együtthatója $1, z, z^2, \ldots, z^{l_m-1}$ lehet attól függően, hogy mekkora $n - \sum_{k=1}^{m-1} l_k$ értéke.

Jelölje $F_2^{II}(t,n)$ generátorfüggvényét $\tilde{F}_2^{II}(t,z)$, ez csakúgy, mint I. esetben kifejezhető $\tilde{F}_2^{II}(t,m,z)$ segítségével:

$$\tilde{F}_2^{II}(t,z) = \sum_{n\geq 0} F_2^{II}(t,n) z^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 1} F_2^{II}(t,n,m) z^n = \sum_{m\geq 1} \tilde{F}_2^{II}(t,m,z) \tag{3.64}$$

Az I. esetben használt átalakításokat alkalmazva azt kapom, hogy:

$$\begin{aligned}\tilde{F}_2^{II}(t,z) &= \frac{1}{1-z}\left(\frac{\sum_{j=1}^{t} f(j)(1-z^j)}{1-\sum_{j=1}^{t} f(j)z^j}\right) + \frac{1}{1-z}\left(\frac{\sum_{j=t+1}^{\infty} f(j)(1-z^j)}{1-\sum_{j=1}^{t} f(j)z^j}\right) + \\ &+ \frac{1}{1-z}\left(\frac{\sum_{j=t+1}^{\infty} f(j)z^j \sum_{j=1}^{t} f(j)(1-z^j)}{\left(1-\sum_{j=1}^{t} f(j)z^j\right)^2}\right) = \\ &= \frac{1}{1-z}\left(\frac{\sum_{j=1}^{\infty} f(j)(1-z^j)}{1-\sum_{j=1}^{t} f(j)z^j} + \frac{\sum_{j=t+1}^{\infty} f(j)z^j \sum_{j=1}^{t} f(j)(1-z^j)}{\left(1-\sum_{j=1}^{t} f(j)z^j\right)^2}\right)\end{aligned} \tag{3.65}$$

A leghosszabb rekord esetén $\mathbf{E}(l_1^{II}(n))$ végtelen [4]; az utolsó rekord (τ_m) hossza tetszőlegesen nagy lehet, ezért nagy értékekre $l_1^{II}(n) = \tau_m$. Emiatt $\mathbf{E}(l_1^{II}(n))$ divergens. Azonban $\mathbf{E}(l_2^{II}(n))$ aszimptotikus viselkedését ugyanúgy jellemezhetjük, mint az I. esetben.

$F_2^{II}(t,n)$ segítségével kiszámítható a második leghosszabb rekord élettartamának várható értéke:

$$\mathbf{E}(l_2^{II}(n)) = \sum_{t\geq 0}\left(1 - F_2^{II}(t,n)\right) \tag{3.66}$$

$\mathbf{E}(l_2^{II}(n))$ generátorfüggvénye a következő:

$$\sum_{n\geq 0} \mathbf{E}(l_2^{II}(n)) z^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{t\geq 0}\left(1 - F_2^{II}(t,n)\right) z^n = \sum_{t\geq 0}\left(\frac{1}{1-z} - \tilde{F}_2^{II}(t,z)\right) \tag{3.67}$$

Felhasználva (3.65)-at:

$$\sum_{n\geq 0}\mathbf{E}(l_2^{II}(n))z^n=\sum_{t\geq 0}\frac{1}{1-z}\left(1-\frac{\sum_{j=1}^{\infty}f(j)(1-z^j)}{1-\sum_{j=1}^{t}f(j)z^j}-\right.$$
$$\left.-\frac{\sum_{j=t+1}^{\infty}f(j)z^j\sum_{j=1}^{t}f(j)(1-z^j)}{\left(1-\sum_{j=1}^{t}f(j)z^j\right)^2}\right)=$$
$$=\sum_{t\geq 0}\frac{1}{1-z}-\underbrace{\sum_{t\geq 0}\frac{1}{1-z}\left(1-\frac{\sum_{j=1}^{\infty}f(j)(1-z^j)}{1-\sum_{j=1}^{t}f(j)z^j}\right)}_{\textbf{(e)}}- \tag{3.68}$$
$$-\underbrace{\sum_{t\geq 0}\frac{1}{1-z}\left(\frac{\sum_{j=t+1}^{\infty}f(j)z^j\sum_{j=1}^{t}f(j)(1-z^j)}{\left(1-\sum_{j=1}^{t}f(j)z^j\right)^2}\right)}_{\textbf{(f)}}$$

Külön-külön kiszámítom **(e)**-t és **(f)**-et az I.esetben is használt módszerrel, a következő eredményt kapom:

$$\textbf{(e)}\approx\frac{1}{s^2}\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\int_0^{\infty}y^{-3/2}(1-e^{-y})dy}{x^{-1/2}e^{-x}+\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})}dx \tag{3.69}$$

$$\textbf{(f)}\approx\frac{1}{s^2}\frac{1}{4}\int_0^{\infty}\frac{\int_x^{\infty}y^{-3/2}e^{-y}dy\int_0^{x}y^{-3/2}(1-e^{-y})dy}{\left(x^{-1/2}e^{-x}+\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})\right)^2}dx \tag{3.70}$$

Tehát az következőt kapom $\mathbf{E}(l_2^{II}(n))$ generátorfüggvényére:

$$\sum_{n\geq 0}e^{-sn}\mathbf{E}(l_2^{II}(n))\approx\frac{1}{s^2}\int_0^{\infty}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\int_0^{\infty}y^{-3/2}(1-e^{-y})dy}{x^{-1/2}e^{-x}+\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}\frac{\int_x^{\infty}y^{-3/2}e^{-y}dy\int_0^{x}y^{-3/2}(1-e^{-y})dy}{\left(x^{-1/2}e^{-x}+\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})\right)^2}\right)dx=\frac{1}{s^2}0,29664\ldots \tag{3.71}$$

Ugyanúgy, mint az I. esetben ebből az következik, hogy

$$\frac{\mathbf{E}(l_2^{II}(n))}{n}\approx 0,29664\ldots \tag{3.72}$$

Most $Q^{II}(n)$ aszimptotikus viselkedését vizsgálom. Jelölje $Q_2^{II}(n,m)$ annak a valószínűségét, hogy n lépés alatt m rekord születik, és ezek közül az utolsó élettartama a második leghosszabb. Ebben az esetben $\tau_1,\ldots,\tau_{m-1}$ közül pontosan az egyik intervallum hossza nagyobb τ_m-nél, ezért ezt a valószínűséget a következőképpen fejezhetjük ki:

$$\begin{aligned} Q_2^{II}(n,m) &= \mathbf{P}(\tau_m = l_2^{II}(n), R_n = m) = \\ &= (m-1)\sum_{j\geq 1}\sum_{l_1=j+1}^{\infty}\sum_{l_2=1}^{j}\cdots\sum_{l_{m-1}=1}^{j}\mathbf{P}(\bar{l}^{II},n,m) \end{aligned} \tag{3.73}$$

$Q_2^{II}(n)$-t megkaphatjuk úgy, hogy az előbbi valószínűséget összegezzük minden lehetséges m-re: $Q_2^{II}(n) = \sum_{m\geq 0} Q_2^{II}(n,m)$. $Q_2^{II}(n)$ generátorfüggvényét jelölje $\tilde{Q}_2^{II}(z)$.

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_2^{II}(z) &= \sum_{n\geq 0} Q_2^{II}(n)z^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 1} Q_2^{II}(n,m)z^n = \\ &= \sum_{j\geq 1}\frac{1}{1-z}\left(\frac{f(j)(1-z^j)\sum_{k=j+1}^{\infty} f(k)z^k}{\left(1-\sum_{k=1}^{j} f(k)z^k\right)^2}\right) \end{aligned} \tag{3.74}$$

Hasonló módszerrel, mint I. esetben, azt kapom $Q_2^{II}(n)$ generátorfüggvényére, hogy

$$\tilde{Q}_2^{II}(e^{-s}) \approx \frac{1}{s}\frac{1}{4}\int_0^{\infty}\frac{x^{-3/2}(1-e^{-x})\int_x^{\infty} y^{-3/2}e^{-y}dy}{\left(x^{-1/2}e^{-x}+\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})\right)^2}dx = \frac{1}{s}0,0812482\ldots \tag{3.75}$$

Következésképpen

$$Q_2^{II}(n) \to Q_2^{II}(\infty) = 0,0812482\ldots \tag{3.76}$$

Ezután tetszőleges k-ra hasonló módon kiszámítom a k-adik leghosszabb élettartamú rekord statisztikáit.

Először $l_k^{II}(n)$-t vizsgálom, jelölje $F_k^{II}(t,n)$ az eloszlásfüggvényét. Ez az eloszlásfüggvény kifejezhető $F_{k-1}^{II}(t,n)$ segítségével, ugyanis $l_k^{II}(n) \leq t$ akkor áll fenn, ha már $l_{k-1}^{II}(n) \leq t$ is fennáll, vagy ha $l_{k-1}^{II}(n) > t$, de $l_k^{II}(n) \leq t$:

$$F_k^{II}(t,n) = \mathbf{P}(l_k^{II}(n) \leq t) = F_{k-1}^{II}(t,n) + \mathbf{P}(l_k^{II}(n) \leq t, l_{k-1}^{II}(n) > t) \tag{3.77}$$

Ezt az eloszlásfüggvényt felírhatjuk $F_k^{II}(t,n) = \sum_{m\geq 1} F_k^{II}(t,n,m)$ alakban, ahol

$$F_k^{II}(t,n,m) = \mathbf{P}(l_k^{II}(n) \leq t, R_n = m) \tag{3.78}$$

Hasonlóan $l_k^{II}(n)$ eloszlásfüggvényéhez, ezt a mennyiséget is fel lehet írni $F_{k-1}^{II}(t,n,m)$ segítségével:

$$F_k^{II}(t,n,m) = F_{k-1}^{II}(t,n,m) + \mathbf{P}(l_k^{II}(n) \leq t, l_{k-1}^{II}(n) > t, R_n = m) \tag{3.79}$$

Akkor, ha az első $(k-1)$ leghosszabb intervallum nagyobb, mint t két esetet különböztethetünk meg: ha az utolsó intervallum (τ_m) is ezek között van, illetve ha az első $(k-1)$ leghosszabb intervallum mind $\tau_1, \ldots, \tau_{m-1}$ közül kerül ki. Ez alapján $F_k^{II}(t,n,m)$ a következőképpen számítható ki:

$$\begin{aligned}
F_k^{II}(t,n,m) = {} & F_{k-1}^{II}(t,n,m) + \\
& + \binom{m-1}{k-1} \sum_{l_1=t+1}^{\infty} \cdots \sum_{l_{k-1}=t+1}^{\infty} \sum_{l_k=1}^{t} \cdots \sum_{l_{m-1}=1}^{t} \sum_{l_m=0}^{t} \mathbf{P}(\bar{l}^{II}, n, m) + \\
& + \binom{m-1}{k-2} \sum_{l_1=t+1}^{\infty} \cdots \sum_{l_{k-2}=t+1}^{\infty} \sum_{l_{k-1}=1}^{t} \cdots \sum_{l_{m-1}=1}^{t} \sum_{l_m=t+1}^{\infty} \mathbf{P}(\bar{l}^{II}, n, m)
\end{aligned} \tag{3.80}$$

Jelölje $F_k^{II}(t,n,m)$ generátorfüggvényét $\tilde{F}_k^{II}(t,m,z)$:

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_k^{II}(t,m,z) = {} & \sum_{n\geq 0} F_k^{II}(t,n,m) z^n = \tilde{F}_{k-1}^{II}(t,n,m) + \\
& + \binom{m-1}{k-1} \left(\sum_{j=1}^{t} f(j) z^j \right)^{m-k} \left(\sum_{j=t+1}^{\infty} f(j) z^j \right)^{k-1} \sum_{j=1}^{t} f(j) \frac{1-z^j}{1-z} + \\
& + \binom{m-1}{k-2} \left(\sum_{j=1}^{t} f(j) z^j \right)^{m-k+1} \left(\sum_{j=t+1}^{\infty} f(j) z^j \right)^{k-2} \sum_{j=t+1}^{\infty} f(j) \frac{1-z^j}{1-z}
\end{aligned} \tag{3.81}$$

$\tilde{F}_k^{II}(t,m,z)$ segítségével hasonlóan, mint I. esetben felírható $F_k^{II}(t,n)$ generátorfüggvénye is:

$$\tilde{F}_k^{II}(t,z) = \sum_{n\geq 0} F_k^{II}(t,n)z^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 1} F_k^{II}(t,n,m)z^n =$$
$$= \tilde{F}_{k-1}^{II}(t,n) + \frac{1}{1-z}\left(\frac{\left(\sum_{j=t+1}^{\infty} f(j)z^j\right)^{k-1}\sum_{j=1}^{t} f(j)(1-z^j)}{\left(1-\sum_{j=1}^{t} f(j)z^j\right)^k}\right)+$$
$$+\frac{1}{1-z}\left(\frac{\left(\sum_{j=t+1}^{\infty} f(j)z^j\right)^{k-2}\sum_{j=t+1}^{\infty} f(j)(1-z^j)}{\left(1-\sum_{j=1}^{t} f(j)z^j\right)^{k-1}}\right) \tag{3.82}$$

$F_k^{II}(t,n)$ segítségével kiszámítható a k-adik leghosszabb rekord élettartamának várható értéke:

$$\mathbf{E}(l_k^{II}(n)) = \sum_{t\geq 0}\left(1-F_k^{II}(t,n)\right) \tag{3.83}$$

$\mathbf{E}(l_k^{II}(n))$ generátorfüggvénye a következő:

$$\sum_{n\geq 0}\mathbf{E}(l_k^{II}(n))z^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{t\geq 0}\left(1-F_k^{II}(t,n)\right)z^n = \sum_{t\geq 0}\left(\frac{1}{1-z}-\tilde{F}_k^{II}(t,z)\right) \tag{3.84}$$

Felhasználva (3.82)-at:

$$\sum_{n\geq 0}\mathbf{E}(l_k^{II}(n))z^n = \underbrace{\sum_{t\geq 0}\left(\frac{1}{1-z}-\tilde{F}_{k-1}^{II}(t,n)\right)}_{\sum_{n\geq 0}\mathbf{E}(l_{k-1}^{II}(n))z^n}$$
$$\underbrace{-\sum_{t\geq 0}\left(\frac{1}{1-z}\frac{\sum_{j=t}^{\infty} f(j)(1-z^j)\left(\sum_{t+1}^{\infty} f(j)z^j\right)^{k-2}}{\left(1-\sum_{j=1}^{t} f(j)z^j\right)^{k-1}}\right)}_{\textbf{(g)}} - \tag{3.85}$$
$$\underbrace{-\sum_{t\geq 0}\left(\frac{1}{1-z}\frac{\sum_{j=1}^{t} f(j)(1-z^j)\left(\sum_{j=t+1}^{\infty} f(j)z^j\right)^{k-1}}{\left(1-\sum_{j=1}^{t} f(j)z^j\right)^{k}}\right)}_{\textbf{(h)}}$$

Külön-külön kiszámítom **(g)**-t és **(h)**-t a szokásos módszerrel, a következő eredményt kapom:

$$\mathbf{(g)} \approx \frac{1}{s^2}\frac{1}{2^{k-1}}\int_0^\infty \frac{\int_x^\infty y^{-3/2}(1-e^{-y})dy\left(\int_x^\infty y^{-3/2}e^{-y}dy\right)^{k-2}}{x^{-1/2}e^{-x}+\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})}dx \tag{3.86}$$

$$\mathbf{(h)} \approx \frac{1}{s^2}\frac{1}{2^k}\int_0^\infty \frac{\int_0^\infty y^{-3/2}(1-e^{-y})dy\left(\int_x^\infty y^{-3/2}e^{-y}dy\right)^{k-1}}{\left(x^{-1/2}e^{-x}+\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})\right)^k}dx \tag{3.87}$$

Tehát az következőt kapom $\mathbf{E}(l_k^{II}(n))$ generátorfüggvényére:

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} e^{-sn}\mathbf{E}(l_k^{II}(n)) \approx \sum_{n\geq 0} e^{-sn}\mathbf{E}(l_{k-1}^{II}(n)) - \\ -\frac{1}{s^2}\int_0^\infty\left(\frac{1}{2^{k-1}}\frac{\int_x^\infty y^{-3/2}(1-e^{-y})dy\left(\int_x^\infty y^{-3/2}e^{-y}dy\right)^{k-2}}{x^{-1/2}e^{-x}+\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})} - \right. \\ \left. -\frac{1}{2^k}\frac{\int_0^\infty y^{-3/2}(1-e^{-y})dy\left(\int_x^\infty y^{-3/2}e^{-y}dy\right)^{k-1}}{\left(x^{-1/2}e^{-x}+\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})\right)^k}\right)dx\end{aligned} \tag{3.88}$$

$k=2$ esetén azt kaptam, hogy $\sum_{n\geq 0}\mathbf{E}(l_2^{II}(n))e^{sn} \approx \frac{1}{s^2}0,29664\ldots$, ezt az eredményt felhasználva kiszámítható $k=3$-ra az aszimptotika, majd ezzel $k=4$-re, és így tovább. Minden esetben azt kapjuk, hogy $\sum_{n\geq 0}\mathbf{E}(l_k^{II}(n))e^{sn} \approx \frac{1}{s^2}C_k^{II}$, ahol C_k^{II} egy k-tól függő konstans. C_k^{II} értékeit $2 \leq k \leq 6$-ra a 3.5 táblázat tartalmazza. Ezek a konstansok korábban még nem jelentek meg az irodalomban. Ugyanúgy, mint $k=2$ esetén ebből és $\frac{l_k^{II}(n)}{n}$ konvergenciájából az következik, hogy

$$\frac{\mathbf{E}(l_k^{II}(n))}{n} \approx C_k^{II} \tag{3.89}$$

Tehát a II. esetben $\mathbf{E}(l_k^{II}(n))$-ről a következő tétel mondható ki:

8. Tétel. *Tetszőleges $k>1$ egész számra $\boldsymbol{E}(l_k^{II}(n))$ generátorfüggvényére fennáll $\sum_{n\geq 0}\boldsymbol{E}(l_k^{II}(n))e^{sn} \approx \frac{1}{s^2}C_k^{II}$ amint $s\to 0$, ahol*

$$C_2^{II} = \int_0^\infty\left(1-\frac{1}{2}\frac{\int_0^\infty y^{-3/2}(1-e^{-y})dy}{x^{-1/2}e^{-x}+\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})} - \right.$$

k	C_k^{II}
2	$0,29664\dots$
3	$0,180855\dots$
4	$0,14805\dots$
5	$0,133905\dots$
6	$0,12645\dots$

3.5. táblázat. C_k^{II} értékei különböző k-kra

$$-\frac{1}{4}\frac{\int_x^\infty y^{-3/2}e^{-y}dy\int_0^x y^{-3/2}(1-e^{-y})dy}{\left(x^{-1/2}e^{-x}+\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})\right)^2}\Bigg)dx$$

$$C_k^{II}=C_{k-1}^{II}-\int_0^\infty\left(\frac{1}{2^{k-1}}\frac{\int_x^\infty y^{-3/2}(1-e^{-y})dy\left(\int_x^\infty y^{-3/2}e^{-y}dy\right)^{k-2}}{x^{-1/2}e^{-x}+\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2^k}\frac{\int_0^\infty y^{-3/2}(1-e^{-y})dy\left(\int_x^\infty y^{-3/2}e^{-y}dy\right)^{k-1}}{\left(x^{-1/2}e^{-x}+\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})\right)^k}\right)dx$$

Következésképpen

$$\frac{\boldsymbol{E}(l_k^{II}(n))}{n}\approx C_k^{II}$$

Ezután ebben az esetben is megvizsgálom $Q_k^{II}(n)$ aszimptotikus viselkedését. Jelölje annak a valószínűségét, hogy n lépés alatt m rekord születik, és ezek közül az utolsó élettartama a k-adik leghosszabb $Q_k^{II}(n,m)$. Ebben az esetben $\tau_1,\dots,\tau_{m-1}$ közül pontosan $(k-1)$ intervallum hossza nagyobb τ_m-nél, ezért ez a valószínűség a következőképpen fejezhető ki:

$$\begin{aligned}Q_k^{II}(n,m)&=\mathbf{P}(\tau_m=l_k^{II}(n),R_n=m)=\\&=\binom{m-1}{k-1}\sum_{j\geq 1}\sum_{l_1=j+1}^{\infty}\dots\sum_{l_{k-1}=j+1}^{\infty}\sum_{l_k=1}^{j}\dots\sum_{l_{m-1}=1}^{j}\mathbf{P}(\bar{l}^{II},n,m)\end{aligned}\qquad(3.90)$$

$Q_k^{II}(n)$-et úgy kaphatjuk meg, ha ezt a mennyiséget összegezzük minden m-re: $Q_k^{II}(n) = \sum_{m\geq 0} Q_k^{II}(n,m)$. $Q_k^{II}(n)$ viselkedését is a generátorfüggvénye segítségével vizsgálom:

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_k^{II}(z) &= \sum_{n\geq 0} Q_k^{II}(n) z^n = \sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 1} Q_k^{II}(n,m) z^n = \\ &= \sum_{m\geq 1}\sum_{j\geq 0} f(j)\frac{1-z^j}{1-z}\binom{m-1}{k-1}\left(\sum_{l=1}^{j} f(l)z^l\right)^{m-k}\left(\sum_{l=j+1}^{\infty} f(l)z^l\right)^{k-1}\end{aligned} \tag{3.91}$$

Hasonlóan, mint az I. esetben a következőt kapom:

$$\tilde{Q}_k(z) = \sum_{j\geq 0}\frac{1}{1-z}\left(\frac{f(j)(1-z^j)\left(\sum_{l=j+1}^{\infty} f(l)z^l\right)^{k-1}}{\left(1-\sum_{l=1}^{j} f(l)z^l\right)^k}\right) \tag{3.92}$$

Ismét a szokásos átalakításokat használva $\tilde{Q}_k^{II}(z)$ aszimptotikus viselkedése az alábbi:

$$\tilde{Q}_k^{II}(z) \approx \frac{1}{s}\frac{1}{2^k}\int_0^{\infty}\frac{x^{-3/2}(1-e^{-x})\left(\int_x^{\infty}\frac{e^{-y}}{y^{3/2}}dy\right)^{k-1}}{\left(\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}+\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})\right)^k}dx \tag{3.93}$$

ahol

$$Q_k^{II}(\infty) = \frac{1}{2^k}\int_0^{\infty}\frac{x^{-3/2}(1-e^{-x})\left(\int_x^{\infty}\frac{e^{-y}}{y^{3/2}}dy\right)^{k-1}}{\left(\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}+\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})\right)^k}dx \tag{3.94}$$

egy k-tól függő konstans, melynek értékeit $2 \leq k \leq 6$-ra a 3.6 táblázat tartalmazza. Tehát csakúgy, mint $k = 2$ esetén, azt kapjuk, hogy

$$Q_k^{II}(n) \to Q_k^{II}(\infty) \tag{3.95}$$

Tehát a II. esetben $Q_k^I(n)$-ről a következő tétel mondható ki:

k	$Q_k^{II}(\infty)$
2	$0,0812482\ldots$
3	$0,0334197\ldots$
4	$0,0184591\ldots$
5	$0,0117759\ldots$
6	$0,00819089\ldots$

3.6. táblázat. $Q_k^{II}(\infty)$ értékei különböző k-kra

9. Tétel. *Tetszőleges $k > 1$ egész szám esetén $Q_k^{II}(n)$ generátorfüggvényére fennáll $\sum_{n\geq 0} Q_k^{II}(n)e^{-sn} \approx \frac{1}{s}Q_k^{II}(\infty)$, amint $s \to 0$, ahol*

$$Q_k^{II}(\infty) = \frac{1}{2^k}\int_0^\infty \frac{x^{-3/2}(1-e^{-x})\left(\int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y^{3/2}}dy\right)^{k-1}}{\left(\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} + \sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})\right)^k}dx$$

Következésképpen

$$Q_k^{II}(n) \to Q_k^{II}(\infty)$$

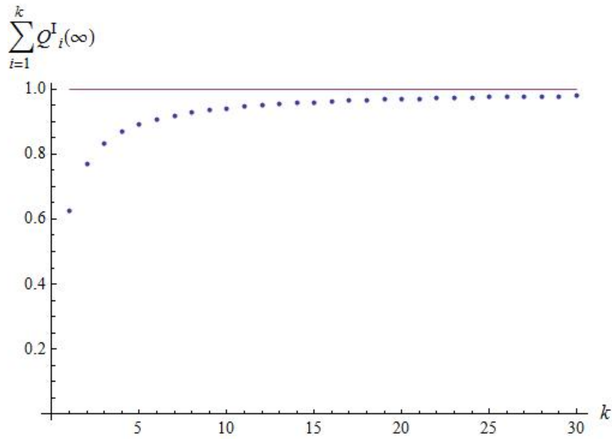
Mivel minden $k \geq 1$-re ismerjük $Q_k^{II}(n)$ aszimptotikus viselkedését, megvizsgálható, hogy ez egy valószínűségi eloszláshoz tart-e (3.3 ábra). Ha összegezük minden k-ra $Q_k^{II}(\infty)$-t, akkor a következőt kapjuk:

$$\sum_{k=1}^{\infty} Q_k^{II}(\infty) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\int_0^\infty \frac{x^{-3/2}(1-e^{-x})\left(\int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y^{3/2}}dy\right)^{k-1}}{\left(\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} + \sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})\right)^k}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{-3/2}(1-e^{-x})}{\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} + \sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})}\left(\frac{\int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y^{3/2}}dy}{2\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{\pi}erf(\sqrt{x})}\right)^{k-1} dx \tag{3.96}$$

A geometriai sor összegképletét és (3.57)-et alaklmazva:

$$\sum_{k=1}^{\infty} Q_k^{II}(\infty) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{-3/2}(1-e^{-x})}{\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} + \sqrt{\pi} erf(\sqrt{x})} \left(\frac{2e^{-x}x^{-1/2} + 2\sqrt{\pi} erf(\sqrt{x}))}{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \right) dx =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\infty} x^{-3/2}(1-e^{-x})dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} 2\sqrt{\pi} = 1 \tag{3.97}$$

Az utolsó előtti egyenlőség parciális integrálással kapható meg.



3.3. ábra. $\sum_{i=1}^{k} Q_i^{II}(n)$ konvergál egyhez

Tehát $Q_k^{II}(\infty)$ $(1 \leq k)$ valószínűségi eloszlást határoz meg.

4. fejezet

Összefoglalás

A dolgozatban [4] eredményeit terjesztem ki $k > 1$ esetre. Véletlen bolyongások rekord statisztikáit vizsgáltam tetszőleges szimmetrikus és folytonos lépéseloszlás esetén. A rekordok élettartamát jellemeztem n lépés után. Az utolsó rekord élettartamát kétféleképpen definiáltam ($\alpha = I, II$): az éppen aktuális élettartama (A_n), illetve a még ismeretlen, valós élettartama (τ_m). Az első és második eset más-más eredményre vezet, azaz a rekordok statisztikái igen érzékenyek az utolsó rekord megválasztására.

A k-adik ($k > 1$) leghosszabb rekord statisztikáit két mennyiség segítségével jellemeztem: n lépés után a k-adik leghosszabb rekord várható értéke ($\mathbf{E}^{\alpha}(l_k(n))$), illetve annak a valószínűsége, hogy n lépés után az utolsó rekord a k-adik leghosszabb ($Q_k^{\alpha}(n)$). Az utóbbi mennyiség megegyezik annak a valószínűségével, hogy a k-adik leghosszabb rekord az n-edik lépésben dől meg.

Az első esetben $\mathbf{E}^I(l_k(n))$ és $Q_k^I(n)$ generátorfüggvényeinek segítségével meg tudtam határozni az aszimpotikus viselkedésüket. Megmutattam, hogy az értékük független a bolyongás lépéseloszlásától, minden k-ra egy univerzális konstans segítségével jellemezhetők:

$$\frac{\mathbf{E}^I(l_k(n))}{n} \approx Q_k^I(\infty) \tag{4.1}$$

$$Q_k^I(n) \to Q_k^I(\infty) \tag{4.2}$$

$Q_k^I(\infty)$-t explicit módon kifejeztem minden k-ra. Az így kapott konstansok már előfordultak [2]-ben, ott azonban csak a standard Brown-mozgás esetét vizsgálták, míg én egy másik esetre, tetszőleges szimmetrikus lépéseloszlású bolyongásra láttam be érvényességüket.

Megmutattam továbbá, hogy csakúgy, mint $k = 1$ esetben, a két mennyiség generátorfüggvénye tetszőleges k esetén egymásból kifejezhető, illetve fennáll köztük a következő összefüggés:

$$\mathbf{E}^I(l_k(n+1)) = \mathbf{E}^I(l_k(n)) + Q_k^I(n) \tag{4.3}$$

A második esetben $Q_k^{II}(n)$ vizsgálata során szintén azt kaptam, hogy viselkedése független a lépéseloszlástól, minden k-ra egy univerzális konstanssal jellemezhető:

$$Q_k^{II}(n) \to Q_k^{II}(\infty) \tag{4.4}$$

$Q_k^{II}(\infty)$-t explicit módon is kifejeztem tetszőleges k-ra. Ezek a konstansok szintén megjelentek [2]-ben egy a mostanitól eltérő esetben; illetve [7]-ben, itt azonban egy sokkal egyszerűbb módon számítom ki őket.

Ebben az esetben $\mathbf{E}^{II}(l_k(n+1))$ aszimptotikus viselkedésének vizsgálatakor is egy univerzális konstanst kapok:

$$\frac{\mathbf{E}^{II}(l_k(n))}{n} \approx C_k^{II} \tag{4.5}$$

C_k^{II} egy olyan sorozatot definiál, amit még nem láttunk az irodalomban. Értékét minden k-ra explicit módon kifejeztem.

Összehasonlítva az eredményeket [4] leghosszabb rekordra kapott eredményeivel azt vehetjük észre, hogy mindkét estben n lépés után sokkal nagyobb valószínűséggel lesz az utolsó intervallum a leghosszabb, mint a k-adik leghosszabb ($k > 1$).

Ezenfelül mindkét esetben beláttam, hogy $Q_k^{\alpha}(\infty)$ egy valószínűségi eloszlást definiál.

5. fejezet

Függelék

***f(k)* generátorfüggvénye.**

Egy szimmetrikus véletlen bolyongás során $f(k)$ annak a valószínűsége, hogy a bolyongás a k-adik és $(k-1)$-edik lépés között lépi át a kezdeti szintet. Legyen $f(k)$ generátorfüggvénye $\tilde{f}(k)$. Ekkor a következő mondható $\tilde{f}(k)$-ról [1]:

10. Tétel.

$$\log \frac{1}{1-\tilde{f}(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} \boldsymbol{P}(x_n \geq 0)$$

Bizonyítás. Tetszőleges n-re tekintsük az első n lépés összes lehetséges ciklikus permutációját. Ezek a következő alakúak:

$$(\eta_\nu, \eta_{\nu+1}, \ldots, \eta_n, \eta_1, \ldots, \eta_{\nu-1})$$

Összesen n ilyen permutáció van, és egy adott permutációt azonosíthatunk az első lépésének indexével ν. Egy ν permutációhoz tartozó bolyongás értékeit jelölje $(x_0^{(\nu)}, x_1^{(\nu)}, \ldots, x_n^{(\nu)})$.

Vegyünk egy k egész számot ($k \leq n$), és minden permutáció esetén definiáljuk az $Y^{(\nu)}$ valószínűségi változót a következőképpen: $Y^{(\nu)} = 1$, ha n a k-adik rekord indexe $(x_0^{(\nu)}, x_1^{(\nu)}, \ldots, x_n^{(\nu)})$-ben, különben $Y^{(\nu)} = 0$.

$\nu = 1$ az eredeti bolyongást definiálja, így $\mathbf{P}(Y^{(1)} = 1) = f_n^{(k)}$, ahol $f_n^{(k)}$ a k-adik rekord idő eloszlása. $f_n^{(k)}$ k darab független rekord idő összege, ezért $f_n^{(k)}$ lesz $\tilde{f}(s)^k$-ban s^n együtthatója.

$Y^{(\nu)}$-k azonos eloszlású valószínűségi változók, és csak 0 illetve 1 értéket vehetnek fel, ezért:

$$f_n^{(k)} = \mathbf{E}(Y^{(1)}) = \frac{1}{n}\mathbf{E}(Y^1 + \cdots + Y^n)$$

Könnyen belátható, hogy $Y^1 + \cdots + Y^n$ csak a 0 vagy k értéket veheti fel, emiatt

$$f_n^{(k)} = \frac{k}{n}\mathbf{P}(Y^1 + \cdots + Y^n = k)$$

Rögzített n-re és $k = 0, 1, 2, \dots$-ra $\{Y^1 + \cdots + Y^n = k\}$ események kölcsönösen kizáróak, uniójuk pedig az $\{x_n > 0\}$ esemény. Összegezve k-ra tehát azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{r} f_n^{(k)} = \frac{1}{n}\mathbf{P}(x_n > 0)$$

Beszorozva s_n-nel, és összegezve n-re:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\tilde{f}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n}\mathbf{P}(x_n > 0)$$

Az egyenlet bal oldala megegyezik $\log \frac{1}{1-\tilde{f}(s)}$-el, így megkaptuk a tételben szereplő állítást.

□

Binomiális sor.

Tetszőleges ν valós szám esetén x binomiális sora a következő:

$$(x+a)^{\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\nu}{k} x^k a^{\nu-k} \tag{5.1}$$

ahol

$$\binom{\nu}{k} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu-k+1)}$$

Negatív kitevő és $a = 1$ esetén azt kapjuk, hogy

$$(x+1)^{-\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\nu}{k} x^k \tag{5.2}$$

Ennek egy speciális esete a következő:

$$(1-x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{1/2}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^n \tag{5.3}$$

Ez a sor $|x| < 1$ esetén konvergál.

A k-adik leghosszabb élettartam konvergenciája.

Az I. esetben $l_k^I(n)$ jelöli a k-adik leghosszabb rekord élettartamát n lépés után.

6. Állítás. *$\sum_{j=1}^k l_j^I(n)$ szubadditív.*

Bizonyítás. $k = 1$ esetén: Ha a leghosszabb intervallum $n+m$ lépés alatt teljes egészében az első n lépésben található, akkor $l_1^I(n+m) = l_1^I(n)$ áll fenn. Ha az utolsó m lépés során következik be, akkor $l_1^I(n+m) = l_1^I(m)$ igaz. Ha ez az intervallum köztes pontjaként tartalmazza n-et, akkor egy része az első n lépésbe esik, ez a rész nyilván $\leq l_1^I(n)$, a másik része pedig az utolsó m lépésbe esik, melyre szintén igaz, hogy $\leq l_1^I(m)$. Tehát ez esetben $l_1^I(n+m) \leq l_1^I(n) + l_1^I(m)$. Azaz minden esetben fennáll

$$l_1^I(n+m) \leq l_1^I(n) + l_1^I(m)$$

Tetszőleges $k > 1$-re: Ha az első k leghosszabb intervallum mindegyike teljes egészében az első n lépésbe esik, akkor $\sum_{j=1}^k l_j^I(n+m) = \sum_{j=1}^k l_j^I(n)$. Ha mind az utolsó m lépésbe esik, akkor $\sum_{j=1}^k l_j^I(n+m) = \sum_{j=1}^k l_j^I(m)$. Ha az első k leghosszabb intervallum vegyesen található az első n és utolsó m lépésben is, akkor azok az intervallumok, amik teljes egészében az első n lépésbe esnek nyilván n-ig is az első k leghosszabb intervallumba tartoznak, így belekerülnek $\sum_{j=1}^k l_j^I(n)$

összegbe. Ha van olyan intervallum, ami köztes pontként tartalmazza n-et, akkor az az első n lépés során nem biztos, hogy bekerül a k leghosszabb intervallum közé, helyette nagyobb intervallum kerülhet be. Így $\sum_{j=1}^{k} l_j^I(n)$ tartalmazza azokat az intervallumokat a k leghosszabb közül, amik teljes egészében k-ba esnek, az n-et tratalmazó részintervallumnál egy nagyobb vagy egyenlő intervallumot, illetve további intervallumokat, amik az első n lépés alatt beletartoznak a k legnagyobba. Tehát $\sum_{j=1}^{k} l_j^I(n)$ mindenképp nagyobb vagy egyenlő lesz az $n+m$ lépés alatti k leghosszabb intervallum első n lépésbe eső részénél. Hasonló gondolatmenettel ugyanez igaz az utolsó m lépésre is. Tehát ez esetben $\sum_{j=1}^{k} l_j^I(n+m) \leq \sum_{j=1}^{k} l_j^I(n) + \sum_{j=1}^{k} l_j^I(m)$. Azaz minden esetben igaz, hogy

$$\sum_{j=1}^{k} l_j^I(n+m) \leq \sum_{j=1}^{k} l_j^I(n) + \sum_{j=1}^{k} l_j^I(m)$$

$\square$

A várható érték monotonitása és linearitása miatt $\sum_{j=1}^{k} l_j^I(n)$ szubadditivitásából következik $\sum_{j=1}^{k} \mathbf{E}(l_j^I(n))$ szubadditivitása.

$\frac{\mathbf{E}(l_k^I(n))}{n}$ konvergenciájához a következő állításra van szükség:

7. Állítás. *Ha a_n sorozat szubadditív, akkor $\frac{a_n}{n}$ konvergens.*

Bizonyítás. Rögzítsünk egy m egész számot úgy, hogy $m << n$. Ekkor létezik q és r egész szám ($r < m$), hogy $n = mq + r$. a_n szubadditivitása miatt ekkor

$$a_n \leq q a_m + a_r$$

Leosztva n-nel az egyenletet:

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{q a_m}{n} + \frac{a_r}{n} = \frac{mq}{n}\frac{a_m}{m} + \frac{a_r}{n}$$

$n = mq + r$ ($r < m$) miatt $\frac{mq}{n} \to 1$, $\frac{a_r}{n} \leq \frac{\max\{a_1,\ldots,a_{m-1}\}}{n} \to 0$, tehát

$$\frac{mq}{n}\frac{a_m}{m} + \frac{a_r}{n} \to \frac{a_m}{m}$$

Azaz

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{a_m}{m}$$

Tehát $\frac{a_n}{n}$ konvergens. $\square$

Az előző két állításból következik tehát, hogy $\frac{\sum_{j=1}^{k} \mathbf{E}(l_j^I(n))}{n}$ konvergens minden k-ra. Mivel $\frac{\mathbf{E}(l_1^I(n))}{n}$ és $\frac{\mathbf{E}(l_1^I(n))+\mathbf{E}(l_2^I(n))}{n}$ is konvergens, ezért $\frac{\mathbf{E}(l_2^I(n))}{n}$ is konvergens, ... stb. Így minden k-ra belátható, hogy $\frac{\mathbf{E}(l_k^I(n))}{n}$ konvergens.

Irodalomjegyzék

[1] W. Feller, „An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 2” *Wiley, 2. edition* (1971)

[2] S. Finch, „Excursion durations”
http://www.people.fas.harvard.edu/∼sfinch/csolve/pd1.pdf (2008)

[3] R. García-García, A. Rosso, G. Schehr, „The longest excursion of fractional Brownian motion: numerical evidence of the non-Markovian effects” *Phys. Rev.* E 81, 010102(R) (2010)

[4] S. N. Majumdar, R. M. Zift, „Universal record statistics of random walks and Lévy flights”, *Physical Review Letters* 101, 050601 (2008)

[5] C. Godréche, S. N. Majumdar, G. Schehr, „The longest excursion of stochastic processes in nonequilibrium systems”, *Phys. Rev. Lett.* 102, 240602 (2009)

[6] C. Godréche, S. N. Majumdar, G. Schehr, „Universal statistics of longest lasting records of random walks and Lévy flights”, *J. Phys. A: Math. Theor.* 47, 255001 (2014)

[7] C. L. Scheffer, „The rank of the present excursion” *Stochastic Processes and their Applications* 55, 101-118 (1995)