

Másodszoyszédos rekordok közötti ugrások eloszlása bolyongásoknál

TDK Dolgozat

Mikolás László

BME TTK, Alkalmazott Matematikus MSc.

Temavezető:

Dr.Vető Bálint



Sztochasztika Tanszék

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Budapest

Október 2019

Kivonat

Egy n lépésű Laplace eloszlású véletlen bolyongást vizsgálunk. $d_{k,n}$ jelöli a k és $k + 1$ -ik szomszédos rekordok közötti ugrást, ahol az 1-es rekord a bolyongás globális maximuma, az $n + 1$ -ik rekord pedig a minimuma. Ennek eloszlását [3] és [4]-ban vizsgálták. Ebben a dolgozatban kiterjesztjük ezeket az eredményeket. Meghatározzuk a $J_{k,n} = d_{k,n} + d_{k+1,n}$ két másodsomszédos rekord közötti ugrás eloszlását és az aszimptotikus viselkedést vizsgáljuk a bolyongás egy tetszőleges kvantilisének közelében.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Model és saját eredmények	4
2.1. k -ik Másodsomszédos rekordok közötti ugrások eloszlása.	5
2.2. Saját eredmények	6
2.2.1. Megjegyzések	6
2.3. Tipikus ingadozás eset	12
3. Momentumok kiszámítása	15
4. Konkluzió	17

1. Bevezetés

Az extrémérték-elmélet tárgya egy valószínűségi változó sorozat, X_1, X_2, \dots, X_n , maximumának és minimumának eloszlása amikor n tart a végtelenbe. A klasszikus elméletben a valószínűségi változókról fölteszük hogy független azonos eloszlásúak. Ebben az esetben három határeloszlás lehetséges, nevezetesen, Weibull, Frechet és Gumbell, attól függően, hogy mi az eredeti változók eloszlása. Ezeket az eredményeket széles körben alkalmazzák, például, a statisztikus fizikában, szélsőséges időjárás jelenségek modellezésére és a pénzügyben.

Van azonban két fontos eset, amelyben ez a megközelítés nem eléggé kidolgozott. Jelenleg, kevés eredmény ismert a nem független azonos eloszlású esetben, ami egyre fontosabb több alkalmazásban. Például, a pénzügy területén köztudott, hogy a különböző pénzügyi termék osztályok közötti korreláció az időben változik. Ezt azonban nagyon fontos figyelembe venni a várható veszteség becslésekor. Másodszor, a maximum vagy minimum eloszlása csak egy pontra vonatkozó információt tartalmaz, ugyanakkor a vizsgált rendszer $n \gg 1$ változóból áll. Ezért fontos figyelembe venni a rekordok eloszlásait ahol $M_{k,n}$ a k -ik rekord, azaz a k -ik maximum, és $X_{max} = M_{1,n} \geq M_{2,n} \geq \dots \geq M_{n+1,n} = X_{min}$. Az egyik legegyszerűbb, ugyanakkor releváns modell amely hasznos arra, hogy megértsük, hogyan viselkedik egy olyan rendszer amely sok korrelált valószínűségi változóból áll, a véletlen bolyongás.

Nagyon fontos megérteni, a maximumok közötti különbségek viselkedését. Egy közelmúlti cikkben, [4], a szerzők leírták $d_{k,n} = M_{k,n} - M_{k+1,n}$, a k és $k+1$ -ik rekord közötti ugrásnak eloszlását egy hosszú véletlen bolyongás maximumának közelében. Továbbá ezeket az eredményeket kiterjesztették [3]-ben és leírták $d_{k,n}$ eloszlását a bolyongás egy tetszőleges kvantilisének közelében. Mind a két esetben olyan véletlen bolyongást vizsgáltak melynek növekményei Laplace eloszlásúak voltak. A szerzőknek az volt a sejtésük, hogy a rekordok közötti ugrások eloszlása univerzális, azaz nem függ a bolyongás növekményeinek eloszlásától, ha ez folytonos és véges második momentummal rendelkezik. A [2] még egy példával támasztják alá ezt a sejtést. Ebben a cikkben a szerzők kimutatták, hogy a rekordok közötti ugrások eloszlása ugyanaz lesz, ha a bolyongás növekményei gamma el-

oszlásúak. Hasonló eredményekre jutottak olyan véletlen bolyongások szimulációjával melyeknek növekményei normális, egyenletes, valamint exponenciális eloszlásúak voltak [3].

Ebben a dolgozatban a [4]-ben bevezetett rekurziós módszert használjuk a két másodsomszédos $M_{k,n}$ és $M_{k+2,n}$ rekordok együttes eloszlásnak a leírására és így a köztük lévő ugrás $J_{k,n} = d_{k,n} + d_{k+1,n} = M_{k,n} - M_{k+2,n}$ eloszlását is a bolyongás valamilyen tetszőleges α kvantilis közelében. Ezzel kiszámoljuk az első momentumot explicit alakban. Egy további fontos kérdés az, hogy mi a $d_{k,n}$ és $d_{k+1,n}$ korrelációja. Erre egy heurisztikus érveléssel szemléltetjük, mi a sejtésünk. Úgy gondoljuk ezek az eredmények fontosok mert egy újabb lépést tesznek abban az irányban, hogy jobban megértsük a sok elemből álló és összefüggő rendszereket

2. Model és saját eredmények

Követve [3] és [4]-et egy diszkrét idejű folytonos térbeli véletlen bolyongást vizsgálunk

$$x_i = x_{i-1} + \eta_i \quad \text{ahol } i = 1, 2, \dots, n \quad \text{és} \quad x_0 = 0 \quad (1)$$

Ahol az η_i -k független Laplace eloszlású valószínűségi változók melyek a következő sűrűségfüggvényel rendelkeznek :

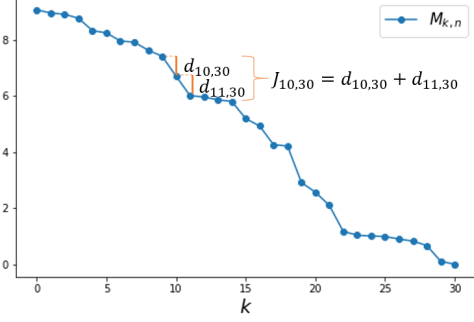
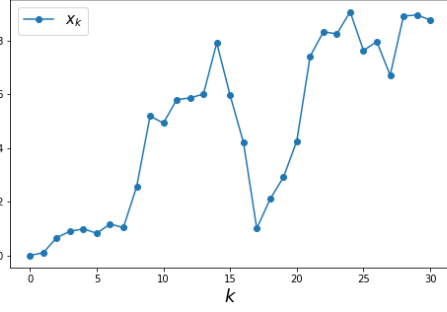
$$f(\eta) = \frac{e^{-|\eta|}}{2} \quad (2)$$

ahól a szórást $\sigma = \sqrt{2}$ -nek választottuk az általánosság megszorítása nélkül. Fontos figyelembe venni, hogy a bolyongás növekményei független azonos eloszlású valószínűségi változók de a pozíciói $\{x_i\}_{i=0}^n$ korreláltak.

Egy n lépesű bolyongás, $n + 1$, $\{x_0, x_1, \dots, x_{n+1}\}$ pozíciót látogat meg. Ezeket sorba rendezzük és definiáljuk az $M_{k,n}$ valószínűségi változót ami a k -ik rekordot jelöli a bolyongás pozíciói közül, azaz:

$$x_{\max} = M_{1,n} \geq M_{2,n} \geq \dots \geq M_{n,n} \geq M_{n+1,n} = x_{\min} \quad (3)$$

Ezt a felépítést az 1. ábrán szemléltetjük.



1. ábra. **Bal oldal:** Egy x_i , $n = 30$ lépésű véletlen bolyongás, amely $x_0 = 0$ -bol indul. A globális maximuma $x_{24} = M_{1,30}$, a minimuma pedig $x_0 = M_{31,30}$. **Jobb oldal:** $M_{k,n}$ értékei.

2.1. k -ik Másodsomszédos rekordok közötti ugrások eloszlása.

A [4] és [3]-ben leírt módszert követve keressük az $M_{k,n}$ és $M_{k+2,n}$ rekordok együttes vegyes eloszlását:

$$\mathcal{S}_{k,n}(x, y) = \mathbb{P}[M_{k,n} \geq y, M_{k+2,n} \leq x] \quad (4)$$

Ekkor $J_{k,n}$ a sűrűségfüggvénye melyet $\mathcal{S}_{k,n}(x, y)$ segítségével fejezhető ki:

$$J_{k,n}(\Delta) = - \int \int \partial_{xy}^2 \mathcal{S}_{k,n}(x, y) \Theta(y - x) \delta(y - (x + \Delta)) dx dy \quad (5)$$

ahol $\Theta(x)$ a Heaviside függvény.

2.2. Saját eredmények

1. Tétel. Legyen $\alpha \in (0, 1)$ fix, $k := \lfloor \alpha n \rfloor$ ha $\sqrt{n}\{J_{k,n}\}$ konvergál, akkor

$$\sqrt{n}J_{k,n} \rightarrow J_\alpha$$

Ahol $J_\alpha(\delta)$ a sűrűségfüggvénye:

$$J_\alpha(\delta) = \int_0^\infty \frac{2}{3} z^3 e^{-\delta z} \left[\frac{\delta z e^{-\frac{z^2}{4\alpha}} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{1-\alpha}}\right)}{\sqrt{\pi}\alpha^{3/2}} + \frac{\delta z e^{-\frac{z^2}{4(1-\alpha)}} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{\alpha}}\right)}{2\sqrt{\pi}(1-\alpha)^{3/2}} + \right. \\ \left. \frac{3\delta e^{-\frac{z^2}{4\alpha} - \frac{z^2}{4(1-\alpha)}}}{\pi\sqrt{\alpha(1-\alpha)}} - \left(\frac{z^2 e^{-\frac{z^2}{4\alpha}}}{4\sqrt{\pi}\alpha^{5/2}} - \frac{e^{-\frac{z^2}{4\alpha}}}{(2\sqrt{\pi})\alpha^{3/2}} \right) \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{1-\alpha}}\right) + \right. \\ \left. \left(\frac{z^2 e^{-\frac{z^2}{4(1-\alpha)}}}{4\sqrt{\pi}(1-\alpha)^{5/2}} - \frac{e^{-\frac{z^2}{4(1-\alpha)}}}{2\sqrt{\pi}(1-\alpha)^{3/2}} \right) \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{\alpha}}\right) - \frac{z e^{-\frac{z^2}{4\alpha} - \frac{z^2}{4(1-\alpha)}}}{2\pi(\alpha^{3/2}\sqrt{1-\alpha})} + \frac{z e^{-\frac{z^2}{4\alpha} - \frac{z^2}{4(1-\alpha)}}}{2\pi(\sqrt{\alpha(1-\alpha)^{3/2}})} \right] dz$$

2.2.1. Megjegyzések

A $J_\alpha(\delta)$ sűrűségfüggvény δ^{-3} -ként cseng le ahogy $\delta \rightarrow \infty$.

Az említett határeloszlás az $\frac{1}{\sqrt{n}}$ skálán áll elő. Ezen a skálán:

- $\mathbb{E}(J_\alpha) < \infty$
- $\mathbb{E}(J_\alpha^2) = \infty$

Ezért a másodsomszédos ugrások közötti első momentumot ki tudjuk számolni explicit alakban a $J_\alpha(\delta)$ sűrűségfüggvény segítségével de a második momentumot már nem. Ennek alakjára és a két szomszédos ugrás korrelációs együtthatóra a sejtésünk a következő:

Sejtések

$$\mathbb{E}(J_\alpha^2) \approx \frac{6}{\pi\sqrt{(1-\alpha)\alpha}} \frac{\log n}{n} \tag{6}$$

$$\operatorname{Corr}(d_{k,n}, d_{k+1,n}) = \frac{\frac{6 \log(n)}{2((\pi\sqrt{(1-\alpha)\alpha})n)} - \frac{\log(n)}{\pi\sqrt{\alpha(1-\alpha)n}}}{\frac{4 \log(n)}{\pi\sqrt{\alpha(1-\alpha)n}}} = \frac{1}{2}$$

amiket egy heurisztikus érveléssel indoklunk a "Momentumok kiszámítása" fejezetben.

A jelen dolgozatban sok bonyolult számításra volt szükség, ezekhez a *Wolfram Mathematica*-t alkalmaztuk. Így több eredményt kaphattunk, ugyanakkor a software szabta meg annak a határat, hogy meddig juthatunk el. Munkánk során kiderült, hogy ennél bonyolultabb esetek, mint például egy öt szomszédos együttes eloszlásának kiszámítása, a dolgozatban alkalmazott módszerrel nehezen lenne megoldható. Valahányszor a következőkben egyszerűsítő feltevésekkel élünk, erre külön fölhívjuk az olvasó figyelmét.

A továbbiakban leírjuk az eredményekhez vezető lépéseket.

Az $\mathcal{S}_{k,n}(x, y)$ valószínűség a következőképpen bontható fel:

$$\mathcal{S}_{k,n}(x, y) = \tilde{S}_{k,n}(x, y) + S_{k,n}(x, y) + S_{k+1,n}(x, y) \quad (7)$$

ahol

$$\tilde{S}_{k,n}(x, y) = \mathbb{P}[M_{k,n} > y, M_{k+1,n} \in [x, y], M_{k+2,n} \leq x] \quad (8)$$

$$S_{k,n}(x, y) = \mathbb{P}[M_{k,n} > y, M_{k+1,n} \leq x] \quad (9)$$

$S_{k,n}(x, y)$ -t amelyet [1]-et követve az alábbiak szerint fejezhetjük ki egy trajektória transzformációval:

$$S_{k,n}(x, y) = \mathbb{P}[M_{k,n} \geq y, M_{k+1,n} \leq x] = \begin{cases} Q_{k,n}(x, y - x) & x > 0 \\ 0 & x < 0 \text{ és } y > 0 \\ Q_{n+1-k,n}(-y, y - x) & x < 0, y < 0 \end{cases} \quad (10)$$

Ahol $Q_{k,n}(x, \Delta)$ annak a valószínűsége, hogy egy n lépesű véletlen bolyongásnak amely $x_0 = x$ -ből indul, pontosan k pontja legyen a 0 alatt kivéve a $[-\Delta, 0]$ szakaszt. Az első esetben az eredeti bolyongást "feltoljuk x -el és tükrözzük az x -tengelyre". A második esetben a valószínűség 0, mert a vizsgált bolyongás az $x_0 = 0$ -bol indul ki, tehát mindig lesz egy pont az $M_{k,n}$ és $M_{k+1,n}$ rekord között ha $M_{k,n} > 0$ és $M_{k+1,n} < 0$. Végül, a harmadik esetben a megfelelő transzformáció, az hogy az eredeti bolyongást feltoljuk $-y$ -

nal. Így elérjük mind a három esetben, hogy a $[-\Delta, 0]$ szakaszban ne essen pont amikor $M_{k,n} > y$ és $M_{k+1,n} < x$.

A célunk az, hogy a megemlített cikkben bevezetett rekurziós módszert követve leírjuk az $\tilde{S}_{k,n}(x, y)$ eloszlást, majd ezzel végül az $\mathcal{S}_{k,n}(x, y)$ is megtaláljuk zárt alakban.

Az $\tilde{S}_{k,n}(x, y)$ felírására bevezetjük a $L_{k,n}(x, \Delta)$ -t ami annak a valószínűsége, hogy egy n lépésű véletlen bolyongásnak amely x -ből indul pontosan egy pontja legyen a $[-\Delta, 0]$ szakaszban, és még k pont ezalatt.

Ezeknek a segítségével és egy trajektória (path) transzformációval a következő kifejezést kapjuk

$$\tilde{S}_{k,n}(x, y) = \begin{cases} L_{k,n}(x, y-x) & x > 0 \\ Q_{n-k,n}(-y, y-x) & y > 0, x < 0 \\ L_{n-k,n}(-y, y-x) & y < 0 \end{cases} \quad (11)$$

Mint (10)-ben, az első eset annak felel meg, hogy a bolyongást "feltoljuk x -el és tükrözzük az x tengelyre" tehát ezt az esetet az $t_i = x - x_i$ transzformáció írja le, ahol $x_0 = 0$. A második eset annak felel meg, hogy a bolyongást "letoljuk y -nal", azaz a $t_i = -y + x_i$ transzformáció. A harmadik eset pedig annak, hogy a bolyongást "feltoljuk $-y$ -nal" (mert ebben az esetben $y < 0$). Ezekkel a transzformációkkal pedig azt érjük el, hogy a $[-\Delta, 0]$ szakaszban pontosan akkor legyen egy pont amikor $M_{k,n} > y$, $M_{k+1,n} \in [x, y]$ és $M_{k+2,n} \leq x$ az eredeti bolyongásban, ami az $\tilde{S}_{k,n}(x, y)$ definíciója.

Az $L_{k,n}(x, \Delta)$ valószínűség a következő rekurzióval fejezhető ki ($Q_{k,n}(x, \Delta)$ is hasonlóan áll elő [4])

$$L_{k,n}(x, \Delta) = \int_0^{\infty} f(x' - x) L_{k,n-1}(x', \Delta) dx' + \int_{-\infty}^{-\Delta} f(x' - x) L_{k-1,n-1}(x', \Delta) dx' + \int_{-\Delta}^0 f(x' - x) Q_{k,n-1}(x', \Delta) dx' \quad (12)$$

Ahol az első tag a x -ből a $x' > 0$ -ba a második a $x' \in [-\Delta, 0]$ -ba a harmadik pedig

az $x < -\Delta$ -ba való ugrás esetét fejezi ki. Ez az integrálegyenlet egy generátorfüggvény módszerrel oldható meg [3],[4]. Ehhez, bevezetjük a következő dupla generátorfüggvényeket:

$$\ell(z, s; x) := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n s^n z^k L_{k,n}(x, \Delta) \quad (13)$$

$$q(z, s; x) := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n s^n z^k Q_{k,n}(x, \Delta) \quad (14)$$

Ezeket alkalmazva (12)-re a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \ell(z, s; x, \Delta) = s \int_0^{\infty} f(x' - x) \ell(z, s; x, \Delta) dx' + z s \int_{-\infty}^{-\Delta} \ell(z, s; x, \Delta)(x', \Delta) dx' \\ + s \int_{-\Delta}^0 f(x' - x) q(z, s; x, \Delta) dx' \quad (15) \end{aligned}$$

Az integrálegyenlet megoldására, követjük a [3]-ban használt módszert. Nevezetesen, alkalmazzuk a Laplace eloszlás azon tulajdonságát hogy $f''(x) = \frac{2}{\sigma^2}[f(\eta) - \delta(\eta)]$. A továbbiakban az általánosság megszorítása nélkül és a egyszerűség kedvéért a $\sigma^2 = \sqrt{2}$ értéket használjuk. Ezt a tulajdonságot alkalmazva és a (13) egyenletet kétszer deriválva x szerint a következőket kapjuk:

$$\partial_x^2 \ell(z, s; x, \Delta) = \begin{cases} \ell(z, s; x, \Delta) = (1 - s)\ell(z, s; x, \Delta) & x > 0 \\ \ell(z, s; x, \Delta) = \ell(z, s; x, \Delta) - sq(z, s; x, \Delta) & x \in [-\Delta, 0] \\ \ell(z, s; x, \Delta) = (1 - zs)\ell(z, s; x, \Delta) & x < -\Delta \end{cases} \quad (16)$$

Ahol $q(z, s; x, \Delta)$ alakja pedig:

$$q(z, s; x, \Delta) = \frac{1}{2} s e^x \left(\frac{A_1(z, s, \Delta)}{\sqrt{1-s}+1} + \frac{1}{1-s} \right) + \frac{1}{2} s z e^{-\Delta-x} \left(\frac{B_1(z, s, \Delta)}{\sqrt{1-sz}+1} + \frac{1}{1-sz} \right) + 1 \quad \text{ha } x \in [-\Delta, 0] \quad (17)$$

Ahol

$$A_1(z, s, \Delta) = \frac{\frac{sz}{\sqrt{1-sz}} - \frac{s}{1-s} (\cosh(\Delta)\sqrt{1-sz} + \sinh(\Delta))}{\sinh(\Delta) \left(\sqrt{(1-s)(1-sz)} + 1 \right) + \cosh(\Delta) (\sqrt{1-sz} + \sqrt{1-s})} \quad (18)$$

és $B_1(z, s, \Delta) = A_1(\frac{1}{z}, zs, \Delta)$ értékeit [3]-bol tudjuk.

Ezen differenciálegyenletek megoldásai melyek nem divergálnak amint $x \rightarrow \infty$ vagy $x \rightarrow -\infty$ a következők:

$$\ell(z, s; x, \Delta) = \begin{cases} \mathcal{A}(z, s, \Delta)e^{-\sqrt{1-s}x} & x > 0 \\ C_1e^{-x} + C_2e^x + \ell_{\text{part}} & x \in [-\Delta, 0] \\ \mathcal{B}(z, s, \Delta)e^{\sqrt{1-zs}x} & x < -\Delta \end{cases} \quad (19)$$

A (16) és (17)-ben kapott eredményeket behelyettesítve (15)-be, megkapjuk $\mathcal{A}(z, s, \Delta)$, $\mathcal{B}(z, s, \Delta)$ értékét. Ezen együtthatók értékei nagyon bonyolultak és az explicit kifejezésük nem járul hozzá az eredmények jobb megértésének, ezért nem írjuk le őket. C_1 , C_2 és ℓ_{part} , ahol az utóbbi a differenciálegyenlet partikuláris megoldása, ugyanígy kapható meg de a továbbiakban nem lesz rá szükségünk, mert (14)-ből látszik, hogy a $[-\Delta, 0]$ szakaszban a $q(z, s; x, \Delta)$ -et kell használni a számításokban. Így a (7) és (10) egyenletet használva, $\mathcal{S}_{k,n}(x, y)$ a következő:

$$\mathcal{S}_{k,n}(x, y) = \begin{cases} L_{k,n}(x, y-x) + Q_{k,n}(x, y-x) & , x > 0 \\ Q_{k,n}(-y, y-x) & y > 0, x < 0 \\ L_{n-k,n}(y, y-x) + Q_{n+1-k,n}(-y, y-x) & x < 0, y < 0 \end{cases} \quad (20)$$

Alkalmazva az (5)-ben adott képletet a (7) kifejezéssel együtt valamint a (17)-ban,(19)-

ben megadott generátorfüggvényeket és a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n s^n z^k \tilde{S}_{k,n}(x, y) := \tilde{s}(z, s, x, y) \quad (21)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n s^n z^k S_{k,n}(x, y) := s(z, s, x, y) \quad (22)$$

definíciókat használva, a $p_{k,n}(\Delta)$ dupla generátorfüggvényét, $\tilde{p}(z, s; \Delta)$ az alábbiak szerint írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} \tilde{p}(z, s; \Delta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n s^n z^k J_{k,n}(\Delta) \\ &= - \int \int \partial_{xy}^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n s^n z^k \tilde{S}_{k,n}(x, y) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n s^n z^k S_{k,n}(x, y) + \right. \\ &\quad \left. \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n s^n z^k S_{k+1,n}(x, y) \right] \Theta(y-x) \delta(y-(x+\Delta)) dx dy \\ &= - \int \int \partial_{xy}^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n s^n z^k \tilde{S}_{k,n}(x, y) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n s^n z^k S_{k,n}(x, y) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n s^n z^k S_{k,n}(x, y) \right] \Theta(y-x) \delta(y-(x+\Delta)) dx dy \\ &= - \int \int \partial_{xy}^2 \left[\tilde{s}(z, s, x, y) + \left(1 + \frac{1}{z}\right) s(z, s, x, y) \right] \Theta(y-x) \delta(y-(x+\Delta)) dx dy \end{aligned} \quad (23)$$

Ahol végül az $\tilde{s}(z, s, x, y)$ és $s(z, s, x, y)$ értékeit behelyettesítve az alábbiat kapjuk:

$$\begin{aligned} \tilde{p}(z, s; \Delta) &= \frac{\partial_{\Delta}^2 \mathcal{A}(z, s, \Delta)}{\sqrt{1-s}} + \partial_{\Delta} \mathcal{A}(z, s, \Delta) + \frac{\partial_{\Delta}^2 \mathcal{B}(\frac{1}{z}, zs, \Delta)}{\sqrt{1-s}} + \partial_{\Delta} \mathcal{B}(\frac{1}{z}, zs, \Delta) + \\ &\quad \left(\frac{\partial_{\Delta}^2 B_1(\frac{1}{z}, zs, \Delta)}{\sqrt{1-s}} + \partial_{\Delta} B_1(\frac{1}{z}, zs, \Delta) \right) \left(e^{\sqrt{1-s}\Delta} - 1 \right) \\ &+ \left(1 + \frac{1}{z}\right) \left(\partial_{\Delta} A_1(z, s; \Delta) + \frac{\partial_{\Delta}^2 A_1(z, s, \Delta)}{\sqrt{1-s}} + ze^{\sqrt{1-zs}\Delta} \left(\frac{\partial_{\Delta}^2 B_1(z, s, \Delta)}{\sqrt{1-s}} + \partial_{\Delta} B_1(z, s, \Delta) \right) \right) \end{aligned} \quad (24)$$

Vizsgálni szeretnénk a $\tilde{p}(z, s, \Delta)$ viselkedését amikor $n \rightarrow \infty$ és $k \rightarrow \infty$. Erre először elvégezzük a következő változócsereét: legyen $z = e^{-q}$ és $s = e^{-p}$ és vesszük a $p, q \rightarrow 0$ határértéket. Ebben a határértékben a k és n szerinti summák integrálokkal helyettesíthetők. Így a következőt kapjuk:

$$\tilde{p}(z = e^{-q}, s = e^{-p}, \Delta) \approx \tilde{\pi}(p+q, p, \Delta) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-p(n-k)-(p+q)k} J_{k,n}(\Delta) d(n-k) dk \quad (25)$$

Ahol $\tilde{\pi}(p+q, p, \Delta)$ a $p_{k,n}(\Delta)$ sűrűségfüggvénynek a kétszeres Laplace transzformációja k és $n-k$ szerint. Itt használtuk, hogy a $e^{-pn-qq} = e^{-p(n-k)-(p+q)k}$ ezért az n, k változópárról illetve a p, q -ról áttérhetünk a $n-k, k$ -ról a $p+q, q$ -ra. Tehát mivel a valószínűség kifejezhető nem csak a k és n -párossal, hanem a k és $n-k$ párossal is, ezért a Laplace transzformáció kifejezhető q -val és $p+q$ -val. Az egyszerűség érdekében bevezetjük az $r = p+q$ jelölést. A következőkben a sűrűségfüggvény viselkedést vizsgáljuk nagy n -re a tipikus ingadozás esetén azaz amikor $\Delta = O(n^{-1/2})$.

2.3. Tipikus ingadozás eset

A tipikus ingadozás esetének vizsgálatához, az $\mathcal{A}(z = e^{-q}, s = e^{-p}, \Delta)$, $\mathcal{B}(z = e^{-q}, s = e^{-p}, \Delta)$, $A_1(z = e^{-q}, s = e^{-p}, \Delta)$ és $B_1(z = e^{-q}, s = e^{-p}, \Delta)$ viselkedését kell tanulmányoznunk amikor $p \sim q \sim \Delta^2$. Az első két együttható a következő alakot ölti:

$$\mathcal{A}(z = e^{-q}, s = e^{-p}, \Delta) \approx \frac{\Delta (\sqrt{p} + \sqrt{r})}{p\sqrt{r} (\Delta + \sqrt{p} + \sqrt{r})^2} \quad (26)$$

$$\mathcal{B}(z = e^{-q}, s = e^{-p}, \Delta) \approx \frac{\Delta (\sqrt{p} + \sqrt{r})}{p\sqrt{r} (\Delta + \sqrt{p} + \sqrt{r})^2} \quad (27)$$

Az utóbbi két együttható viselkedését pedig [3]-ből ismerjük:

$$A_1(z = e^{-q}, s = e^{-p}, \Delta) \approx -\frac{r - p + \sqrt{r}\Delta}{p\sqrt{r}(\sqrt{p} + \sqrt{r} + \Delta)} \quad (28)$$

$$B_1(z = e^{-q}, s = e^{-p}, \Delta) \approx -\frac{p - r + \sqrt{r}\Delta}{p\sqrt{r}(\sqrt{p} + \sqrt{r} + \Delta)} \quad (29)$$

Ezeket behelyettesítve (24)-be és használva a [3]-ban bevezetett (55) egyenletet látható, hogy a vezető tagok azok amelyeknek a Δ szerinti második deriváltja szerepel. Felhívjuk

az olvasó figyelmét, hogy itt először vettük az $\mathcal{A}(z = e^{-q}, s = e^{-p}, \Delta)$ és $\mathcal{B}(z = e^{-q}, s = e^{-p}, \Delta)$ aszimptotikáját és csak utána vettük a második delta szerinti deriváltjukat, holot a helyes eljárás az lett volna hogy, először vesszük a deriváltakat és aztán vizsgáljuk ezeknek az aszimptotikáját. A *Mathematica* korlátjai miatt voltunk kénytelenek ezt a sorrendet alkalmazni. Ugyanakkor, úgy gondoljuk hogy ez nem okoz problémákat mert az együtt-hatóink Δ -ban elég sima függvények. [3]-ban a szerzők ugyanebben a sorrendben végzik el a számításokat $A_1(z = e^{-q}, s = e^{-p}, \Delta)$ és $B_1(z = e^{-q}, s = e^{-p}, \Delta)$ -re de ebben az esetben tudtuk ellenőrizni, hogy a eljárások végrehajtási sorrendje nem befolyásolja a vég eredményt.

Ennek oka az, hogy ezen tagok $\sqrt{1-s}$ vannak elosztva ahol $\sqrt{1-s} \sim p \ll 1$, kivéve az ötödik tag esetében, ahol a szorzó csökkenti a nagyságrendet. Így a következőt kapjuk:

$$\tilde{\pi}(r, p, \Delta) \approx \frac{4(\sqrt{p} + \sqrt{r})(\Delta(\sqrt{p} + 2\sqrt{r}) + p - r)}{pr(\Delta + \sqrt{p} + \sqrt{r})^4} \quad (30)$$

Az r és p szerinti Laplace transzformáció invertálására a következő képletet alkalmazzuk:

$$\frac{6}{(x+p)^4} = \int_0^\infty y^3 e^{-y(x+p)} dy \quad (31)$$

Amivel $\tilde{\pi}(r, p, \Delta)$ a következőképpen fejezhető ki:

$$\tilde{\pi}(r, p, \Delta) = \frac{2}{3} \int_0^\infty y^3 e^{-y(\Delta + \sqrt{p} + \sqrt{r})} \left[\frac{2\Delta}{p} - \frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{\Delta}{r} + \frac{\sqrt{p}}{r} + \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{3\Delta}{\sqrt{pr}} - \frac{\sqrt{r}}{p} \right] dy \quad (32)$$

Végül, alkalmazva a következő inverz Laplace transzformáció képleteket:

$$\mathcal{L}_{u \rightarrow t}^{-1}(e^{-\sqrt{u}x}) = \frac{x e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t^{3/2}}} \quad (33)$$

$$\mathcal{L}_{u \rightarrow t}^{-1}\left(\frac{e^{-\sqrt{u}x}}{\sqrt{u}}\right) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} \quad (34)$$

$$\mathcal{L}_{u \rightarrow t}^{-1}\left(\frac{e^{-\sqrt{u}x}}{u}\right) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \quad (35)$$

$$\mathcal{L}_{u \rightarrow t}^{-1}(e^{-x\sqrt{u}}\sqrt{u}) = \left(\frac{x^2 e^{-\frac{x^2}{4t}}}{4\sqrt{\pi t^{5/2}}} - \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t^{3/2}}} \right) \quad (36)$$

Megkapjuk a kereset sűrűségfüggvényt:

$$\begin{aligned}
J_{k,n}(\Delta) \approx & \int_0^\infty \frac{2}{3} y^3 e^{-\Delta y} \left[\frac{\Delta y e^{-\frac{y^2}{4k}} \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{n-k}}\right)}{\sqrt{\pi} k^{3/2}} - \left(\frac{y^2 e^{-\frac{y^2}{4k}}}{4\sqrt{\pi} k^{5/2}} - \frac{e^{-\frac{y^2}{4k}}}{2\sqrt{\pi} k^{3/2}} \right) \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{n-k}}\right) \right. \\
& + \frac{\Delta y \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{k}}\right) e^{-\frac{y^2}{4(n-k)}}}{2\sqrt{\pi}(n-k)^{3/2}} + \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{k}}\right) \left(\frac{y^2 e^{-\frac{y^2}{4(n-k)}}}{4\sqrt{\pi}(n-k)^{5/2}} - \frac{e^{-\frac{y^2}{4(n-k)}}}{2\sqrt{\pi}(n-k)^{3/2}} \right) \\
& \left. - \frac{y e^{-\frac{y^2}{4(n-k)} - \frac{y^2}{4k}}}{2\pi k^{3/2} \sqrt{n-k}} + \frac{3\delta e^{-\frac{y^2}{4(n-k)} - \frac{y^2}{4k}}}{\pi \sqrt{k}(n-k)} + \frac{y e^{-\frac{y^2}{4(n-k)} - \frac{y^2}{4k}}}{2\pi \sqrt{k}(n-k)^{3/2}} \right] dy \quad (37)
\end{aligned}$$

Végül, bevezetve az $z \rightarrow \frac{y}{\sqrt{n}}$ változócserét, megkapjuk a Tétel 1.-ben leírt alakot, nevezetesen:

$$\begin{aligned}
J_\alpha(\delta) = & \frac{2}{3} \int_0^\infty z^3 e^{-\delta z} \left[\frac{\delta z e^{-\frac{z^2}{4\alpha}} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{1-\alpha}}\right)}{\sqrt{\pi} \alpha^{3/2}} - \left(\frac{z^2 e^{-\frac{z^2}{4\alpha}}}{4\sqrt{\pi} \alpha^{5/2}} - \frac{e^{-\frac{z^2}{4\alpha}}}{2\sqrt{\pi} \alpha^{3/2}} \right) \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{1-\alpha}}\right) + \right. \\
& \frac{\delta z e^{-\frac{z^2}{4(1-\alpha)}} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{\alpha}}\right)}{2\sqrt{\pi}(1-\alpha)^{3/2}} + \left(\frac{z^2 e^{-\frac{z^2}{4(1-\alpha)}}}{4\sqrt{\pi}(1-\alpha)^{5/2}} - \frac{e^{-\frac{z^2}{4(1-\alpha)}}}{2\sqrt{\pi}(1-\alpha)^{3/2}} \right) \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{\alpha}}\right) - \\
& \left. \frac{z e^{-\frac{z^2}{4(1-\alpha)} - \frac{z^2}{4\alpha}}}{2\pi \sqrt{1-\alpha} \alpha^{3/2}} + \frac{3\delta e^{-\frac{z^2}{4(1-\alpha)} - \frac{z^2}{4\alpha}}}{\pi \sqrt{(1-\alpha)\alpha}} + \frac{z e^{-\frac{z^2}{4(1-\alpha)} - \frac{z^2}{4\alpha}}}{2\pi (1-\alpha)^{3/2} \sqrt{\alpha}} \right] dz \quad (38)
\end{aligned}$$

3. Momentumok kiszámítása

Várható érték

A (37)-ben megadott sűrűségfüggvény segítségével már ki tudjuk számítani a két másodsomszédos rekord közötti ugrások várható értékét amely következő:

$$\sqrt{n}\mathbb{E}(J_\alpha) = \sqrt{n}(\mathbb{E}(d_{k,n}) + \mathbb{E}(d_{k,n+1})) \approx \int_0^\infty \delta J_\alpha(\delta) d\delta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} \right) \quad (39)$$

Ami pontosan a [3]-ban megjelent

$$\sqrt{n} \frac{\mathbb{E}(d_{k,n})}{\sigma} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} \right) \quad (40)$$

kétszerese ha figyelembe vesszük, hogy mi a $\sigma = \sqrt{2}$ normalizációt választottuk.

Tehát ebből látszik, hogy az $\frac{1}{\sqrt{n}}$ skálán a várható érték véges mint korábban említettük.

Második momentum heurisztikus vizsgálata

Jelen dolgozat egyik fő célja az, hogy a két másodsomszédos közötti ugrás $d_{k,n}$ és $d_{k,n+1}$ korrelációs együtthatóját megtaláljuk. [3]-ból ismerjük az ugrások momentumait de nem tudjuk hogy mi $\mathbb{E}(d_{k,n}d_{k,n+1})$. Ezt a mi esetünkben ki tudnánk számítani J_α második momentumával mert:

$$\mathbb{E}(J_\alpha^2) = \mathbb{E}(d_{k,n}^2 + 2d_{k,n}d_{k,n+1} + d_{k+1,n}^2) = \mathbb{E}(d_{k,n}^2) + 2\mathbb{E}(d_{k,n}d_{k,n+1}) + \mathbb{E}(d_{k+1,n}^2) \quad (41)$$

Így, ezt a két eredményt használva előtudnánk állítani:

$$Corr(d_{k,n}, d_{k+1,n}) = \frac{Cov(d_{k,n}, d_{k+1,n})}{\sigma_{d_{k,n}}\sigma_{d_{k+1,n}}} \quad (42)$$

Ehhez tehát meg kéne találnunk a $J_{k,n}$ második momentumait. Ugyanakkor, mint [3]-ban, a $J_\alpha(\delta)$ határsűrűségfüggvény amely a tipikus ingadozás esetére vonatkozik egy δ^{-3} hatvány törvényként cseng le. Nevezetesen, ha $\delta \rightarrow \infty$ akkor:

$$J_\alpha(\delta) \approx \frac{12}{\pi\sqrt{(1-\alpha)\alpha}} \frac{1}{\delta^3} \quad (43)$$

Ebből látszik, hogy $\mathbb{E}(J_\alpha^2) = \infty$ ahogy említettük a bevezetésben. Ebből következik, hogy az egynél magasabb momentumokat egy nagy eltéréses regime írja le és ezért egy új skálázást kell találnunk δ -ra hogy ezt vizsgáljuk meg.

Jelen dolgozat beadási határ idejéig még nem sikerült pontosan levezetnünk a nagy eltérés esetre a sűrűségfüggvényt, hogy ezt végre tudjuk hajtani. Ezért, a következő heurisztikus érvelést használjuk, hogy szemléltessük mi a sejtessünk az említett korreláció viselkedésére:

A (42) képletre bevezetve egy tetszőleges v konstans elvégezzük a következőt:

$$\int_0^{v\sqrt{n}} \delta^2 \frac{12}{\pi\sqrt{(1-\alpha)\alpha}} \frac{1}{\delta^3} d\delta = \frac{12}{\pi\sqrt{(1-\alpha)\alpha}} \left(\frac{\log n}{2} + \log v \right) \quad (44)$$

Amiből látszik, hogy $\log v$ egy konstans kisebb rendű tag, így valóban tetszőleges értéket vehet fel. Ezért látjuk, hogy a második momentum az

$$\frac{6}{\pi\sqrt{(1-\alpha)\alpha}} \frac{\log n}{n} \quad (45)$$

És ez egyben a szórásnégyzet is lesz, mert a várható érték $\frac{1}{n}$ nagyságrendű tehát elhanyagolható ezek mellett.

Végül ezekkel és a többi [3]-ban bevezetett $d_{k,n}$ momentumával meghatározzuk a következő korrelációs együtthatót:

$$\text{Corr}(d_{k,n}, d_{k+1,n}) = \frac{\text{Cov}(d_{k,n}, d_{k+1,n})}{\sigma_{d_{k,n}} \sigma_{d_{k+1,n}}} = \frac{\mathbb{E}(J_{k,n}^2) - \mathbb{E}(d_{k,n}^2) - \mathbb{E}(d_{k+1,n}^2)}{2\sigma_{d_{k,n}} \sigma_{d_{k+1,n}}} \quad (46)$$

Használva [3]-bol hogy

$$\mathbb{E}(d_{k,n}^2) \approx \frac{\log n}{\pi n \sqrt{\alpha(n-\alpha)}} \quad (47)$$

Végül azt kapjuk hogy:

$$\text{Corr}(d_{k,n}, d_{k+1,n}) = \frac{\frac{6 \log(n)}{2 \left((\pi \sqrt{(1-\alpha)\alpha}) n \right)} - \frac{\log(n)}{\pi \sqrt{\alpha(1-\alpha)n}}}{\frac{4 \log(n)}{\pi \sqrt{\alpha(1-\alpha)n}}} = \frac{1}{2} \quad (48)$$

Ahol mindenhol használtuk hogy $\sigma = \sqrt{2}$.

Ez a korábbiakban említett sejtés a korrelációs együttható értékéről.

4. Konkluzió

Ebben a dolgozatban egy n lépesű Laplace eloszlású növekményekkel rendelkező véletlen bolyongás két masodszomszédos maximumának az együttes eloszlását és az ezek közötti ugrás momentumait vizsgáltuk. A [3] és [4]-ban bevezetett módszert követve találtunk egy explicit kifejezést a két masodszomszédos közötti ugrás határ sűrűségfüggvényét J_α a bolyongás egy tetszőleges α kvantilis közelében. Ezzel meghatároztuk a két masodszomszédos közötti ugrás várható értéket és megállapítottuk, hogy valóban kétszer annyi mint amit a [3]-ban a szerzők találtak.

A második momentum már ebből a sűrűségfüggvényből nem számítható ki, mert a hatványtörvény lecsengése miatt divergens lesz. Ez azt jelenti, hogy egy nagy eltéréseket kell vizsgálni a második momentum pontos kiszámításához. Ugyanakkor, jelen dolgozat határideje előtt ezt még nem tudtuk elvégezni. Helyette, egy heurisztikus érveléssel szemléltettük, hogy mit sejtünk a két masodszomszédos közötti ugrások korrelációs együttható értékéről. A természetes következő lépés az, hogy a másodikmomentumot is precízen fejezzük ki

Irodalomjegyzék

- [1] Lasko Basnarkov és tsai. “Correlation patterns in foreign exchange markets”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 525 (2019), 1026–1037. old.
- [2] Matteo Battilana, Satya N Majumdar és Gregory Schehr. “Gap statistics for random walks with gamma distributed jumps”. *arXiv preprint arXiv:1711.08744* (2017).
- [3] Bertrand Lacroix-A-Chez-Toine, Satya N Majumdar és Grégory Schehr. “Gap statistics close to the quantile of a random walk”. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 52.31 (2019), 315003. old.
- [4] Grégory Schehr és Satya N Majumdar. “Universal order statistics of random walks”. *Physical review letters* 108.4 (2012), 40601. old.