Centrális határeloszlás-tétel az öntaszító bolyongásra három és magasabb dimenzióban I.

Vető Bálint

doktoranduszi beszámoló

2010. május 27.

Tartalom

Bemutatkozás

doktorandusz 2006 óta, doktorjelölt
Témavezető: Tóth Bálint
PhD-téma címe: Hosszú memóriájú bolyongások aszimptotikus viselkedése

Publikációk: 3 megjelent és 2 beküldött cikk, 1 Wolfram-demonstráció
Kutatás: centrális határeloszlás-tétel öntaszító bolyongásra, Horváth Illéssel és Tóth Bálinttal közös munka (2008 óta)

Oktatás: 2002 óta, Sztochasztika Tanszéken 2003 óta folyamatosan
Tárgyak: analízis, valószínűségszámítás, számítástudomány, algoritmuselmélet, feladatmegoldó szeminárium (2006 óta folyamatosan)

Bevezetés

D. Amit, G. Parisi, L. Peliti, 1983

$X(t)$ öntaszító bolyongás: folytonos idejű ugró folyamat a $\mathbb{Z}^d$ rácson első szomszéd ugrásokkal.

Lokális idő (kezdőértékkel): $t > 0$, $x \in \mathbb{Z}^d$

$$l(t,x) := l(0,x) + |\{s \in [0,t] : X(s) = x\}|.$$

Ugrási ráták:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(X(t+\mathrm{d}t) = y \;\middle|\; \text{múlt}, X(t) = x\right) \\ = \mathbb{1}_{\{|y-x|=1\}} w(l(t,x) - l(t,y))\,\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t),\end{aligned}$$

ahol $w : \mathbb{R} \to (\gamma, \infty)$ növekvő, sima rátafüggvény, $\gamma > 0$.

Öntaszítás: a bolyongó nagyobb eséllyel megy korábban kevesebbet látogatott területek felé.

Korábbi eredmények

Dimenziófüggő viselkedés:

$d = 1$ $X(t) \sim t^{2/3}$, nemszokványos határfolyamat

- határeloszlás-tétel a modell egy változatára (B. Tóth, 1995)
- határfolyamat konstrukciója (B. Tóth, W. Werner, 1998)
- egy további változat leírása, határeloszlás-tétel (B. Tóth, B. V., 2009)

$d = 2$ $X(t) \sim t^{1/2}(\log t)^{\xi}$, $\xi =?$, Gauss határfolyamat

- részeredmények (B. Valkó, 2009)

$d \geq 3$ $X(t) \sim t^{1/2}$, Gauss határfolyamat

- centrális határeloszlás-tétel (I. Horváth, B. Tóth, B. V., 2010)

Folytonos állapotterű változat: öntaszító Brown-féle polimer, három és magasabb dimenzióban centrális határeloszlás-tétel (I. Horváth, B. Tóth, B. V., 2009)

Környezet a bolyongó helyzetéből nézve

$X(t)$ bolyongás dinamikusan változó véletlen közegben

- a közeg maga a lokális idő az egyes pontokban
- a közeget maga a bolyongó változtatja

$$\eta(t) = (\eta(t,x))_{x\in\mathbb{Z}^d} \qquad \eta(t,x) = l(t, X(t)+x)$$

Ez önmagában Markov-folyamat az

$$\Omega = \{\omega = (\omega(x))_{x\in\mathbb{Z}^d} : \omega(x) \in \mathbb{R}\}$$

függvénytéren. Nevezzük ezt a folyamatot környezetfolyamatnak.

Infinitezimális generátor

Az $\eta(t)$ környezetfolyamat infinitezimális generátorát $\mathcal{L}^2(\Omega, \pi)$ sima függvényein a

$$Gf(\omega) = \partial f(\omega) + \sum_{|e|=1} w(\omega(0) - \omega(e))(f(\tau_e \omega) - f(\omega))$$

kifejezés értelmezi, ahol

$$\partial f(\omega) = \frac{\partial f}{\partial \omega(0)}(\omega)$$

a lokális idő növekedését adja az aktuális pozícióban. A másik tag az ugrásoknak felel meg, melyek a környezetfolyamat eltolásai.

$$\tau_z \omega(x) = \omega(x + z).$$

Stacionárius mérték

Rátafüggvény páros és páratlan része:

$$s(u) = \frac{w(u) + w(-u)}{2} - \gamma, \qquad r(u) = \frac{w(u) - w(-u)}{2}.$$

A páratlan rész segítségével

$$R(u) = \int_0^u r(v)\,\mathrm{d}v.$$

Legalább három dimenzióban a

$$\mathrm{d}\pi(\omega) = Z^{-1} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d, |x-y|=1} R(\omega(x) - \omega(y)) \right\} \mathrm{d}\omega$$

képlettel Ω-n egyértelműen definiálható valószínűségi mérték. Ha $r(u) = u$, akkor $R(u) = u^2/2$, és ha $d \geq 3$, akkor π a 0 tömegű szabad Gauss-mező $\mathbb{Z}^d$-n, melynek kovarianciamátrixa $(-\Delta)^{-1}$.

Nagy számok törvénye, diffuzív korlátok

Állítás

Az $\eta(t)$ környezetfolyamat stacionárius és ergodikus az Ω állapottéren a π mértékkel.

Következmény

A környezet π-mm. kezdőértékére

$$\frac{X(t)}{t} \to 0.$$

Tétel (I. Horváth, B. Tóth, B. V., 2010)

A rátafüggvényre vonatkozó technikai feltételek mellett

$$\begin{aligned} 0 < \gamma &\le \inf_{e\in\mathbb{R}^d, |e|=1} \liminf_{t\to\infty} t^{-1}\mathbf{E}\left((e\cdot X(t))^2\right) \\ &\le \sup_{e\in\mathbb{R}^d, |e|=1} \limsup_{t\to\infty} t^{-1}\mathbf{E}\left((e\cdot X(t))^2\right) < \infty. \end{aligned}$$

Centrális határeloszlás-tétel

Tétel (I. Horváth, B. Tóth, B. V., 2010)

Ha

$$r(u) = u \qquad \textit{ill.} \qquad s(u) = s_4 u^4 + s_2 u^2 + s_0,$$

és s_4/γ *elég kicsi, akkor a*

$$\sigma_{kl}^2 = \lim_{t\to\infty} t^{-1} \mathbf{E}\left(X_k(t) X_l(t)\right)$$

aszimptotikus kovarianciák léteznek és nemelfajultak. Továbbá az

$$X_N(t) = N^{-1/2} X(Nt)$$

diffuzív módon skálázott elmozdulás véges dimenziós peremeloszlásai a d dimenziós $(\sigma_{kl})_{kl}$ kovarianciamátrixú Brown-mozgásához tartanak.

Infinitezimális generátor felbontása

Szimmetrikus és antiszimmetrikus részre bontás:

$$S = -\frac{G+G^*}{2}, \qquad A = \frac{G-G^*}{2}.$$

Legyen

$$T_z f(\omega) = f(\tau_z \omega).$$

Ekkor

$$S = -\gamma\Delta + S_1,$$
$$\Delta = \sum_{|e|=1} (T_e - I),$$
$$S_1 f(\omega) = -\sum_{|e|=1} s(\omega(0)-\omega(e))(T_e f(\omega) - f(\omega)),$$
$$Af(\omega) = \partial f(\omega) + \sum_{|e|=1} r(\omega(0)-\omega(e))(T_e f(\omega) - f(\omega)).$$

Jaglom-reverzibilitás, ergodicitás

Legyen

$$Jf(\omega) = f(-\omega)$$

az összes lokális idő ellentettjére váltása. Ezzel

$$JSJ = S, \quad JAJ = -A, \quad JGJ = G^*,$$

amiből a π mérték stacionaritása rögtön következik.
Másrészt az

$$\eta^*(t) = -\eta(-t)$$

megfordított idejű és értékű folyamat eloszlásban megegyezik az eredeti η folyamattal.
Ergodicitás:

$$(f, -Gf) = (f, Sf) \geq \gamma(f, -\Delta f) = \frac{1}{2} \sum_{|e|=1} \|(T_e - I)f\|^2,$$

ezért $Gf = 0$-ból $(T_e - I)f = 0$ következik, vagyis f konstans.

Diffuzív alsó korlát

Tekintsük az

$$X(t) = N(t) + M(t) + \int_0^t \varphi(\eta(s))\,\mathrm{d}s$$

felbontást, ahol $N(t)$ a szomszédokra konstans γ rátával ugrásnak megfelelő martingál, $M(t)$ pedig a $w - \gamma$ rátával való ugrásokhoz tartozó martingál.

$$\varphi_k(\omega) = w(\omega(0) - \omega(e_k)) - w(\omega(0) - \omega(-e_k))$$

az $N(t) + M(t)$ martingál feltételes sebessége.
$N(t)$ korrelálatlan a felbontás többi tagjával, ezért

$$\mathbf{E}\left((X(t))^2\right) = \underbrace{\mathbf{E}\left((N(t))^2\right)}_{d\gamma t} + \underbrace{\mathbf{E}\left(\left(M(t) + \int_0^t \varphi(\eta(s))\,\mathrm{d}s\right)^2\right)}_{\geq 0}.$$

Vége

Köszönöm a figyelmet!