



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
MATEMATIKA INTÉZET

KISS CSABA

A VILÁGON ÉLŐ LEGIDŐSEBB EMBER
ÉLETKORÁNAK MODELLEZÉSE

TDK DOLGOZAT

témavezető: Dr. Vető Bálint

2022

Tartalomjegyzék

1. Számítások általános élettartam eloszlással	4
1.1. A világon élő legidősebb ember életkorának Markov-folyamata . . .	4
1.2. Y_t stacionárius eloszlása	7
1.3. Hátralévő élettartam	10
1.4. Beágyazott Markov-lánc	12
2. Élettartameloszlás [4] cikkből	17
3. Határeloszlás tételek	23
4. A modell összehasonlítása a valós adatokkal	27
5. Inhomogén folyamat	30
6. Összefoglalás	32

Bevezetés

A dolgozatom célja, hogy egy matematikai modellt adjak a világ legidősebb emberének életkorára. Ehhez emberi születési és halálozási folyamat egyszerűsített modelljét tekintjük. Modellünkben az emberek egy λ paraméterű homogén Poisson-folyamat szerint születnek, élettartamuk eloszlása pedig fae., $F(x)$, $f(x)$ eloszlás és sűrűségfüggvényel. Legyenek X_1, X_2, X_3, \dots fae valószínűségi változók, amelyek eloszlása $F(x)$ szerinti, és legyen Y_t a világ legidősebb emberének életkora t időpontban. Fő célunk Y_t változásainak és hosszú távú viselkedésének vizsgálata. Legyen továbbá $N(t)$ az aktuális rekorder indexe t időpontban.

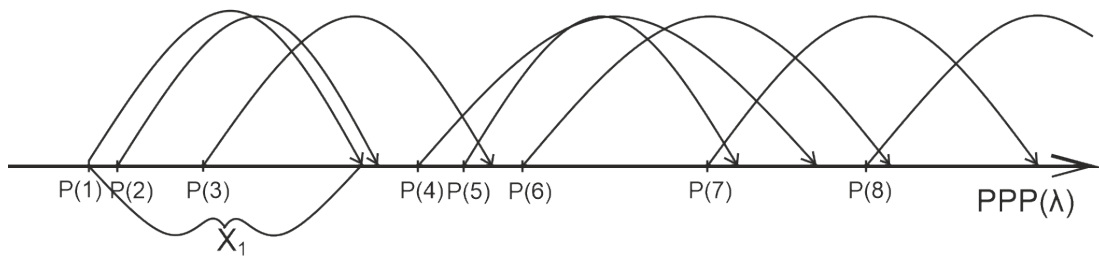
Az első részben belátjuk, hogy Y_t egy Markov-folyamat, és meghatározzuk ennek a Markov-folyamatnak az átmeneteit, valamint bevezetjük a folyamat két-dimenziós ábrázolását, majd kiszámítjuk a folyamat stacionárius eloszlását, és a stacionárius eloszlás segítségével meghatározzuk a rekordtartó hátralévő élettartamának várható értékét, azon ráta átlagát, amely a rekorder indentitásának változását adja meg, és a rekorderként való regnálás időtartamának várható értékét. Bevezetünk továbbá egy diszkrét idejű Markov-láncot, amely minden rekorder esetében a rekorder teljes élettartamának értékét veszi fel.

A második részben bevezetünk egy reális élettartam-eloszlást a [4] cikkből, amely egy véges intervallumon van szupportálva. Erre az eloszlásra kiszámítjuk a fent említett tulajdonságokat és értékeket, hogy összehasonlíthassuk modellünket a valós adatokkal. Azt is megvizsgáljuk, hogy a rekordtartó személyazonossága átlagosan milyen ütemben változik, ahogy a λ a végtelenbe tart.

A harmadik részben határeloszlás tételeket fogalmazunk meg és látunk be a folyamat stacionárius eloszlására, ahogy $\lambda \rightarrow \infty$.

A negyedik részben a valós életfolyamat némi megértése után összehasonlítjuk a modellt a korábban említett élettartam-eloszlással a történelmi adatok egy részével.

Az ötödik részben inhomogénre módosítjuk a folyamat alapját képező Poisson-folyamatot, hogy összehasonlíthassuk az így kapott modellünket a teljes valódi adathalmazzal.



1. ábra. A folyamat vizualizációja

Köszönetnyilvánítás

Hálás vagyok témavezetőmnek, Dr. Vető Bálintnak, amiért bevezetett ebbe a témába, a Markov-láncok és folyamatok érdekes elméletébe, valamint azért, hogy mindig szakított időt a velem való konzultációra, és mindenben segített a dolgozat megírásában.

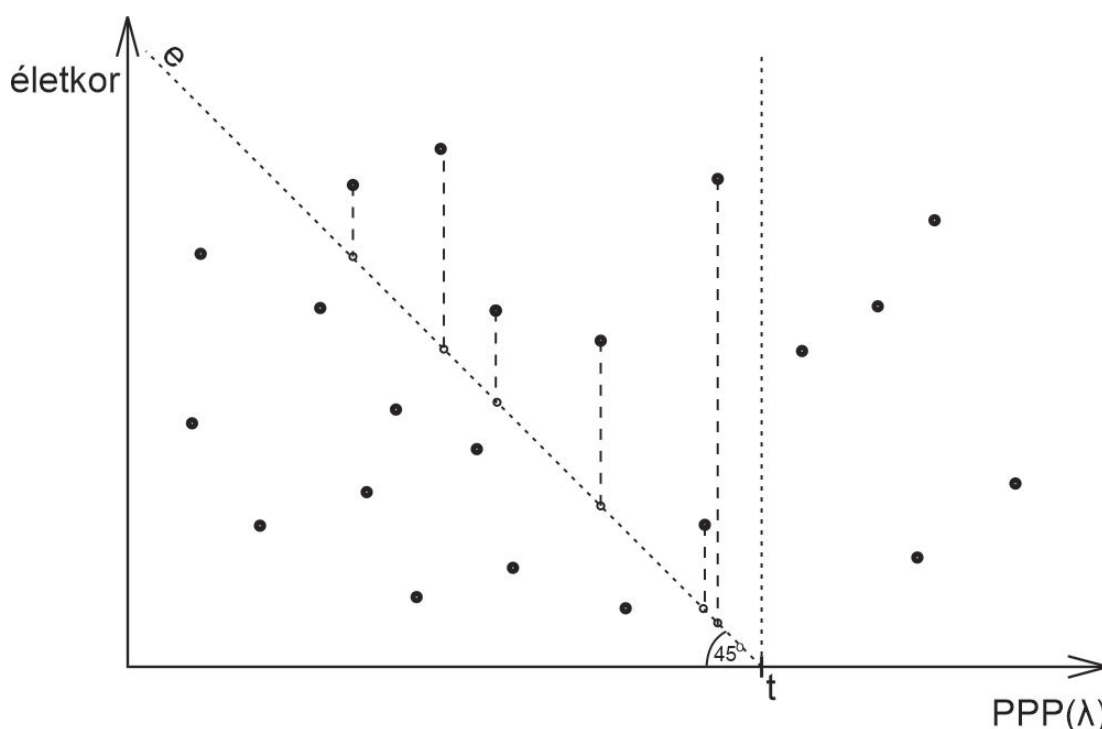
1. Számítások általános élettartam eloszlással

1.1. A világon élő legidősebb ember életkorának Markov-folyamata

Először is bevezetjük a folyamat 2 dimenziós reprezentációját:

Minden pont egy embert fog ábrázolni, az első koordináta a születési idejét, a második koordináta a halálkori életkorát.

Tehát az i -edik személy koordinátái (x_i, y_i) lesznek. Az x_i -ek $PPP(\lambda)$ -t alkotnak, az y_i -ek pedig fae -ak, amelyek eloszlása $F(x)$ szerinti. Ez látható a 2 ábrán.



2. ábra. 2 dimenziós reprezentációja a folyamatnak

Ez az ábrázolás tartalmazza a folyamat összes információját, így bármely t időpontban meghatározható belőle Y_t értéke. A $(t, 0)$ pontból két félegyeneset húzunk, egy -1 meredekségűt (ezt e -vel jelöljük) és egy függőlegest. Ez látható a 2 ábrán. A két félegyenes közötti pontok azok az emberek, akik t időpontban még életben vannak. Ahhoz, hogy meghatározzuk közülük a legidősebb életkorát, minden egyes ilyen pontot függőlegesen levetítünk e -re. Ekkor a vetített pontok második koordinátája mutatja az adott személy életkorát t időpontban, tehát csak azt a pontot kell kiválasztanunk közülük, amelynek a legnagyobb a második koordinátája, és ennek értéke egyenlő lesz Y_t értékével.

1.1. Állítás. Y_t Markov-folyamat.

Bizonyítás. Ez a következő két tulajdonságból következik. Először is, ha egy rekordtartó él, akkor a halálozási rátája nem függ a múlttól. Másodszor, ha egy rekordtartó meghal, akkor az új rekordtartó ő utána született, tehát az átmenet független az éppen meghalt rekordtartó születési ideje előtt bekövetkezett eseményektől. \square

Intuitív, hogy Y_t lineárisan növekszik, amíg az aktuális legidősebb személy meg nem hal, majd leugrik. Mivel Y_t egy Markov-folyamat, megadhatjuk az átmeneteit. A 1.2 lemmában megadjuk azt a rátát, amellyel a legidősebb személy meghal, a 1.3 tételben pedig megadjuk az új rekorder életkorának eloszlását abban a pillanatban, amikor rekorderré válik.

1.2. Lemma. *A legidősebb ember a következő rátával hal meg:*

$$\frac{f(x)}{1 - F(x)}. \quad (1)$$

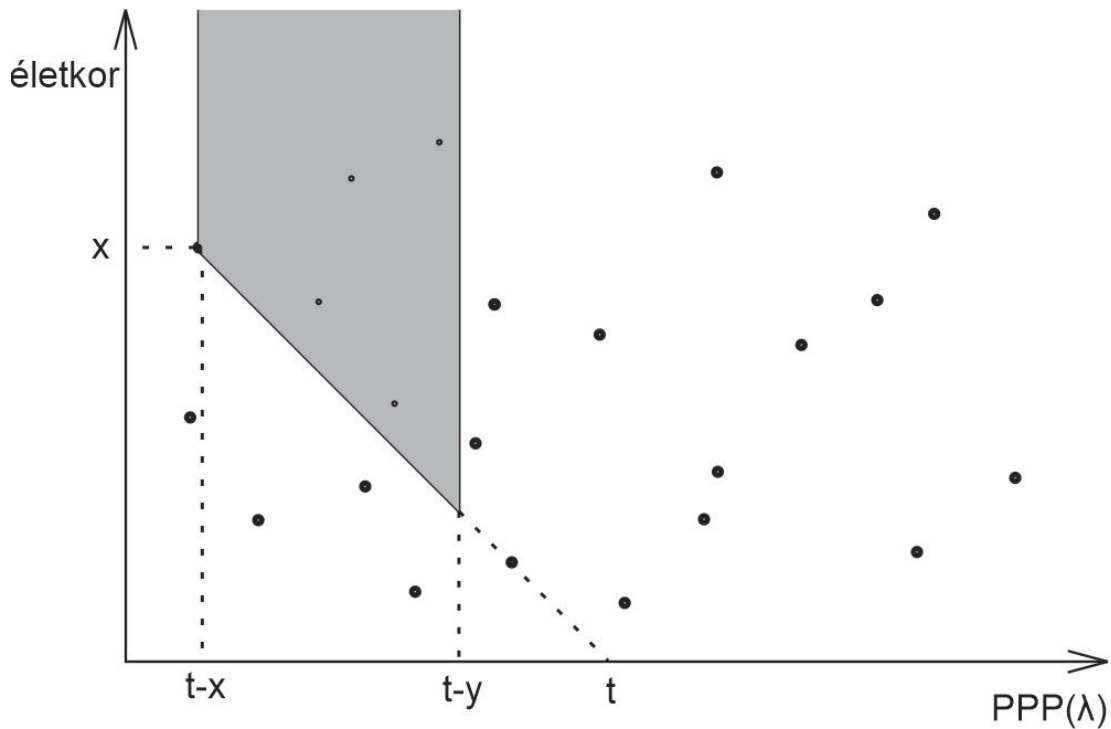
Bizonyítás. Ha $Y_t = x$, akkor $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(X_t \in (x, x+h) | X_{N(t)} > x)}{h} = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$ \square

1.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy $y < x$.*

$$\mathbb{P}(\text{az új rekordtartó életkora} < y | \text{az előző rekordtartó } x \text{ évesen halt meg}) = (2)$$

$$= \exp\left(-\lambda \int_y^x (1 - F(u)) du\right) \quad (3)$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy egy $PPP(\lambda)$ -ban az (a, b) determinisztikus intervallumban lévő pontok száma $\lambda(b - a)$ paraméterű Poisson-eloszlású. Tegyük fel, hogy a jelenlegi rekorder t időpontban halt meg, tehát $t - x$ időpontban született. Nem számít, hogy mi történt a jelenlegi rekorder születése előtt, és azt is tudjuk, hogy aki $(t - y)$ időpont után született, az nem lehet y -nál idősebb t időpontban, tehát csak a $(t - x, t - y)$ intervallumot kell figyelembe vennünk. Ezt az intervallumot paraméterezzük $u \in (0, x - y)$ paraméterrel. Ahhoz, hogy az új rekordtartó életkora kisebb legyen y -nál, szükséges, hogy bárki, aki a $(t - x, t - y)$ intervallumban született, ne legyen életben t időpontban. Ekkor minden $u \in (0, x - y)$ esetén, ha valaki $t - x + u$ időpontban született, annak valószínűsége, hogy t időpontban életben van, $1 - F(x - u)$. A 3 ábrán ez azt jelenti, hogy a szürke zónában nincsenek pontok.



3. ábra.

Az ötlet az, hogy ritkítjuk a $PPP(\lambda)$ -unkat, csak azokat a pontokat tartjuk meg, amelyek a szürke zónába esnek, vagyis ha az első koordinátájuk $t-x+u$, akkor a második koordinátájuk nagyobb, mint $x-u$. Így ez a ritkított Poisson-pontfolyamat $\lambda(1-F(x-u))$ intenzitású inhomogén Poisson pontfolyamat lesz.

Ekkor az $\{\text{új rekordtartó életkora} < y\}$ eseményre:

$$\begin{aligned}
 & \{\text{új rekordtartó életkora} < y\} = \\
 & = \{\text{az inhomogén Poisson-folyamatnak nincs pontja } (t-x, t-y)\text{-ban}\} \\
 \mathbb{P}(\{\text{új rekordtartó életkora} < y\}) & = \exp\left(-\lambda \int_0^{x-y} 1 - F(x-u) du\right) = \quad (4) \\
 & = \exp\left(-\lambda \int_y^x 1 - F(u) du\right)
 \end{aligned}$$

□

1.4. Következmény. Az új rekordtartó életkorának eloszlásfüggvénye, és a 0 pontba esés valószínűsége a következő:

$$t(y) := \exp\left(-\lambda \int_y^x 1 - F(u)du\right) \lambda(1 - F(y)) \quad (5)$$

$$\mathbb{P}(\text{új rekordtartó életkora} = 0) = \exp\left(-\lambda \int_0^x 1 - F(u)du\right) \quad (6)$$

1.2. Y_t stacionárius eloszlása

1.5. Lemma. *Ha $Z_t = t$ a lineárisan növő sztochasztikus folyamat \mathbb{R} -en, akkor G infinitezimális generátorára a következő igaz:*

$$(Qq)(x) = \frac{d}{dx}q(x) \text{ for any } q \in C^1 \quad (7)$$

Ha Z_t $r(x, y)$ rátával ugrik x -ből y -be, akkor G infinitezimális generátorára a következő igaz:

$$(Qq)(x) = \int_{\mathbb{R}} r(x, y)(q(y) - q(x))dy \text{ for any } q \in C^1 \quad (8)$$

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy $P_t(x, y) = \mathbb{1}_{\{y=x+t\}}$. Legyen $f \in C^1$, ekkor:

$$(Qf)(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(P_h f)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}_x(f(Z_h) - f(Z_0))}{h} = \quad (9)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{d}{dx}f(x) \quad (10)$$

□

1.6. Tétel. *Legyen L Y_t infinitezimális generátora.*

Ha $g \in C^1[0, \infty)$ valós értékű függvény, akkor

$$(Lg)(x) = \frac{d}{dx}g(x) + \frac{f(x)}{1 - F(x)} \left[\exp\left(-\lambda \int_0^x 1 - F(u)du\right) (g(0) - g(x)) + \quad (11)$$

$$+ \lambda \int_0^x (1 - F(y)) \exp\left(-\lambda \int_y^x 1 - F(u)du\right) (g(y) - g(x))dy \right] \quad (12)$$

Bizonyítás. Kihaszználjuk, hogy a lineárisan növekvő folyamat infinitezimális ge-

nerátora a deriválás operátor. Tehát az első tag a $g(x)$ deriváltja, a második tag pedig annak felel meg, amikor $\frac{f(x)}{1-F(x)}$ rátával a folyamat 0-ra vagy y -ra esik vissza a korábban kiszámított valószínűséggel, illetve sűrűséggel. \square

1.7. Tétel. *Egy Q infinitezimális generátorral rendelkező Z_t folytonos állapotterű sztochasztikus folyamatnak, ha létezik stacionárius eloszlása, akkor ezen eloszlás $h(x)$ sűrűségfüggvénye kielégíti a következő egyenletet:*

$$(Qh)(x) \equiv 0 \tag{13}$$

1.8. Tétel. *A stacionárius eloszlás sűrűségfüggvénye és tömegpontja 0-ban a következő:*

$$h(x) = \exp\left(-\lambda \int_x^\infty 1 - F(u) du\right) \lambda(1 - F(x)), \quad x \geq 0 \tag{14}$$

$$\mathbb{P}(Y_t = 0) = \exp\left(-\lambda \int_0^\infty 1 - F(u) du\right) \quad (\text{amikor } Y_t \text{ stacionárius állapotban van}) \tag{15}$$

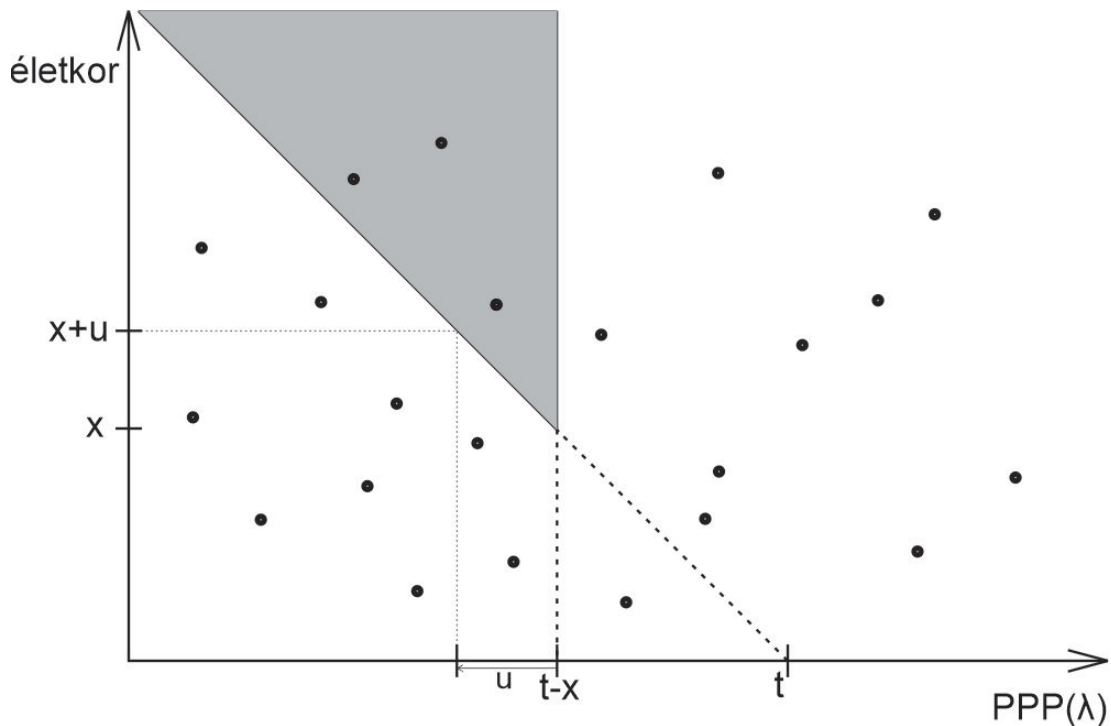
Bizonyítás. A stacionárius eloszlás megtalálásához ismét a folyamat korábban bevezetett 2 dimenziós ábrázolását használjuk:

Először kiszámítjuk az eloszlásfüggvényt $\mathbb{P}(Y_t < x)$.

Feltételezzük, hogy Y_t stacionárius állapotban van.

$Y_t < x$ esetén szükséges, hogy t időpontban senki ne éljen, aki $t-x$ előtt született. Tételezzük fel, hogy $t-x-u$ időpontban született valaki ($u \geq 0$) (a 1.3 tétel bizonyításától eltérően most $t-x$ -től visszafelé indexelünk). Ahhoz, hogy $Y_t < x$ igaz legyen, ennek a személynek legfeljebb $x+u$ hosszú lehet az élettartama. Ennek valószínűsége $F(x+u)$, és ennek igaznak kell lennie minden $u \geq 0$ -ra. Az 1.2 ábrán ez azt jelenti, hogy a szürke zónában nincs egyetlen pont sem.

Ismét ritkítjuk a $PPP(\lambda)$ -unkat, csak azokat a pontokat tartjuk meg, amelyek a szürke zónába esnek, vagyis ha az első koordinátájuk $t-x-u$, akkor a második koordinátájuk nagyobb, mint $x+u$. Így ez az új Poisson-pontfolyamat inhomogén lesz, intenzitása $\lambda(1 - F(x+u))$.



Ekkor az $\{Y_t < x\}$ eseményre vonatkozóan

$\{Y_t < x\} = \{\text{ennek az inhomogén Poisson pontfolyamatnak nincs pontja } t - x \text{ előtt}\}$

$$\mathbb{P}(Y_t < x) = \exp\left(-\lambda \int_0^\infty 1 - F(x+u) du\right) = \exp\left(-\lambda \int_x^\infty 1 - F(u) du\right) \quad (16)$$

Vegyük a deriváltját:

$$h(x) = \frac{d}{dx} \mathbb{P}(Y_t < x) = \exp\left(-\lambda \int_x^\infty 1 - F(u) du\right) \lambda(1 - F(x)) \quad (17)$$

Hasonlóan:

$$\mathbb{P}(Y_t = 0) = \exp\left(-\lambda \int_0^\infty 1 - F(u) du\right) \quad (18)$$

□

Megjegyzés. Ez a $h(x)$ és a tömegpont 0-ban valóban egy eloszlást definiál $[0, \infty)$ -en

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty h(x)dx + \mathbb{P}(Y_t = 0) = \\
& = \left[\exp\left(-\lambda \int_x^\infty 1 - F(u)du\right) \right]_0^\infty + \exp\left(-\lambda \int_0^\infty 1 - F(u)du\right) = \\
& = 1 - \exp\left(-\lambda \int_0^\infty 1 - F(u)du\right) + \exp\left(-\lambda \int_0^\infty 1 - F(u)du\right) = 1
\end{aligned} \tag{19}$$

1.3. Hátralévő élettartam

Most kiszámítjuk a jelenlegi rekorder hátralévő élettartamának várható értékét, amikor Y_t stacionárius állapotban van.

Először szükségünk van néhány lemmára a várható érték és a feltételes várható érték kiszámításához.

1.9. Lemma. *Ha X egy abszolút folytonos, nemnegatív valószínűségi változó $F(X)$ eloszlásfüggvénynel, akkor:*

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty 1 - F(u)du. \tag{20}$$

Bizonyítás.

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E} \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{x>u\}} du = \int_0^\infty \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{x>u\}}) du = \int_0^\infty 1 - F(u)du \tag{21}$$

A várható értéket és az integrálást felcserélhettük Fubini tétele miatt. □

Továbbá szükségünk van a rekorder hátralévő élettartamának várható értékére, ha tudjuk, hogy a rekorder életkora x .

1.10. Lemma. *Ha X egy abszolút folytonos, nemnegatív valószínűségi változó $F(X)$ eloszlásfüggvényvel, és $x > 0$, akkor:*

$$\mathbb{E}(X - x | X > x) = \frac{\int_x^\infty 1 - F(u)du}{1 - F(x)} \tag{22}$$

Bizonyítás. Egyszerűen használjuk a feltételes várható érték definícióját.

$$\mathbb{E}(X - x | X > x) = \frac{\int_x^\infty 1 - F(u) du}{\mathbb{P}(X > x)} = \frac{\int_x^\infty 1 - F(u) du}{1 - F(x)} \quad (23)$$

□

1.11. Tétel. *Ha Y_t stacionárius állapotban van, akkor a jelenlegi rekorder hátralevő élettartamának várható értéke a következő :*

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \exp\left(-\lambda \int_x^\infty 1 - F(u) du\right) \lambda \left(\int_x^\infty 1 - F(u) du\right) dx + \\ & + \exp\left(-\lambda \int_0^\infty 1 - F(u) du\right) \left(\frac{1}{\lambda} + \int_0^\infty 1 - F(u) du\right). \end{aligned} \quad (24)$$

Bizonyítás. Az első kifejezés arra vonatkozik, amikor a rekordtartó életkora pozitív és a stacionárius eloszlás szerint oszlik el. A második kifejezés esetén a folyamat 0-ban van, tehát $\frac{1}{\lambda}$ időt kell várnunk arra, hogy valaki megszülessen, és akkor várható élettartama $\mathbb{E}X$ lesz. Tehát a mi jelöléseinkkel:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty h(x) \mathbb{E}(X - x | X > x) dx + \mathbb{P}(Y_t = 0) \left(\frac{1}{\lambda} + \mathbb{E}X\right) = \\ & = \int_0^\infty \exp\left(-\lambda \int_x^\infty 1 - F(u) du\right) \lambda (1 - F(x)) \frac{\int_x^\infty 1 - F(u) du}{1 - F(x)} dx + \\ & + \exp\left(-\lambda \int_0^\infty 1 - F(u) du\right) \left(\frac{1}{\lambda} + \int_0^\infty 1 - F(u) du\right) = \quad (25) \\ & = \int_0^\infty \exp\left(-\lambda \int_x^\infty 1 - F(u) du\right) \lambda \left(\int_x^\infty 1 - F(u) du\right) dx + \\ & + \exp\left(-\lambda \int_0^\infty 1 - F(u) du\right) \left(\frac{1}{\lambda} + \int_0^\infty 1 - F(u) du\right). \end{aligned}$$

□

Mivel a 1.2 lemma alapján tudjuk, hogy egy személy $\frac{f(x)}{1-F(x)}$ rátával hal meg, ezt átlagolhatjuk a stacionárius eloszlással, ezzel becslést kapva arról, hogy évente hányszor változik a legidősebb ember személye.

1.12. Tétel. *Stacionárius eloszlásban annak a rátának a várható értéke, ami azt mondja meg, hogy milyen gyakran változik a rekorder személye a következő:*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}(\lambda) &= \\ &= \int_0^\infty \exp\left(-\lambda \int_x^\infty 1 - F(u)du\right) \lambda f(x)dx + \exp\left(-\lambda \int_0^\infty 1 - F(u)du\right) \frac{f(0)}{1 - F(0)} \end{aligned} \quad (26)$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{f(x)}{1 - F(x)} h(x) dx = \\ &= \int_0^\infty \frac{f(x)}{1 - F(x)} \exp\left(-\lambda \int_x^\infty 1 - F(u)du\right) \lambda (1 - F(x)) dx = \\ &= \int_0^\infty \exp\left(-\lambda \int_x^\infty 1 - F(u)du\right) \lambda f(x) dx \end{aligned} \quad (27)$$

□

1.4. Beágyazott Markov-lánc

A folyamatunkban található egy beágyazott, diszkrét idejű Markov-lánc, amely minden rekorderhez hozzárendeli a teljes élethosszát. Ahhoz, hogy becslést adjunk arra, hogy egy rekorder meddig birtokolja a világ legidősebb embere címet, szükségünk van ennek a diszkrét idejű Markov-láncnak a stacionárius eloszlására. Jelöljük ezt a Markov-láncot Z_n -vel, és legyen a stacionárius eloszlásának sűrűségfüggvénye $s(x)$.

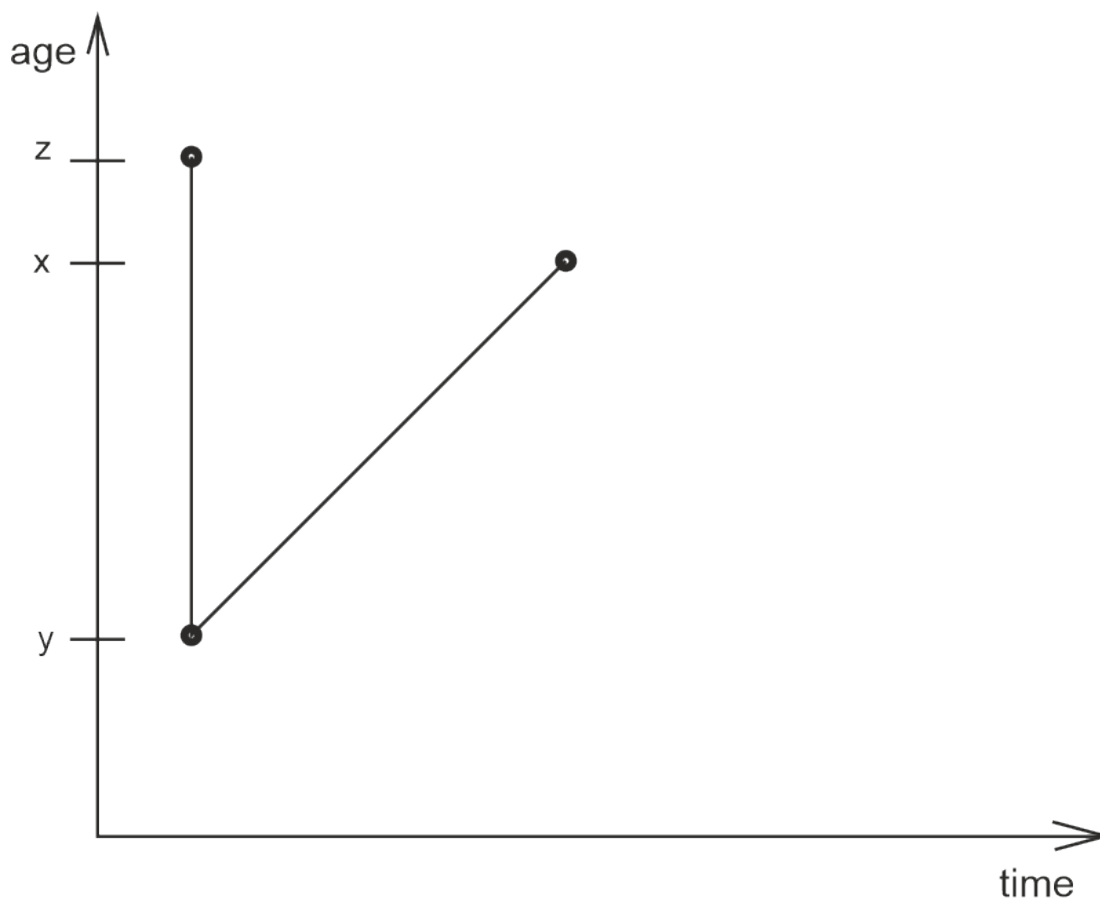
1.13. Tétel. *$s(x)$ -re igaz a következő differenciálegyenlet:*

Legyen $k(x) = \frac{s(x)}{f(x)}$, ekkor:

$$k''(x) - \lambda(1 - F(x))k'(x) + \lambda f(x)k(x) = 0 \quad (28)$$

Bizonyítás. Ha a folyamat stacionárius állapotban van, akkor úgy juthatunk el x -be, ha z -ben voltunk, majd leestünk y -ra, és onnan az eredeti folytonos idejű folyamatunkban x -be mentünk. z lehet bármilyen pozitív valós, de y -ra igaznak kell lennie, hogy $y \leq \min\{x, z\}$. Ez látható a 4 ábrán.

Legyen $G(z) = \exp(-\lambda \int_0^z 1 - F(u)du)$.



4. ábra.

Ekkor:

$$s(x) = \int_0^{\infty} s(z) \int_0^{\min\{x,y\}} \frac{G(z)}{G(y)} \lambda (1 - F(y)) \frac{f(x)}{1 - F(y)} dy dz \quad (29)$$

Leosztva mindkét oldalt $f(x)$ -szel:

$$\frac{s(x)}{f(x)} = \int_0^{\infty} s(z) G(z) \int_0^{\min\{x,y\}} \frac{\lambda}{G(y)} dy dz \quad (30)$$

Szétbontva az integrált $\min\{x, y\}$ értéke szerint:

$$\frac{s(x)}{f(x)} = \int_0^x s(z) G(z) \int_0^z \frac{\lambda}{G(y)} dy dz + \int_x^{\infty} s(z) G(z) \int_0^x \frac{\lambda}{G(y)} dy dz \quad (31)$$

Behelyettesítve $k(x) = \frac{s(x)}{f(x)}$ -et

$$k(x) = \int_0^x k(z)f(z)G(z) \int_0^z \frac{\lambda}{G(y)} dy dz + \int_x^\infty k(z)f(z)G(z) \int_0^x \frac{\lambda}{G(y)} dy dz \quad (32)$$

Deriválva $k(x)$ -et:

$$\begin{aligned} k'(x) &= k(x)f(x)G(x) \int_0^x \frac{\lambda}{G(y)} dy - k(x)f(x)G(x) \int_0^x \frac{\lambda}{G(y)} dy + \\ &\quad + \int_x^\infty k(z)f(z)G(z) \frac{\lambda}{G(x)} dz \\ k'(x) &= \int_x^\infty k(z)f(z)G(z) \frac{\lambda}{G(x)} dz \\ k'(x)G(x) &= \lambda \int_x^\infty k(z)f(z)G(z) dz \end{aligned} \quad (33)$$

Deriválva az egyenletet mégegyszer:

$$k''(x)G(x) + k'(x)G'(x) = -\lambda k(x)f(x)G(x) \quad (34)$$

Felhasználva, hogy $G'(x) = -G(x)(1 - F(x))$

$$k''(x)G(x) - k'(x)G(x)\lambda(1 - F(x)) = -\lambda k(x)f(x)G(x) \quad (35)$$

Leosztva $G(x)$ -szel:

$$k''(x) - k'(x)\lambda(1 - F(x)) + k(x)\lambda f(x) = 0 \quad (36)$$

Ahol kihasználtuk (29)-ben, hogy a sűrűsége az y -ból z -be való leugrásnak $\frac{G(z)}{G(y)}\lambda(1 - F(y))$ (1.3 Tétel). \square

1.14. Tétel. *A (Z_n) diszkrét idejű Markov-lánc stacionárius eloszlásának sűrűségfüggvénye a következő:*

$$s(x) = \frac{1}{c} f(x)^2 \exp\left(-\lambda \int_x^\infty 1 - F(u) du\right) \quad (37)$$

ahol $c = \int_0^\infty s(x) dx$.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
k(x) &= \frac{s(x)}{f(x)} = \frac{1}{c} f(x) \exp\left(-\lambda \int_x^\infty 1 - F(u) du\right) \\
k'(x) &= f'(x) e^{-\lambda \int_x^\infty (1-F(u)) du} + \lambda f(x) (1 - F(x)) e^{-\lambda \int_x^\infty (1-F(u)) du} \\
k''(x) &= -2\lambda (F(x) - 1) f'(x) e^{-\lambda \int_x^\infty (1-F(u)) du} + f''(x) e^{-\lambda \int_x^\infty (1-F(u)) du} - \\
&\quad - \lambda f(x) F'(x) e^{-\lambda \int_x^\infty (1-F(u)) du} + \lambda^2 f(x) (F(x) - 1)^2 e^{-\lambda \int_x^\infty (1-F(u)) du}
\end{aligned} \tag{38}$$

Ha ezeket beillesztjük a 1.13 tétel differenciálegyenletébe, és felhasználjuk, hogy $F'(x) = f(x)$, akkor megkapjuk, hogy $k(x)$ valóban az egyenlet megoldása. \square

Ennek a diszkrét idejű Markov-láncnak a stacionárius eloszlását felhasználva megkaphatjuk a rekorderként való regnálás idejének várható értékét stacionárius állapotban. Legyen W a rekorderként való regnálás hossza.

1.15. Tétel. W sűrűségfüggvénye:

$$f_W(w) = \int_0^\infty \int_0^x \frac{1}{c} f(x)^2 \exp\left(-\lambda \int_y^\infty 1 - F(u) du\right) \lambda f(y+w) dy dx \tag{39}$$

W várható értéke:

$$\mathbb{E}(W) = \int_0^\infty \int_0^x \frac{1}{c} f(x)^2 \exp\left(-\lambda \int_y^\infty 1 - F(u) du\right) \lambda \int_y^\infty 1 - F(u) du dy dx \tag{40}$$

Ahol $c = \int_0^\infty f(x)^2 \exp\left(-\lambda \int_x^\infty 1 - F(u) du\right) dx$.

Bizonyítás. A 1.3 tételből tudjuk, hogy ha egy rekorderó x évesen meghal, akkor a folyamat y -ra esik vissza ($y < x$) az $\exp\left(-\lambda \int_y^x 1 - F(u) du\right) \lambda (1 - F(y))$ sűrűségfüggvényű eloszlás szerint.

A 1.10 lemma alapján ismerjük a fennmaradó élettartam feltételes várható értékét.

Ezt a kettőt kombinálva és a Z_n stacionárius eloszlása szerint súlyozva:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W) &= \int_0^\infty \int_0^x \frac{1}{c} f(x)^2 \exp\left(-\lambda \int_x^\infty 1 - F(u) du\right) \cdot \\
&\quad \exp\left(-\lambda \int_y^x 1 - F(u) du\right) \lambda (1 - F(y)) \frac{\int_y^\infty 1 - F(u) du}{1 - F(y)} dy dx =
\end{aligned} \tag{41}$$

$1 - F(y)$ kiegyszerűsödik, és a két exponenciális felírható egyben:

$$= \int_0^\infty \int_0^x \frac{1}{c} f(x)^2 \exp\left(-\lambda \int_y^\infty 1 - F(u) du\right) \lambda \int_y^\infty 1 - F(u) du dy dx \quad (42)$$

Hasonlóképpen a sűrűségfüggvényre is, ha kihasználjuk, hogy amikor a folyamat y -ra esik le, akkor az regnálás hosszának feltételes eloszlása $\frac{f(y+w)}{1-F(y)}$ sűrűségfüggvényű. \square

2. Élettartameloszlás [4] cikkből

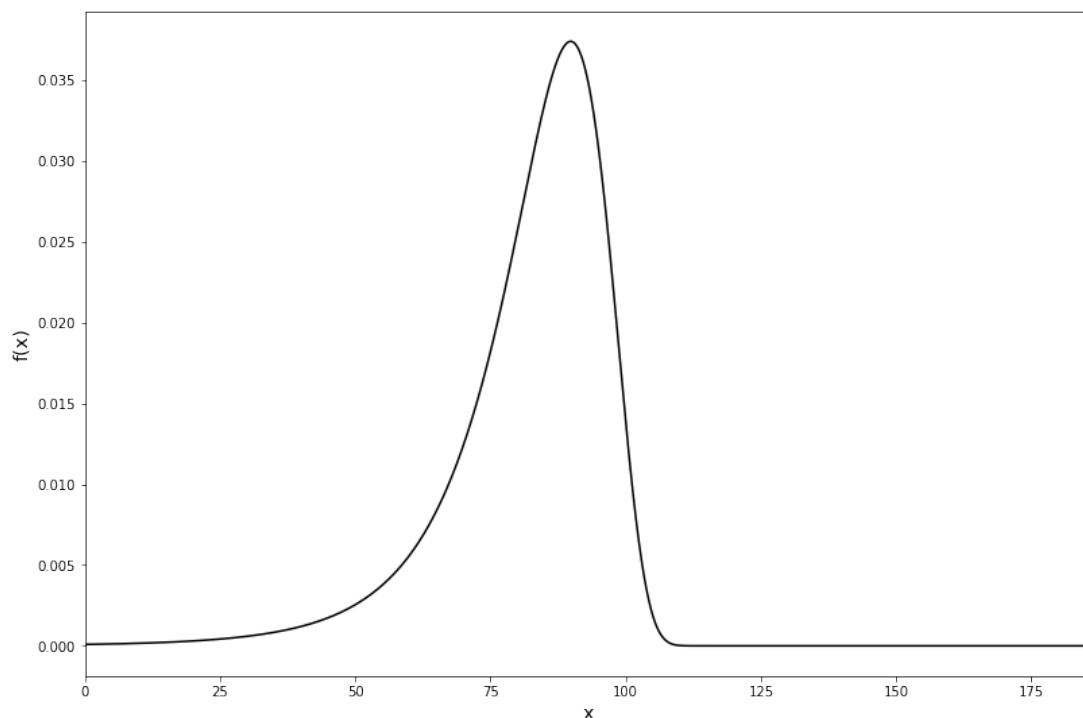
A [4] cikkben azt feltételezve, hogy létezik az emberi élettartamnak felső határa, a következő élettartam-eloszlást illesztették a különböző országokra, halálozási rátát rögzítő adatsorok felhasználásával.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{b}{(\beta-1)(a-x)^{\beta-1}}\right) & x \in (0, a), \text{ ahol } a, b, \beta \text{ paraméterek.} \\ 1 & x \geq a \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{b}{(a-x)^\beta} \exp\left(-\frac{b}{(\beta-1)(a-x)^{\beta-1}}\right) \mathbb{1}_{\{x \in (0, a)\}}$$

Az egyszerűség kedvéért legyen $\alpha = \beta - 1$. A szemléltetéshez és a numerikus számításokhoz az Ausztráliára 2009-ben mért paramétereket használjuk. ([4, p. 24]):

$$a = 186.3, b = \exp(47.44), \alpha = 9.86 \quad (43)$$



5. ábra. Az élettartam eloszlás sűrűségfüggvénye

2.1. Definíció. Gamma-függvény:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt \quad (44)$$

2.2. Definíció. Felső gamma-függvény:

$$\Gamma(s, x) = \int_x^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt \quad (45)$$

2.1. Lemma.

$$\int_x^{\infty} 1 - F(u) du = \frac{b^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha^{1+\frac{1}{\alpha}}} \Gamma\left(-\frac{1}{\alpha}, \frac{b}{\alpha(a-x)^{\alpha}}\right) \quad (46)$$

Bizonyítás. A következő helyettesítést használva:

$$y = \frac{b}{\alpha(a-u)^{\alpha}}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{b}{\alpha(a-u)^{\alpha+1}} = y^{1+\frac{1}{\alpha}} \alpha^{1+\frac{1}{\alpha}} b^{-\frac{1}{\alpha}}$$

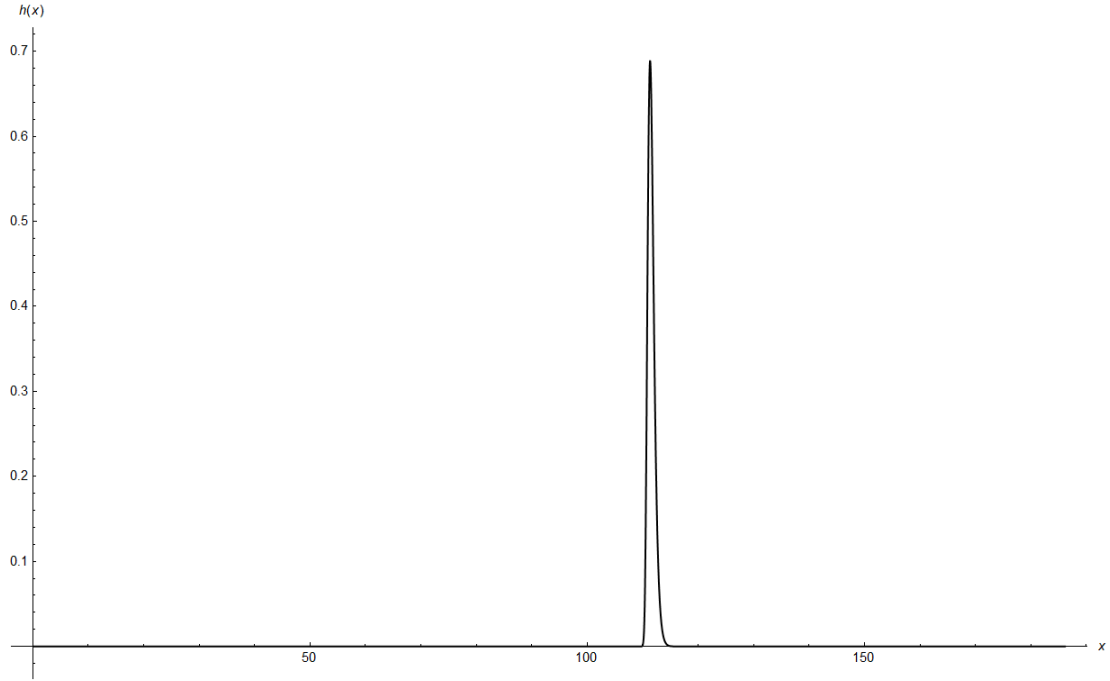
$$\begin{aligned} \int_x^{\infty} 1 - F(u) du &= \\ &= \int_x^a \exp\left(-\frac{b}{(\alpha)(a-u)^{\alpha}}\right) du = \\ &= \int_{\frac{b}{(a-x)^{\alpha}}}^{\infty} e^{-y} y^{-\frac{1}{\alpha}-1} \frac{b^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha^{1+\frac{1}{\alpha}}} dy = \\ &= \frac{b^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha^{1+\frac{1}{\alpha}}} \Gamma\left(-\frac{1}{\alpha}, \frac{b}{\alpha(a-x)^{\alpha}}\right) \end{aligned} \quad (47)$$

□

Az előző lemma segítségével kifejezhetjük a folyamat stacionárius eloszlását:

$$h(x) = \exp\left(-\lambda \frac{b^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha^{1+\frac{1}{\alpha}}} \Gamma\left(-\frac{1}{\alpha}, \frac{b}{\alpha(a-x)^{\alpha}}\right)\right) \lambda \exp\left(-\frac{b}{(\alpha)(a-x)^{\alpha}}\right), \quad x \in (0, a) \quad (48)$$

$$\mathbb{P}(Y_t = 0) = \exp\left(-\lambda \Gamma\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\right)$$



6. ábra. stacionárius eloszlás sűrűségfüggvénye $\lambda = 10^6$ esetén

A 1.11 tételt alkalmazva meghatározhatjuk a jelenlegi rekorder hátralévő idejének várható értékét. Ezt azonban nem tudjuk explicit módon kifejezni, de numerikusan ki tudjuk értékelni.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(\text{jelenlegi rekorder hátralévő ideje}) = \\
& = \int_0^a \exp\left(-\lambda \frac{b^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha^{1+\frac{1}{\alpha}}} \Gamma\left(-\frac{1}{\alpha}, \frac{b}{\alpha(a-x)^\alpha}\right)\right) \lambda \frac{b^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha^{1+\frac{1}{\alpha}}} \Gamma\left(-\frac{1}{\alpha}, \frac{b}{\alpha(a-x)^\alpha}\right) dx + \\
& + \exp\left(-\lambda \frac{b^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha^{1+\frac{1}{\alpha}}} \Gamma\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\right) \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{b^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha^{1+\frac{1}{\alpha}}} \Gamma\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\right).
\end{aligned} \tag{49}$$

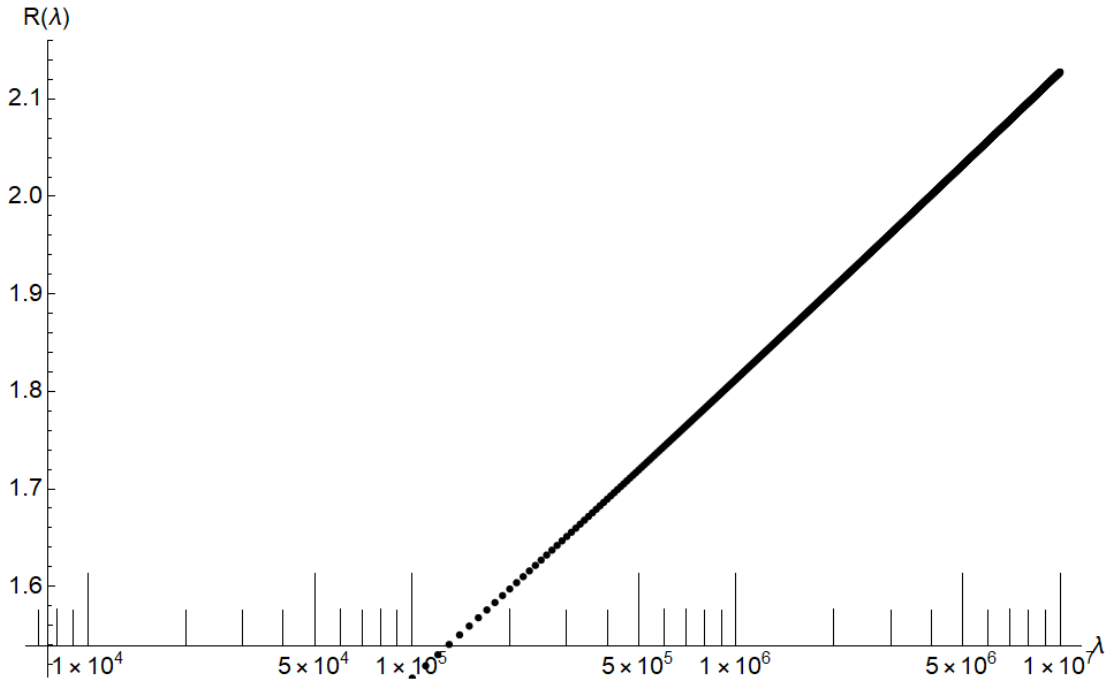
Ebbe behelyettesítve a paramétereket (43)-ből, a következőt kapjuk:

$$\mathbb{E}(\text{jelenlegi rekorder hátralévő ideje}) = 0.443664 \quad (50)$$

A 1.12 tételből ki tudjuk fejezni a rekordtartók identitásváltozásának várható értékét is. Ezt azonban nem tudjuk explicit módon kiintegrálni, csak numerikusan.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}(\lambda) &= \\ &= \int_0^a \exp\left(-\lambda \frac{b^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha^{1+\frac{1}{\alpha}}} \Gamma\left(-\frac{1}{\alpha}, \frac{b}{\alpha(a-x)^\alpha}\right)\right) \lambda \frac{b}{(a-x)^{\alpha+1}} \exp\left(-\frac{b}{\alpha(a-x)^\alpha}\right) dx + \\ &+ \frac{b}{a^{1+\frac{1}{\alpha}}} \exp\left(-\lambda \frac{b^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha^{1+\frac{1}{\alpha}}} \Gamma\left(-\frac{1}{\alpha}, \frac{b}{\alpha a^\alpha}\right)\right). \end{aligned} \quad (51)$$

Ha a különböző λ értékekre kiértékeljük ezen ráta átlagát, és log-lineáris diagramon ábrázoljuk, akkor egy egyenest kapunk (7 ábra). Ez azt jelenti, hogy a ráta várható értéke közel lineáris függvénye $\log(\lambda)$ -nak.



7. ábra. A ráta várható értéke log-lineáris diagrammon.

Erre nem adunk pontos bizonyítást, csak néhány heurisztikát a $\mathbb{R}(\lambda)$ viselke-

déséről:

A második kifejezés a (51)-ben exponenciálisan kicsi, ha λ elég nagy, ezért ezt egyszerűen elhanyagoljuk, és csak az integrállal foglalkozunk.

Legyen $\frac{b^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha^{1+\frac{1}{\alpha}}} =: c$

$$\begin{aligned}
& \int_0^a \exp\left(-\lambda c \Gamma\left(-\frac{1}{\alpha}, \frac{b}{\alpha(a-x)^\alpha}\right)\right) \lambda \frac{b}{(a-x)^{\alpha+1}} \exp\left(-\frac{b}{\alpha(a-x)^\alpha}\right) dx = \\
& = \int_{\frac{b}{\alpha a^\alpha}}^{\infty} \exp\left(-\lambda c \Gamma\left(-\frac{1}{\alpha}, u\right)\right) \lambda e^{-u} du = \\
& = \lambda \int_{\frac{b}{\alpha a^\alpha} - \log \lambda}^{\infty} \exp\left(-v - \lambda c \Gamma\left(-\frac{1}{\alpha}, v + \log(\lambda)\right)\right) dv
\end{aligned} \tag{52}$$

Ahol az alábbi helyettesítést használtuk:

$$\begin{aligned}
u &= \frac{b}{\alpha(a-x)^\alpha} \\
v &= u - \log(\lambda)
\end{aligned} \tag{53}$$

Ez hasonlít egy Gauss-integrálra, így az integrandus maximum értékét, és ezen érték körüli meredekségét fogjuk közelíteni.

$$q(v) := -v - \lambda c \Gamma\left(-\frac{1}{\alpha}, v + \log(\lambda)\right) \tag{54}$$

Deriválva és 0-val egyenlővé téve:

$$\begin{aligned}
q'(v) &= -1 - ce^{-v}(v + \log(\lambda))^{-1-\frac{1}{\alpha}} = 0 \\
ce^{-v} &= (v + \log(\lambda))^{1+\frac{1}{\alpha}}
\end{aligned} \tag{55}$$

A megoldást a következővel közelítve:

$$v_0 \approx (-\log \log(\lambda))\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \tag{56}$$

A következővel becsülve a maximum értéket:

$$q(v_0) \approx \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \log \log(\lambda) \tag{57}$$

Újra deriválva:

$$\begin{aligned} q''(v) &= ce^{-v}(v + \log(\lambda))^{-1-\frac{1}{\alpha}} - ce^{-v}(v + \log(\lambda))^{-2-\frac{1}{\alpha}}(-1 - \frac{1}{\alpha}) = \\ &= -ce^{-v}(v + \log(\lambda))^{-1-\frac{1}{\alpha}} \left(1 + \frac{1 + \frac{1}{\alpha}}{v + \log(\lambda)}\right) \end{aligned} \quad (58)$$

$$q''(v_0) \approx -c$$

Ha most $q(v)$ -t a másodrendű Taylor-polinommával közelítjük v_0 körül, a következőt kapjuk:

$$q(v) \approx q(v_0) - c(v - v_0)^2$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}(\lambda) &\approx e^{q(v_0)} \int_{v_0 \text{ közelében}} e^{-c(v-v_0)^2} dv \approx \\ &\approx c'(\log(\lambda))^{1+\frac{1}{\alpha}} \end{aligned} \quad (59)$$

Ahol c' egy konstans, mivel az integrál létezik és véges.

És mivel $\alpha \approx 10$, and $\lambda \in [10^5, 10^8]$, ebből következik, hogy

$$\mathbb{R}(\lambda) \approx c' \log(\lambda) \quad (60)$$

A 1.14 tételből és a 1.15 tételből megadjuk a korábban definiált beágyazott Markov-lánc stacionárius eloszlásának sűrűségfüggvényét, valamint a rekorderként való regnálás időtartamának várható értékét, ha az élettartam-eloszlás a fentiek szerinti:

$$s(x) = \frac{1}{c} \frac{b^2}{(a-x)^{2(\alpha+1)}} \exp\left(-\frac{2b}{\alpha(a-x)^\alpha}\right) \exp\left(-\lambda \frac{b^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha^{1+\frac{1}{\alpha}}} \Gamma\left[-\frac{1}{\alpha}, \frac{b}{\alpha(a-x)^\alpha}\right]\right) \quad (61)$$

Ahol $c = \int_0^a s(x) dx$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W) &= \int_0^a \int_0^x \frac{1}{c} \frac{b^2}{(a-x)^{2(\alpha+1)}} \exp\left(-\frac{2b}{\alpha(a-x)^\alpha}\right) \\ &\quad \exp\left(-\lambda \frac{b^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha^{1+\frac{1}{\alpha}}} \Gamma\left[-\frac{1}{\alpha}, \frac{b}{\alpha(a-y)^\alpha}\right]\right) \lambda \frac{b^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha^{1+\frac{1}{\alpha}}} \Gamma\left[-\frac{1}{\alpha}, \frac{b}{\alpha(a-y)^\alpha}\right] dy dx \end{aligned} \quad (62)$$

3. Határeloszlás tételek

3.1. Definíció. X Weibull eloszlású $b > 0$ és $\alpha > 0$ paraméterekkel ($X \sim Weibull(\alpha, b)$), ha eloszlásfüggvénye és sűrűségfüggvénye a következő alakú:

$$F(-x) = 1 - e^{-bx^\alpha}, \quad x \geq 0 \quad (63)$$

$$f(-x) = b\alpha x^{\alpha-1} e^{-bx^\alpha}, \quad x \geq 0 \quad (64)$$

Extrémérték elméletből ismert a következő lemma:

3.1. Lemma. *Legyenek X_1, X_2, \dots, X_n független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyek eloszlásfüggvénye $F(-x) = 1 - x^\alpha, x \in [0, 1], \alpha > 0$. Legyen továbbá $M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Ekkor $n^{\frac{1}{\alpha}} M_n \xrightarrow{d} W, n \rightarrow \infty$, ahol $W \sim Weibull(\alpha, \frac{1}{\alpha})$*

Legyen $F(-x) = 1 - x^\alpha, x \in [0, 1], \alpha > 0$. Vegyük az ilyen élettartam eloszlással definiált modellt, ami a legidősebb ember korának folyamatát írja le. Ekkor ezen folyamat stacionárius eloszlásának sűrűségfüggvénye a következő :

$$h(x) = \lambda x^\alpha e^{-\frac{\lambda x^{\alpha+1}}{\alpha+1}}. \quad (65)$$

Legyen Y ilyen eloszlású, ill. legyen $Z = Y \lambda^{\frac{1}{\alpha+1}}$.

Ekkor Z sűrűségfüggvényére igaz:

$$g(z) = \frac{h(\Psi^{-1}(z))}{|\Psi'(\Psi^{-1}(z))|}, \quad \text{ahol } \Psi(x) = x \lambda^{\frac{1}{\alpha+1}} \quad (66)$$

$$g(z) = \frac{\lambda \left(\frac{z}{\lambda^{\frac{1}{\alpha+1}}}\right)^\alpha \exp\left(-\frac{z^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)}{\lambda^{\frac{1}{\alpha+1}}} = z^\alpha \exp\left(-\frac{z^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) \quad (67)$$

Tehát $Z \sim Weibull(\alpha + 1, \frac{1}{\alpha+1})$

Megjegyzés. *Látható, hogy ha a valószínűségi változóknak nem egyszerűen a maximumát vesszük, hanem beillesztjük őket a folyamatunkba egy $PPP(\lambda)$ -val eltolva, akkor a folyamat stacionárius eloszlásának is, megfelelő normálás mellett, a határeloszlása Weibull, viszont a α paraméter egyvel eltolódik.*

3.2. Definíció. X standard Gumbel eloszlású, ha az eloszlásfüggvénye a következő alakú:

$$F(x) = \exp(-e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}) \quad (68)$$

3.2. Lemma. *Legyen $\alpha > 0$, ekkor*

$$\frac{1}{(1+\epsilon)^\alpha} \simeq 1 - \alpha\epsilon, \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (69)$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{1}{(1+x)^\alpha} \\ b(x) &= 1 - \alpha x \end{aligned} \quad (70)$$

Könnyű látni, hogy

$$\begin{aligned} a(0) &= b(0) \\ a'(0) &= b'(0) \end{aligned} \quad (71)$$

Tehát a és b függvények elsőrendben megegyeznek 0-ban. \square

3.3. Lemma. *A felső gamma függvényre a következő asszimptotika igaz ([1], 6.5.32.):*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(s, x)}{x^{s-1} e^{-x}} = 1 \quad (72)$$

A fenti élettartam eloszlással a folyamatunk stacionárius eloszlásának eloszlásfüggvénye:

$$H(y) = \exp\left(-\lambda \frac{b^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha^{1+\frac{1}{\alpha}}} \Gamma\left(-\frac{1}{\alpha}, \frac{b}{\alpha(a-y)^\alpha}\right)\right), \quad y \in (0, a) \quad (73)$$

Az előző lemmával $H(y)$ -t közelíthetjük a következő módon:

$$H(y) \sim \exp\left(-\lambda \frac{(a-y)^{\alpha+1}}{b} \exp\left(-\frac{b}{\alpha(a-y)^\alpha}\right)\right), \quad \text{ahogy } y \rightarrow a \quad (74)$$

Legyen Y olyan, hogy az eloszlásfüggvénye $H(y)$, és legyen:

$$\begin{aligned}
Z &:= \Psi(Y), \text{ ahol} \\
\Psi(Y) &:= \frac{\left(\frac{b}{\alpha \log(\lambda)}\right)^{-1/\alpha}}{\alpha} \left(\alpha^2 \log(\lambda) \left(\frac{b}{\alpha \log(\lambda)}\right)^{1/\alpha} - a\alpha^2 \log(\lambda) + \right. \\
&\quad \left. \alpha \log(\log(\lambda)) \left(\frac{b}{\alpha \log(\lambda)}\right)^{1/\alpha} + \log(\log(\lambda)) + \left(\frac{b}{\alpha \log(\lambda)}\right)^{1/\alpha} + \alpha^2 y \log(\lambda) \right) \\
\Psi^{-1}(z) &= a - \left(\frac{b}{\alpha \log(\lambda)}\right)^{1/\alpha} \left(\frac{(\alpha + 1) \log(\log(\lambda))}{\alpha^2 \log(\lambda)} - \frac{z}{\alpha \log(\lambda)} + 1 \right)
\end{aligned} \tag{75}$$

3.4. Tétel. Z a standard Gumbel eloszláshoz konvergál, ha $\lambda \rightarrow \infty$.

Bizonyítás.

$$y = a - \left(\frac{b}{\alpha \log(\lambda)}\right)^{1/\alpha} \left(\frac{(\alpha + 1) \log(\log(\lambda))}{\alpha^2 \log(\lambda)} - \frac{z}{\alpha \log(\lambda)} + 1 \right) \tag{76}$$

$$\frac{b}{\alpha(a-y)^\alpha} = \frac{\log(\lambda)}{\left(1 + \frac{1+\alpha}{\alpha^2} \frac{\log(\log(\lambda))}{\log(\lambda)} - \frac{z}{\alpha \log(\lambda)}\right)^\alpha} \simeq \log(\lambda) - \frac{1+\alpha}{\alpha} \log(\log(\lambda)) + z$$

amihez a 3.2 lemmát használtuk, illetve, hogy:

$$\frac{1+\alpha}{\alpha^2} \frac{\log(\log(\lambda))}{\log(\lambda)} - \frac{z}{\alpha \log(\lambda)} \rightarrow 0, \text{ ahogy } \lambda \rightarrow \infty \tag{77}$$

$$\begin{aligned}
\frac{(a-x)^{\alpha+1}}{b} &= \frac{b^{\frac{1}{\alpha}}}{(\alpha \log(\lambda))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}} \left(1 + \frac{1+\alpha}{\alpha^2} \frac{\log(\log(\lambda))}{\log(\lambda)} - \frac{z}{\alpha \log(\lambda)}\right)^{\alpha+1} \simeq \\
&\simeq \frac{b^{\frac{1}{\alpha}}}{(\alpha \log(\lambda))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}, \text{ mivel a zárójelben lévő tag tart a 0-hoz, ahogy } \lambda \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{78}$$

Felhasználva (77) és (78)-t kapjuk, hogy:

$$\mathbb{P}(Z < z) = \mathbb{P}(Y < \Psi^{-1}(z)) \sim \exp\left(-\frac{b^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha^{1+\frac{1}{\alpha}}} e^{-z}\right) = \exp\left(-e^{-(z-\frac{1}{\alpha} \log b + (1+\frac{1}{\alpha}) \log \alpha)}\right),$$

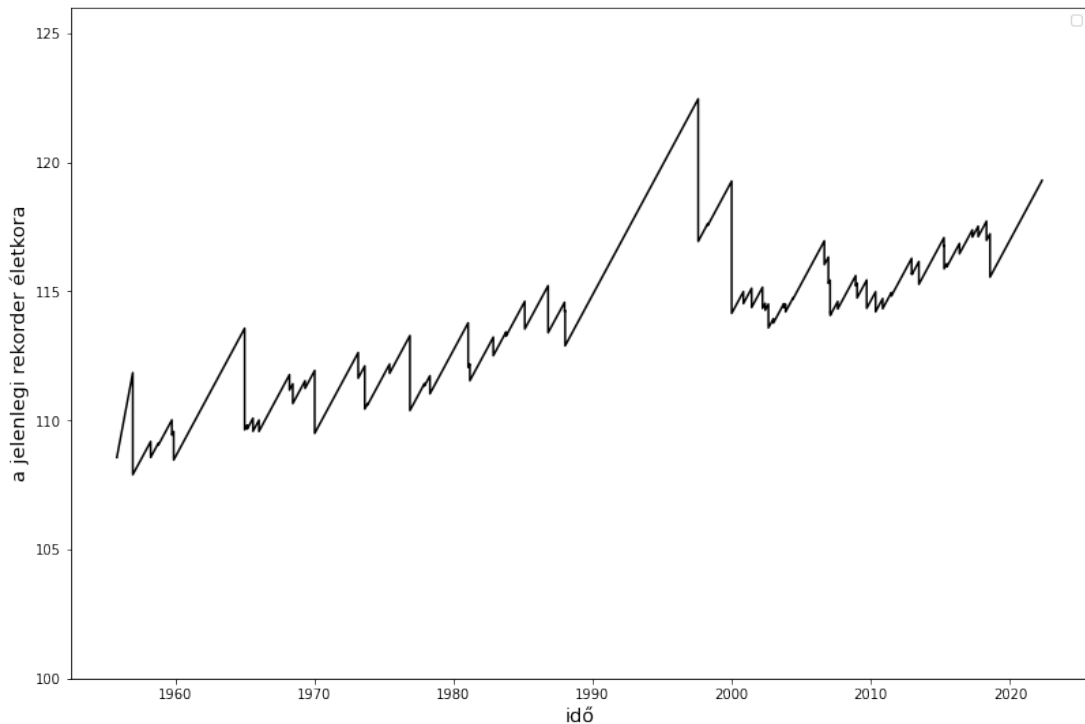
$$\text{ahogy } \lambda \rightarrow \infty \tag{79}$$

Ahol kihasználhattuk a (74) szerinti asszimptotikáját Y_t eloszlásfüggvényének, mivel:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Psi^{-1}(z) = a, \forall z \in \mathbb{R} \tag{80}$$

Ebből következik, hogy ha $\lambda \rightarrow \infty$, akkor Z (Y normált alakja), a standard Gumbel-eloszláshoz konvergál eloszlásban. \square

4. A modell összehasonlítása a valós adatokkal



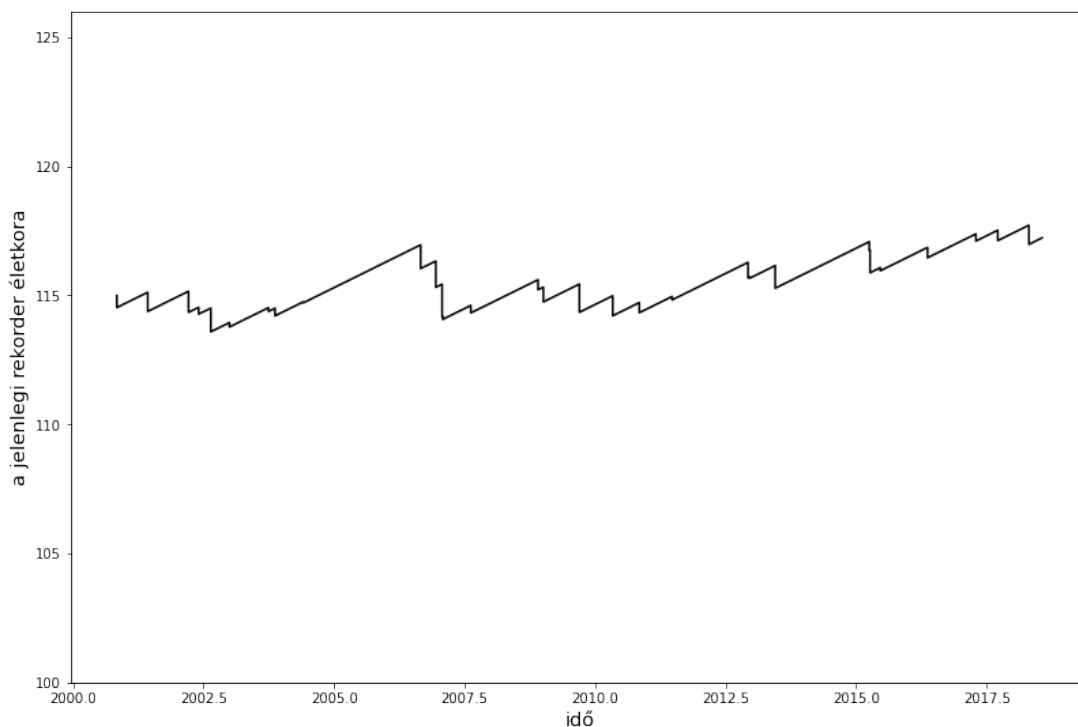
8. ábra. A valós folyamat vizualizációja a 11 és 12 táblázatok alapján.

A 8 ábrán jól látható, hogy a folyamat átlaga az idő múlásával növekszik. Ennek egyértelmű magyarázata, hogy a várható élettartam az adatfelvétel kezdete óta nő, illetve a születési ráta is emelkedik.

Célunk most az, hogy összehasonlítsuk a modellt a [4] cikkből származó élettartam-eloszlással a valós adatokkal. Ez azonban nehéz feladat a valós életfolyamat korábban említett tulajdonságai, valamint az a tény miatt, hogy az élettartam-eloszlás országoként eltérő. Az élettartam-eloszlás paramétereit csak néhány országra és csak rövid időtartamra mérték meg. Továbbá azt is fel kell tételeznünk, hogy a folyamat stacionárius

A [4] cikkben megmérték az élettartam-eloszlás paramétereit Franciaország, Svájc és Ausztrália esetében. A méréseket 2012-ben, 2011-ben és 2009-ben végezték, így csak a 2000 és 2018 közötti történelmi adatokat vesszük figyelembe. A rekordtartók ebben az időintervallumban 1900 körül születtek, így meg kell becsülnünk az akkori születési rátát. Ehhez csak a fejlett világot fogjuk figyelembe venni,

mert a többi ország esetében a paraméterek eltérőek, és nem túl valószínű, hogy valaki egy fejletlen, alacsonyabb várható élettartammal rendelkező országból lesz rekorder. A különböző becslések mérlegelése után a $\lambda = 2,5 \cdot 10^6$ értéket fogjuk használni.



9. ábra. A valós adatok 2000 és 2018 között.

Most két értékét fogjuk kiszámítani a valódi folyamatnak. Először a valódi folyamat átlagát, ami a 9 ábrán látható görbe alatti terület osztva az időintervallum hosszával. Másodszor a rekorderként való regnálási idő átlagát.

$$\text{A valódi folyamat átlaga} = 115,19 \quad (81)$$

$$\text{átlagos regnálási idő rekorderként} = 0,59 \quad (82)$$

Az elméleti és az empirikus értékek összehasonlítása a 1 táblázatban látható. Ezeket a három különböző ország paramétereire numerikus integrálással számoltuk ki, a 2. rész (48) és (62) eredményeit használva, és a λ értéket 2,5 milliónak véve.

Ország, amire a paramétereket kimérték:	France	Switzerland	Australia
A Markov-folyamat stacionárius eloszlásának várható értéke:	113,45	111,02	112,02
Az empirikus értéktől való eltérés (abszolút értékben):	1,74	4,17	3,17
A rekorderként való regnálási idő várható értéke	0,60	0,53	0,53
Az empirikus értéktől való eltérés (abszolút értékben):	0,01	0,06	0,06

1. táblázat. A valós értékek összehasonlítása az empirikus értékekkel.

Mint fentebb említettük, nehéz összehasonlítani a valós folyamatot az elméletivel, de az 1 táblázatban látható, hogy a 2012-ben, Franciaországban mért paraméterekkel és $\lambda = 2,5 \cdot 10^6$ -nal meglehetősen jó eredményeket kaptunk.

5. Inhomogén folyamat

Hosszabb időn át tekintve a folyamatunkat már nem teljesül az eredeti feltételezésünk, hogy a Poisson-folyamat λ paramétere állandó, mivel folyamatosan nő a Föld lakossága, akik egészségesebben is élnek, valamint a valós adatsor sem tűnik stacionáriusnak időben. Ezért a következőkben bevezetjük a modell egy módosítását, ahol ezt a λ paramétert időfüggővé tesszük a többi feltevés megtartása mellett. Célunk, hogy ezt a folyamatot megfelelő paraméterbeállításokkal összehasonlítsuk a teljes valós adatsorral.

Ahogy eddig, jelölje Y_t a legidősebb ember életkorát t időpontban. Ekkor hasonló gondolatmenet alapján mint 1.8-ban kifejezhetjük Y_t eloszlásfüggvényét:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_t) &= \exp\left(-\int_0^\infty \lambda(t-x-u)(1-F(x+u))du\right) = \\ &= \exp\left(-\int_x^\infty \lambda(t-u)(1-F(u))du\right)\end{aligned}\quad (83)$$

Tegyük fel továbbá, hogy $\lambda(t)$ exponenciális függvény, tehát:

$$\lambda(t) = ce^{\gamma t}, \quad c, \gamma > 0. \quad (84)$$

Valamint használjuk a már 2 részben megismert élettartam-eloszlást a Franciaországra mért paraméterekkel ([4] 24-es oldal).

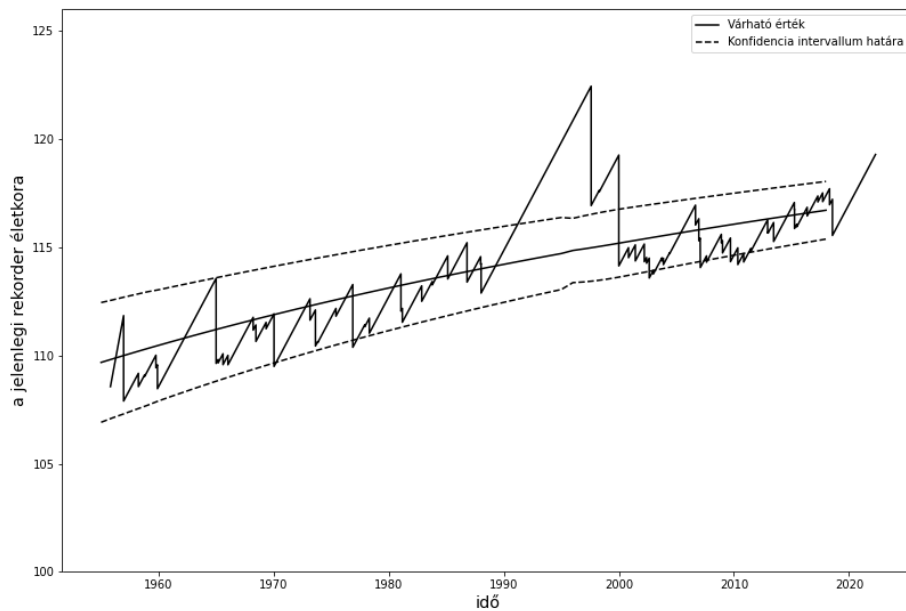
Ekkor Y_t eloszlásfüggvénye (83) alapján a következő alakú:

$$\mathbb{P}(Y_t) = \exp\left(-ce^{\gamma t} \int_x^a \exp(-\gamma u + \frac{b}{\alpha(a-u)^\alpha})du\right) \quad (85)$$

Az egyszerűség kedvéért eltoljuk az adatsorunkat úgy, hogy 1955-öt tekintjük 0-nak, így $t \in [0, 63]$. Az összehasonlítást a valós adatokkal megnehezíti az élettartam-eloszlás farokeloszlásának bizonytalansága, mivel ezen eloszlást valós halálozási adatokból számították ki, így az eloszlás jobb végponthoz közeli részének illesztésekor csak nagyon kevés adatpont állt a rendelkezésükre.

A megfelelő illeszkedés miatt Y_t eloszlásának c és γ paramétereit úgy állítjuk be, hogy a kapott eloszlás várható értéke $t = 0$ és $t = 63$ időpontokban megegyezzen az eredeti folyamat regressziós egyenesének ezen pontokbeli értékével. Ez $c = 10^{15}$ és $\gamma = \frac{1}{63} \log(2 \cdot 10^6)$ esetén valósul meg.

Hogy összehasonlítsuk a folyamatunkat a valós adatokkal, kiszámítjuk 1955-től 2018-ig minden év első napjára a fenti eloszlás várható értékét, illetve a várha-



10. ábra.

tó érték köré a második momentumot és a Csebisev-egyenlőtlenséget használva legalább 90%-os konfidenciaintervallumot szerkesztünk, majd az így kapott pontsorozatokat egyenesekkel összekötjük.

Ez látható a 10 ábrán. A könnyebb értelmezhetőség kedvéért az ábrázoláshoz visszatoltuk a folyamatunkat az eredeti időintervallumba. Ahogy az ábra is mutatja, ezzel az inhomogén megközelítéssel már elég jó illeszkedést tudtunk elérni a valós adatokra.

A magas paraméterválasztást indokolja a már előbb említett bizonytalansága az élettartam eloszlásnak, de nincs okunk másfajta lecsengést feltételezni, ezért csak a valószínűségek konstanssal való szorzását választjuk a jobb egyezés eléréséhez. Ez a konstans úgy jelenik meg a formulában, hogy a születési rátát szorozza, ezért tekinthetjük $\lambda(t)$ -t a korrekciós konstans és a születési ráta szorzatának.

6. Összefoglalás

A szakdolgozatomban a világ legidősebb emberének életkorára vonatkozó Markov-folyamatot vizsgáltuk.

Az első részben egy kétdimenziós ábrázolás segítségével bizonyítottunk egy explicit képletet a folyamat stacionárius eloszlására, ami lehetővé tette a folyamat különböző tulajdonságainak kiszámítását.

A második részben kiszámítottuk a folyamat tulajdonságait a [4] cikkből származó reális élettartam-eloszlással. Megfigyeltük, hogy a rekordtartó személyazonosságának változási sebességének átlaga közel lineáris függvénye a $\log(\lambda)$ értéknek, és adtunk néhány heurisztikát e megfigyelés megerősítésére.

A harmadik részben a stacionárius eloszlás határeloszlását vizsgáltuk. Beláttuk, hogy $F(-x) = 1 - x^\alpha$ élettartam eloszlás esetén Weibull, míg a [4] cikk szerinti élettartam eloszlás esetén Gumbel eloszlású a stacionárius eloszlás határeloszlása, megfelelő normálás mellett, ahogy $\lambda \rightarrow \infty$.

A negyedik részben az előző élettartam-eloszlás mért paramétereit használtuk fel arra, hogy összehasonlítsuk modellünk tulajdonságait a valós adatok egy részével. Ehhez a Gerontology Research Group [3] történelmi adatait használtuk, és néhány becslést a λ paraméterre. A legjobb eredményeket a 2012-ben Franciaországban mért paraméterek felhasználásával kaptuk.

Az ötödik részben inhomogénre módosítottuk a folyamatunkat, hogy a teljes valódi adathalmazzal összehasonlíthassuk a modellünket. Ezzel a modellel, és megfelelő paraméter választással jó egyezést sikerült elérnünk.

#	Birthplace	Name	Born	Died	Age		Race	Sex	Deathplace	When Oldest		Length of Reign		Reign Length		Age at Accession	
					Years	Days				Years	Age Range	Years	Days	(In years)	Years	Days	
1	England (UK)	Betsy Baker	Aug 20, 1842	Oct 24, 1955	113	65	W	F	U.S. (NE)	1955	2-113	N/A	N/A	N/A	N/A	110	255
2	England (UK)	Jennie Howell	Feb 11, 1845	December 16, 1956	111	309	W	F	U.S. (CA)	1955-1956	110-111	1	53	1.14	110	255	
3	Denmark	Anne Marie Carstenson	Jan 24, 1849	Mar 30, 1958	109	65	W	F	U.S. (NE)	1956-1958	107-109	1	104	1.28	107	327	
4	U.S. (IN)	Nancy Ryan	Sept 5, 1849	Oct 17, 1958	109	42	W	F	U.S. (IN)	1958	108-109	0	201	0.55	108	206	
5	Netherlands	Christina Kambeek-Backs	Oct 2, 1849	Oct 7, 1959	110	5	W	F	Netherlands	1958-1959	109-110	0	355	0.97	109	15	
6	Norway	Marte Olsen	May 1, 1850	November 24, 1959	109	207	W	F	Norway	1959	109	0	48	0.13	109	159	
7	U.S. (MD)	Mary Kelly	June 7, 1851	December 30, 1964	113	206	W	F	U.S. (CA)	1959-1964	108-113	5	36	5.10	108	170	
8	England (UK)	Elizabeth Kearsley	May 12, 1855	Mar 6, 1965	109	298	W	F	England (UK)	1964-1965	109	0	66	0.18	109	232	
9	U.S. (TX)	William Fullington	July 7, 1855[1]	Aug 6, 1965	110	30	W	M	U.S. (OK)	1965	109-110	0	153	0.42	109	242	
10	England (UK)	Hannah Smith	Jan 7, 1856	January 10, 1966	110	3	W	F	England (UK)	1965-1966	109-110	0	157	0.43	109	211	
11	England (UK)	John Turner	June 15, 1856	Mar 21, 1968	111	280	W	M	England (UK)	1966-1968	109-111	2	70	2.19	109	209	
12	South Africa	Jolanna Boosten	Jan 17, 1857	June 16, 1968	111	151	W	F	South Africa	1968	111	0	87	0.24	111	64	
13	Czechoslovakia	Marte Bernatková	Oct 22, 1857	May 4, 1969	111	194	W	F	Czechoslovakia	1968-1969	110-111	0	322	0.88	110	238	
14	England (UK)	Ada Roe	Feb 6, 1858	January 11, 1970	111	339	W	F	England (UK)	1969-1970	111	0	252	0.69	111	87	
15	Spain	Josefa Salas Mateo	July 14, 1860	February 27, 1973	112	228	W	F	Spain	1970-1973	109-112	3	47	3.13	109	181	
16	England (UK)	Alice Stevenson	July 10, 1861	August 18, 1973	112	39	W	F	England (UK)	1973	111-112	0	172	0.47	111	232	
17	N. Ireland (UK)	Elizabeth Watkins[2]	Mar 10, 1863	Oct 31, 1973	110	235	W	F	N. Ireland (UK)	1973	110	0	74	0.20	110	161	
18	Japan	Mino Umeta	Mar 27, 1863	May 31, 1975	112	65	W	F	Japan (Kumamoto)	1973-1975	110-112	1	212	1.58	110	218	
19	Japan	Nirva Kavanoto	Aug 5, 1863	November 16, 1976	113	103	W	F	Japan (Shiga)	1975-1976	111-113	1	169	1.46	111	299	
20	U.S. (MO)	Sophie De Wuth[3]	June 30, 1866	Dec 2, 1977	111	155	W	F	U.S. (MO)	1976-1977	110-111	1	16	1.04	110	139	
21	France	Marte-Virgine Dubaut	Aug 2, 1866	Apr 25, 1978	111	266	W	F	France	1977-1978	111	0	144	0.39	111	122	
22	U.S. (IL)	Fannie Thomas	Apr 14, 1867	January 22, 1981	113	283	W	F	U.S. (CA)	1978-1981	111-113	2	272	0.12	111	11	
23	France	Augustine Tessier	Jan 2, 1869	Mar 8, 1981	112	65	W	F	France	1981	112	0	45	0.12	112	20	
24	U.S. (NH)	Nellie Spencer	Aug 24, 1869	November 13, 1982	113	81	W	F	U.S. (NH)	1981-1982	112-113	1	250	1.68	111	196	
25	U.S. (MO)	Emma Wilson	May 12, 1870	Oct 13, 1983	113	154	W	F	U.S. (MO)	1982-1983	112-113	0	334	0.92	112	185	
26	U.S. (PA)	Mathew Beard[4]	July 9, 1870	February 16, 1985	114	222	W	M	U.S. (PA)	1983-1985	113-114	1	126	1.35	113	96	
27	Germany (now Poland)[5]	Augustine Holz	Aug 3, 1871	Oct 21, 1986	115	79	W	F	U.S. (MO)	1985-1986	114-115	1	247	1.68	113	197	
28	U.S. (CA)	Mary McKimney	May 30, 1873	Feb 2, 1987	114	208	W	F	U.S. (CA)	1986-1987	113	0	104	0.28	113	144	
29	England (UK)	Anna Eliza Williams	June 2, 1873	December 27, 1987	114	208	W	F	England (UK)	1987	113-114	0	328	0.90	113	245	
30	U.S. (PA)	Florence Kamp	Oct 10, 1873	January 11, 1988	114	93	W	F	U.S. (PA)	1987-1988	114	0	15	0.04	114	78	
31	France	Jeanne Calment[6]	Feb 21, 1875	Aug 4, 1997	122	164	W	F	France	1988-1997	112-122	9	205	9.56	112	324	
32	Canada (Que)	Marte-Louise Meilheu	Aug 29, 1880	Apr 16, 1998	117	230	W	F	Canada (ONT)	1997-1998	116-117	0	255	0.70	116	340	
33	U.S. (PA)	Sarah Kanuss	Sept 24, 1880	December 30, 1999	119	97	W	F	U.S. (PA)	1998-1999	117-119	1	258	1.71	117	204	
34	England (UK)	Eva Morris	Nov 8, 1885	Nov 2, 2000	114	360	W	F	England (UK)	1999-2000	114	0	308	0.84	114	52	
35	France	Marte Brenont	Apr 25, 1886	June 6, 2001	115	42	W	F	France	2000-2001	114-115	0	216	0.59	114	191	
36	U.S. (MD)	Manud Farris-Jaruse	Jan 21, 1887	Mar 18, 2002	114	194	W	F	U.S. (MD)	2001-2002	114-115	0	285	0.78	114	136	
37	England (UK)	Grace Clawson[7]	Nov 15, 1887	May 28, 2002	114	194	W	F	U.S. (FL)	2002	114	0	71	0.19	114	123	
38	Capa Verde[Portugal][8]	Adelina Domingues	Feb 19, 1888	August 21, 2002	114	183	W	F	U.S. (CA)	2002	114	0	85	0.23	114	98	
39	U.S. (NY)	Mae Harrington	Jan 20, 1889	December 29, 2002	113	343	W	F	U.S. (NY)	2002	113	0	130	0.36	113	213	
40	Japan	Yukichi Chuganji	Mar 23, 1889	Sept 28, 2003	114	182	W	M	Japan (Fukuoka)	2002-2003	113-114	0	273	0.75	113	281	
41	Japan	Miyoko Kawata	May 15, 1889	November 13, 2003	114	189	W	F	Japan (Hiroshima)	2003	114	0	46	0.13	114	136	
42	Puerto Rico	Renona Trinidad Iglesias-Jordan[9]	Aug 31, 1889	May 29, 2004	114	272	W	F	Puerto Rico	2003-2004	114	0	198	0.54	114	74	
43	Ecuador	Maria Esther de Canouillal[10]	Sept 14, 1889	August 27, 2006	116	347	W	F	Ecuador	2004-2006	114-116	2	90	2.25	114	258	
44	U.S. (TN)	Elizabeth Bolden	Aug 15, 1890	December 11, 2006	116	118	B	F	U.S. (TN)	2006	116	0	106	0.29	116	12	
45	Puerto Rico	Emiliano Mercado Del Toro	Aug 21, 1891	January 24, 2007	115	156	H	M	Puerto Rico	2006-2007	115	0	44	0.12	115	112	

11. ábra. Forrás: Gerontology Research Group ([3])

#	Birthplace	Name	Born	Died	Age		Race	Sex	Deathplace	When Oldest		Length of Reign	Reign Length (In years)	Age at Accession		
					Years	Days				Years	Age Range			Years	Days	Years
46	U.S. (NC)	Emma Tillman	Nov. 22, 1892	January 28, 2007	114	67	B	F	U.S. (CT)	2007	114	0	4	0.01	114	63
47	Japan	Yone Minagawa	Jan. 4, 1893	August 13, 2007	114	221	O	F	Japan (Fukuoka)	2007	114	0	197	0.54	114	24
48	U.S. (IN)	Edna Parker	Apr. 20, 1893	November 26, 2008	115	220	W	F	U.S. (IN)	2007-2008	114-115	1	105	1.29	114	115
49	Portugal	Maria de Jesus	Sept. 10, 1893	Jan. 2, 2009	115	114	W	F	Portugal	2008-2009	115	0	37	0.10	115	77
50	U.S. (GA)	Getrude Baines	Apr. 6, 1894	Sept. 11, 2009	115	158	B	F	U.S. (GA)	2009	114-115	0	252	0.69	114	271
51	Japan	Kama Chinen	May 10, 1895	May 2, 2010	114	357	O	F	Japan (Okinawa)	2009-2010	114	0	233	0.64	114	124
52	France	Eugenie Blanchard	Feb. 16, 1896	Nov. 4, 2010	114	261	W	F	France (St. Barts)	2010	114	0	186	0.51	114	75
53	Brazil	Maria Gomes Valentim [11]	July 9, 1896	June 21, 2011	114	347	W	F	Brazil	2010-2011	114	0	229	0.63	114	118
54	U.S. (TN)	Besse Cooper	Aug. 26, 1896	Dec. 4, 2012	116	100	W	F	U.S. (GA)	2011-2012	114-116	1	166	1.45	114	299
55	Italy	Dina Manfredini	Apr. 4, 1897	Dec. 17, 2012	115	257	W	F	U.S. (IA)	2012	115	0	13	0.04	115	244
56	Japan	Jiroemon Kimura	Apr. 19, 1897	June 12, 2013	116	54	O	M	Japan (Kyoto)	2012-2013	115-116	0	177	0.48	115	242
57	Japan	Misao Okawa	Mar. 5, 1898	Apr. 1, 2015	117	27	EA	F	Japan (Osaka)	2013-2015	115-117	1	293	1.80	115	99
58	U.S. (AR)	Getrude Weaver	July 4, 1898	Apr. 6, 2015	116	276	M[12]	F	U.S. (AR)	2015	116	0	5	0.01	116	271
59	U.S. (GA)	Jeanlean Talley	May 23, 1899	June 17, 2015	116	25	B	F	U.S. (MD)	2015	115-116	0	72	0.20	115	318
60	U.S. (AL)	Susannah Mashart Jones	July 6, 1899	May 12, 2016	116	311	B	F	U.S. (NY)	2015-2016	115-116	0	330	0.90	115	346
61	Italy	Emma Morano	Nov. 29, 1899	Apr. 15, 2017	117	137	W	F	Italy	2016-2017	116-117	0	338	0.92	116	165
62	British West Indies (now Jamaica)	Violet Brown	Mar. 10, 1900	Sept. 15, 2017	117	189	B	F	Jamaica	2017	117	0	153	0.42	117	36
63	Japan	Nebi Tajima	04.aug.00	Apr. 21, 2018	117	260	E4	F	Japan (Kagoshima)	2017-2018	117	0	218	0.60	117	42
64	Japan	Chiyo Miyako	May 2, 1901	July 22, 2018	117	81	EA	F	Japan (Kanagawa)	2018	116-117	0	92	0.25	116	354
65	Japan	Kane Tanaka	02.jan.03	April 19, 2022	119	107	EA	F	Japan (Fukuoka)	2018-2022	115-119	3	271	3.74	115	201

Hivatkozások

- [1] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. United States Department of Commerce, 10 edition, 1972.
- [2] Richard Durrett. *Essentials of Stochastic Processes*. Springer, New York, NY, 2 edition, 2012.
- [3] Gerontology Resourch Group. World's oldest person (wop) titleholders since 1955. <http://https://grg.org/Adams/C.HTM>, 2018. [Online; accessed 14-05-2022].
- [4] Mark Kaminskiy. Human lifespan distribution with maximum lifespan parameter. *Reliability Theory and Applications*, 10, 05 2015.
- [5] Sidney I. Resnick. *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*. Springer New York, 1987.