Matematika B4 gyakorlat

1. feladatsor

2004. febr. 12.

1. Öt házaspár egy félkör alakú asztalnál foglal helyet.
   (a) Hányféle sorrendben ülhetnek le?
   (b) Hányféle sorrendben ülhetnek le, ha nem ül férfi férfi mellé, se nő nő mellé?
   (c) Hányféle sorrendben ülhetnek le, ha a házaspárok egymás mellé ülnek?
   (d) Mi a válasz az előbbi kérdésekre, ha kör alakú az asztal?
2. Egy versenyen 23 versenyző indul. Hányféle sorrend alakulhat ki? Hányféle sorrend lehet a dobogón?
3. Hány különböző autórendszám készíthető három betűből és három számjegyből? Hát 2 betűből és 4 számjegyből? Hányszor több kocsi különböztethető meg az első módszerrel?
4. Hatszor dobunk egy kockával. Hány olyan dobássorozat lehet, amelyben dobtunk hatost?
5. Az 52 lapos francia kártyából kiosztva 5 lapot hányféleképpen lehet egy párunk, két párunk, drillünk, fullunk, pókerünk, royal flushünk?
6. Egy vendéglő egyik asztalánál 8 vendég ül. Sört, süteményt és kávét rendelnek, mindenki egyet-egyet a három közül, és mindegyikből összesen legalább egyet. Hányféle rendelést adhatnak le?
7. Három kockát dobunk fel egyszerre. Az azonos színű kockák megkülönböztethetetlenek. Hány különböző kimenetele lehet a kísérletnek,
   (a) ha a kockák azonos színűek,
   (b) ha két kocka fekete, a harmadik fehér,
   (c) ha mindhárom kocka különböző színű?
8. Bizonyítsuk a binomiális együtthatókra a következő azonosságot:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Matematika B4 gyakorlat

2. feladatsor

2004. febr. 19.

1. Dobókockával dobálunk. Mi a valószínűsége annak, hogy a harmadik ötöst a nyolcadikra dobjuk?

2. Ádám és Éva két azonos erejű pingpongjátékos. Melyik esemény valószínűbb: Ádám 4 meccsből (pontosan) 3-at nyer meg, vagy Éva 8 meccsből (pontosan) 5-öt?

3. 1000 termék közül 50 selejtes. Találomra kiveszünk tízet. Mi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztottak közül lesz selejtes, ha
   (a) visszatevéssel választunk?
   (b) visszatevés nélkül választunk?

4. A sakktáblán nyolc bástyát helyezünk el találomra. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egyik bástya sem üti a másikat?

5. Mi a valószínűsége, hogy az ötös lottó sorsolásán a kihúzott legnagyobb és legkisebb szám különbsége éppen 42?

6. (a) Bridzsben mi a valószínűsége annak, hogy Északnak és Délnek együttesen k db ásza van ($k = 0, 1, 2, 3, 4$)?
   (b) És annak, hogy Észak kezében két 4 lapos, egy 3 lapos és egy 2 lapos szín legyen?

7. Egy kulcskarikán n kulcs van, amelyek közül csak egy illik a kinyitandó zárba. Találomra (véletlen sorrendben) próbáljuk ki a kulcsokat – ismétlés nélkül mindaddig, amíg a jó kulcsra rá nem lelünk. Kísérletünk $1, 2, \ldots, n$ próbálkozás után érhet véget. Mutassuk meg, hogy mind az n eredménynek azonosan $1/n$ a valószínűsége.

8. András és Béla (ilyen sorrendben) felváltva dobnak szabályos dobókockával. Az nyer, aki először dob ötöst. Mi a valószínűsége, hogy András nyer? És annak, hogy Béla nyer?

Matematika B4 gyakorlat

3. feladatsor

2004. febr. 26.

1. Tízszer dobunk egy kockával. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az $1, 2, \ldots, 6$ eredmények mindegyike legalább egyszer előfordul?

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbb{P}(A) = 0,7$ és $\mathbb{P}(B) = 0,8$, akkor $\mathbb{P}(A|B) \geq 0,625$. (Segítség: próbáljunk $\mathbb{P}(A \cap B)$-re alsó becslést adni!)

3. Tudjuk, hogy egy barátunk 2/3 valószínűséggel tartózkodik kocsmában. Öt kocsma bármelyikében egyenlő valószínűséggel lehet. Négyben már megnéztük, de nem volt ott. Mi a valószínűsége, hogy az ötödikben megtaláljuk?

4. Húsz cseresznye közül már 15-ből eltávolítottuk a magot. Egy mohó kismalac válogatás nélkül felfal öt cseresznyét. Ha ezután véletlenszerűen kiválasztunk egy cseresznyét,
   (a) mi a valószínűsége, hogy van benne mag?
   (b) feltéve, hogy van benne mag, mi a valószínűsége, hogy a malac legalább egy magot megevett? (Segítség: előbb a komplementer esemény valószínűségét számítsuk ki!)

5. Egy tesztvizsgán minden kérdésre igen vagy nem lehet a válasz. Három eset lehet: tudjuk a helyes választ – ennek $\frac{4}{7}$; azt hisszük, hogy tudjuk a helyes választ, de mégsem – ennek $\frac{2}{7}$; illetve nem tudjuk a helyes választ – ennek $\frac{1}{7}$ a valószínűsége, és ekkor találomra ($\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel) válaszolunk igent vagy nemet. Mi a valószínűsége, hogy ha helyesen válaszolunk egy kérdésre, az azért van, mert tudjuk a helyes választ?

6. Vándorlásai közben Odüsszeusz egyszer egy hármas útelágazáshoz ért. Tudta, hogy az egyik út Athénbe, a másik Mükénébe, a harmadik pedig Spártába vezet, de nem tudta, hogy melyik hová. Azt is tudta, hogy az athéniek átlagosan csak minden harmadik alkalommal mondanak igazat, a mükénéiek minden második alkalommal hazudnak, a spártaiak viszont becsületesek, sohasem hazudnak. Kockadobással döntötte el, hogy melyik utat válassza, méghozzá egyenlő esélyt adva mindháromnak. Ezután ment, ment, mendegélt, míg egy városba nem ért. Ott az első szembejövő embertől megkérdezte, mennyi kétszer kettő, és azt a választ kapta, hogy négy. Mi a valószínűsége annak, hogy Odüsszeusz végülis Athénbe érkezett?

7. Egy vetélkedő főnyereménye egy gépkocsi, amely három zárt ajtó valamelyike mögött van elrejtve. A vetélkedő játékos kiválaszt egy ajtót, de mielőtt a játékvezető elárulná, hogy van-e az ajtó mögött gépkocsi, kinyit a másik két ajtó közül egy olyat, amelyik mögött nincs semmi, majd felajánlja a játékosnak, hogy újból választhat a még csukott két ajtó közül. Érdemes-e a játékosnak változtatnia az eredeti választásán?

Matematika B4 gyakorlat

4. feladatsor

2004. márc. 4.

1. Egy kollégiumban egy évben p valószínűséggel üt ki tűz. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy n éves periódusban legalább egy tűzeset előfordul?

2. Két kockával dobunk. Határozzuk meg a dobott számok összegének – mint valószínűségi változónak – az eloszlását!

3. Számoljuk ki a
$$p(k) = \frac{1}{30}k^2 \qquad k = 1, \dots, 4$$
képlettel értelmezett diszkrét eloszlás várható értékét, szórását és móduszát!

4. Egy piaci árus kosarában 100 fej gomba van, ezek közül 4 mérgező. Egy háziasszony az öttagú család minden tagjának egy-egy fej gombát vásárol ebédre. Adjuk meg a gombamérgezést kapott családtagok számának eloszlását!

5. Egy 22 fős osztályban nyolcan nem készültek egy tárgyból. A tanár 7 tanulót feleltet. Adjuk meg a készületlen felelők számának eloszlását!

6. Laci bankjegyeit három egyforma borítékban tartja: az első borítékban két ezres, a másodikban egy ezres és egy kétezres, a harmadikban egy ezres és három kétezres van. Laci találomra elővesz egy borítékot és abból találomra kivesz egy bankjegyet.

   (a) Mennyi a valószínűsége, hogy ezrest húzott ki? (ZH, 2002.)

   (b) Feltéve, hogy ezrest húzott, milyen valószínűséggel származik az első borítékból?

7. Egy „amerikai" párbaj szabályai a következők: A párbajozó 50 fehér és 50 piros golyót oszthat el két urnában tetszés szerint. Ezután bekötött szemmel húz $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel valamelyik urnából. Ha fehér golyót húz, akkor életben marad, ha pirosat, akkor meghal. Hogyan ossza el a két urnában a golyókat, ha kedves az élete?

Matematika B4 gyakorlat

5. feladatsor

2004. márc. 11.

1. Két játékos közül az első egyszerre 3 érmét dob fel, a második pedig kettőt. Az nyer, aki több fejet dobott, és nyereségként megkapja a másik játékos feldobott érméit. Ha a fejek száma azonos, újra dobnak. Mi az első játékos nyereségének várható értéke?

2. Egy bolha ugrál a számegyenesen. Az origóból indul, másodpercenként egységnyit ugrik jobbra vagy balra $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel. Jelölje X_n a bolha helyét n ugrás után. Határozzuk meg (páros n-re) X_n eloszlását!

3. Négy postaládában összesen 12 levelet találtak. Feltéve, hogy az egyes levelek azonos valószínűséggel kerültek a négy postaláda bármelyikébe, határozzuk meg az első postaládába került levelek számának eloszlását! Milyen eloszlást kapunk, ha feltesszük, hogy a harmadik postaládába 6 levél került?

4. Egy futószalagot leállítanak, valahányszor a gyártásnál hibás termék érkezik rajta. A selejt valószínűsége p. Adjuk meg

   (a) az első n termék közül selejtesek számának,

   (b) a selejtszériák hosszának eloszlását!

5. Átlagosan hány mazsolának kell egy sütiben lennie ahhoz, hogy egy véletlenszerűen választott sütiben legalább 99% valószínűséggel legyen (legalább egy szem) mazsola?

6. Az 1200 fős diákszállóban annak a valószínűsége, hogy valaki megbetegszik és a betegszobában ágyat foglal, $0,002$. Hány ágyas betegszobát kell berendezni, hogy legfeljebb 1% valószínűséggel fordulhasson elő, hogy egy beteg nem kap ágyat? (Használjunk Poisson közelítést!)

7. Egy városban a napi 4 tűzeset gyakorisága megegyezik a napi 5 tűzeset gyakoriságával. Mennyi a valószínűsége, hogy egy napon legfeljebb 2 tűzeset történik?

8. Háromszor olyan valószínű, hogy egy évben két ember öli magát a Szajnába, mint az, hogy öt. Mi a valószínűsége, hogy senki nem lesz így öngyilkos egy év alatt?

9. Egy augusztusi éjszakán átlagosan 10 percenként láthatunk hullócsillagot. Mi annak a valószínűsége, hogy 15 perc alatt legalább kettőt megfigyelünk?

Matematika B4 gyakorlat

6. feladatsor

2004. márc. 18.

1. Egy urnában 20 piros és 30 kék golyó van. Visszatevéssel húzva mi a valószínűsége, hogy
   (a) a 10-edik húzásnál kerül először a kezembe piros golyó,
   (b) a 10-edik húzásnál kerül harmadszor a kezembe piros golyó,
   (c) 10 golyóból 4 pirosat és 6 kéket húzok?
2. Ha Péter a kockával páratlant dob, 10 Ft-ot veszít, ha hatost dob, 40 Ft-ot nyer, ha kettest vagy négyest dob, újból dobhat. A második dobásnál 10 Ft-ot nyer, ha párost dob, 20-at veszít, ha páratlant dob. Előnyös-e ez a játék számára?
3. Egy embernek n kulcsa van, melyek közül egyetlen egy nyit egy bizonyos ajtót. Emberünk véletlenszerűen próbálkozik a kulcsokkal mindaddig, amíg rá nem talál a megfelelő kulcsra. Határozzuk meg a próbálkozások számának várható értékét, ha
   (a) a sikertelen kulcsokat nem választja külön (visszatevéses húzások),
   (b) a sikertelen kulcsokat kizárja a további próbálkozások során (visszatevés nélküli húzások).
4. Határozzuk meg találataink számának várható értékét az ötös lottón, ha szelvényünket találomra töltjük ki!
5. Az alábbiak közül melyek lehetnek az X abszolút folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvényei? Ahol lehet, számoljuk ki a sűrűségfüggvényt, a mediánt és a $\mathbb{P}(0 < X < 1)$ valószínűséget is!

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0 \\ \cos x & \text{ha } 0 < x \le \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{ha } \frac{\pi}{2} < x \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 0 \\ \sin x & \text{ha } 0 < x \le \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{ha } \frac{\pi}{2} < x \end{cases}$$

$$H(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x$$

6. Az alábbiak közül melyek lehetnek abszolút folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvényei? Ahol lehet, számoljuk ki az eloszlásfüggvényt és a mediánt!

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{ha } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{ha } x > 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \sin x & \text{ha } -\frac{\pi}{2} \le x \le \pi \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \qquad i(x) = \begin{cases} 4x^3 e^{-x^4} & \text{ha } x \ge 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Matematika B4 gyakorlat

7. feladatsor

2004. márc. 25.

1. Olyan mérleget használunk, ami gramm pontossággal kerekítve adja meg az eredményt. Mennyi a valószínűsége, hogy a hiba
   (a) legfeljebb 0,1 g,
   (b) legalább 0,3 g,
   (c) több, mint 0,1 g, de kevesebb, mint 0,3 g?

2. Egy kalapácsvető fogadásból azzal próbálkozik, hogy néhány forgás után bekötött szemmel dobja el a kalapácsot. A sportolót 0^o-tól 300^o-ig védőháló veszi körül. Mekkora a valószínűsége, hogy a hálón kívülre sikerül dobnia, ha a dobás iránya 0^o-tól 360^o-ig egyenletes eloszlású?

3. A $(0,1)$ intervallumból függetlenül és egyenletes eloszlással három számot választunk. Milyen a legnagyobb választott szám eloszlása?

4. Egy lakáshirdetésre egymástól függetlenül érkeznek árajánlatok, melyek nagysága azonos eloszlásúnak tekinthető közös F eloszlásfüggvénnyel. Az eladó az első olyan ajánlatot elfogadja, ami eléri a 10 millió Ft-ot. Írjuk fel a lakás eladásáig beérkező ajánlatok számának eloszlását!

5. Egy utcai telefonfülke foglalt, amikor odaérek. A beszélgetés hossza véletlen, percekben mérve $\frac{1}{3}$ paraméterű exponenciális eloszlású. Mi a valószínűsége, hogy 5 perc múlva sem kerülök sorra? Mi a helyzet akkor, ha tudjuk, hogy odaérkezésünkkor már 2 perce tart a beszélgetés?

6. Egy örökifjú tulajdonságú villanykörténél $\frac{2}{3}$ annak a valószínűsége, hogy 2000 óránál tovább üzemel. Egy városban 200 ilyen égőt helyezünk el. Mi a valószínűsége annak, hogy 200 óra elteltével pont 150 égő világít?

7. Bizonyítsuk az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdoságát, azaz tetszőleges a és b nemnegatív valós számokra
$$\mathbb{P}(X < a + b | X \geq a) = \mathbb{P}(X < b),$$
ahol X exponenciális eloszlású!

Matematika B4 gyakorlat

8. feladatsor

2004. ápr. 1.

1. Egy normális eloszlás várható értéke 5, és még azt is tudjuk róla, hogy a $[4,6]$ intervallum mértéke 0,55. Mennyi az eloszlás szórása?

2. Az "1 kg" feliratú cukroszacskóban levő cukor tömege 1 várható értékű $0,02$ szórású normális eloszlást követ. Mi a valószínűsége, hogy a zacskóban lévő cukor tömege $0,99$ és $1,02$ közé esik?

3. Azt mondják a zöldségesek, hogy 100 esetből körülbelül ötször fordul elő, hogy egy névlegesen 50 kg-os zsák krumpli súlya az előírttól 50 dekával többel tér el. Normális eloszlás alkalmazásával mire következtethetünk ebből a zsákok súlyának szórására vonatkozóan?

4. Százszor feldobunk egy pénzérmét. Mennyi a valószínűsége, hogy az írást eredményező dobások száma 45 és 50 közé esik?

5. A Φ függvényt használva számítsd ki a következő kifejezés közelítő értékét:

$$\sum_{k=200}^{500} \binom{1000}{k} \frac{1}{2^{1000}}$$

6. Apró szögeket automata csomagol. Az egy csomagba kerülő szögek számának várható értéke 5000, szórása 10. A Csebisev-egyenlőtlenség segítségével becsüld meg azt a valószínűséget, hogy egy csomagban a szögek valódi száma az 5000-től 50-nél is többel tér el!

7. Véletlenországban egy bank pénztáránál az egyik napon előreláthatóan 60 ügyfél vesz ki pénzt. A pénztárnál az átlagos kifizetés ügyfelenként 50 tallér, 20 tallér szórással. Mennyi pénzt tartson kasszájában a pénztáros, ha $0,95$ valószínűséggel, minden fennakadás nélkül szeretné kielégíteni az ügyfelek igényeit?

Matematika B4 gyakorlat

9. feladatsor

2004. ápr. 8.

1. 1000 házasság közül kb. 400 válással végződik. 60 véletlenül kiválasztott házasság esetén mi a válások számának
   (a) várható értéke,
   (b) legvalószínűbb értéke,
   (c) szórása?

2. Számoljuk ki a
$$p(k) = \frac{1}{30}k^2 \qquad k = 1, \ldots, 4$$
képlettel értelmezett diszkrét eloszlás második momentumát és szórását!

3. Egy hibátlan érmével dobunk háromszor. Jelölje X ill. Y a dobott fejek ill. írások számát. Számoljuk ki a $Z := XY$ valószínűségi változó várható értékét és szórását!

4. Legyen az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye
$$f(x) = \frac{3}{8}x^2 \quad (0 < x < 2).$$
Határozzuk meg az eloszlás várható értékét, mediánját és szórását!

5. Egy eloszlás sűrűségfüggvénye a következő:
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 1 \\ \frac{2}{x^3} & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$
Igazoljuk, hogy az eloszlás várható értéke létezik, de a szórása nem!

6. Egy valószínűségi változó eloszlásfüggvénye
$$F(x) = \sin x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right).$$
Mennyi a várható értéke és a mediánja?

7. Egy sorompó a nap 24 órájából 9-et függőlegesen áll, 12-t vízszintesen. 3 órányi időt vesz naponta igénybe, amíg le és fel húzogatják, ezalatt forgása egyenletes szögsebességű. Mi a sorompókar vízszintessel bezárt szögének várható értéke?

Matematika B4 gyakorlat

10. feladatsor

2004. ápr. 15.

1. Egy pontosnak tekinthető ismerősünkkel 7 órakor van találkozónk. Érkezése egyenletes eloszlású, várható értéke 7 óra, szórása öt perc. Melyik az a legkésőbbi időpont, ami előtt nulla valószínűséggel érkezhet?

2. Oszkár átlagosan 4 percet beszél telefonon, az időtartamot exponenciális eloszlásúnak tekinthetjük. Hogyan tippeljük meg a beszélgetés hosszát, ha a tipp és a valódi időtartam közötti eltérés

   (a) abszolút értékét,

   (b) négyzetét

   szeretnénk minimalizálni?

3. A következő koordiátájú pontokból kaphatunk rádióüzenetet a megadott valószínűségekkel:

Y,X	-1	2
4	1/6	1/3
0,5	1/12	1/6
0	1/12	1/6

   Adjuk meg a koordináták eloszlását! Függetlenek-e a koordináták?

4. Legyen az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlásának sűrűségfüggvénye:

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{5}(x+xy+y) & \text{ha } 0<x<1, 0<y<1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

   Határozzuk meg a peremsűrűségeket!

5. A $0<x<1, x<y<\frac{1}{x}$ tartományra koncentrált síkbeli valószínűségi eloszlás sűrűségfüggvénye $h(x,y)=\frac{2x}{y}$.

   (a) Határozzuk meg a vetületeloszlásokhoz tartozó sűrűségfüggvényeket!

   (b) Mennyi tömeg koncentrálódik a $0 \le x, y \le 1$ négyzetre?

6. Mennyi a valószínűsége, hogy egy $h(x,y)=6e^{-2x-3y}$ $(x>0, y>0)$ sűrűségfüggvényű valószínűségi változó a $B=\{(x,y): x+2y \le 5\}$ halmazba esik?

Matematika B4 gyakorlat

11. feladatsor

2004. ápr. 29.

1. Jancsi és Juliska nem beszélte meg előre a találkozásuk időpontját: mindketten 12 és 1 óra között egyenletes eloszlás szerint érkeznek a megbeszélt helyre. Ha a másik nincs ott, 10 perc várakozás után hazamennek. Milyen valószínűséggel találkoznak?

2. Egy botot két, egymástól függetlenül, egyenletesen választott helyen eltörünk. Mi a valószínűsége annak, hogy a középső darab hosszabb a bot felénél?

3. Háromszor dobunk egy szabályos dobókockával. Jelölje X a páros dobások számát, Y pedig a dobott 6-osok számát.

   (a) Határozzuk meg (X, Y) együttes eloszlását!

   (b) Milyen lesz Y eloszlása az $X = 3$ feltétel mellett?

   (c) Számítsuk ki a $\mathbb{P}(X = 2|X + Y = 3)$ valószínűséget!

   (d) Független-e X és Y?

4. Az ötös lottón milyen a legkisebb szám legnagyobbra vonatkozó feltételes eloszlása, ha a legnagyobb szám 60?

5. Határozzuk meg a
$$h(x, y) = \frac{2x}{y} \qquad (x < y < \frac{1}{x}, 0 < x \leq 1)$$
sűrűségfüggvényű eloszlás rögzített y értékhez tartozó feltételes eloszlását!

6. X egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumon, Y eloszlása az $X = x$ feltétel mellett egyenletes a $(0, \sqrt{x})$ intervallumon. Számoljuk ki X-nek az $Y = y$ feltétel melletti feltételes sűrűségfüggvényét!

7. A bergengóc villanykörték izzószálában szennyeződésként kén is van, melynek grammokban mért mennyisége exponenciális eloszlású $\lambda = 2$ paraméterrel. Ha x gramm kén van az izzószálban, akkor a körte élettartama x paraméterű exponenciális eloszlásúnak vehető.

   (a) Határozzuk meg egy véletlenszerűen választott izzó élettartamának sűrűségfüggvényét!

   (b) A kén javítja vagy rontja a villanykörték élettartamát, esetleg független tőle?

Matematika B4 gyakorlat

12. feladatsor

2004. máj. 6.

1. Annak a valószínűsége, hogy egy év alatt nem zuhan le repülőgép sehol a világon, $\frac{1}{100}$. Ha egy gép lezuhan, $\frac{3}{4}$ valószínűséggel megtalálják a fekete dobozát. Milyen eloszlású lehet a megtalált fekete dobozok száma? Adjuk meg a megtalált fekete dobozok számának feltételes várható értékét feltéve, hogy n gép zuhant le!

2. Legyen az X egyenletes eloszlású -1 és 1 között, majd generáljuk Y-t $-|X|$ és $|X|$ között egyenletes eloszlással. Hogyan tippeljük ennek értékét, ha a különbség négyzetét szeretnénk minimalizálni? Mennyi lesz a hiba négyzete várhatóan?

3. X és Y együttes eloszlása a következő:

1	0,04	0,5
0	0,4	0,06
Y,X	0	1

Számítsuk ki a kovarianciájukat és a korrelációs együtthatót!

4. Az (X,Y) valószínűségi vektorváltozó feltételes sűrűségfüggvénye:

$$f(x|y) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1-y)}, \text{ ha } 0 \leq y \leq 1 \text{ és } y^2 \leq x \leq 1,$$

peremeloszlása pedig:

$$g(y) = 2(1-y), \text{ ha } 0 \leq y \leq 1.$$

Hogyan közelítsük Y ismeretében X-et, ha az átlagos eltérés négyzetét szeretnénk minimalizálni? Mi a válasz, ha lineáris függvénnyel tippelünk?

5. X Poisson eloszlású valószínűségi változó λ paraméterrel. Írjuk fel az $Y := 2X+1$ valószínűségi változó eloszlását és számítsuk ki az $\mathbb{E}(Y)$ várható értéket és a $\mathbb{D}^2(Y)$ szórásnégyzetet!

6. Legyen X a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg az $Y := X^{-1}$ valószínűségi változó eloszlás- és sűrűségfüggvényét!

7. Milyen eloszlás szerint válasszuk a kör R sugarát, ha azt akarjuk, hogy a területe $\lambda = 3$ paraméterű exponenciális eloszlást kövessen?

8. A számológép RND gombja egyenletes eloszlású véletlen számot generál 0 és 1 között. Hogyan transzformáljuk ezt a számot, ha 5 és 10 közötti egyenletes, ill. ha $\lambda = 5$ paraméterű exponenciális eloszlást szeretnénk kapni?

9. Igazoljuk, hogy ha a $(0, \frac{1}{2})$ középpontú 1 átmérőjű körön egyenletes eloszlással vett pontot $(0,1)$-ből az x-tengelyre vetítjük, akkor standard Cauchy eloszlát kapunk!