Matematika B1 gyakorlat

1. feladatsor

2003. szept. 19.

1. Ábrázoljuk a Gauss-féle számsíkon a következő komplex számokat és helyvektorukat: $z_1 = 3 - i$, $z_2 = 1 + 4i$, $z_3 = -2 + 3i$, $z_4 = -2 - 3i$

2. Állapítsuk meg, hogy a komplex számsík mely pontjai tesznek eleget az alábbi egyenlőtlenségeknek:

   (a) $\mathrm{Im}(z + i) > 2$

   (b) $\mathrm{Re}(2z) < 4$

   (c) $|z| < 2$

3. Számítsuk ki az alábbi két-két komplex szám összegét, különbségét, szorzatát és hányadosát:

   (a) $2 + 5i$ és $4 - 3i$

   (b) $1 - 3i$ és $-i$

4. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges z_1, z_2, z komplex számokra $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $z\overline{z} = |z|^2$, $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

5. Számítsuk ki a következő komplex számok abszolút értékét:

$$5 + 12i, \quad (-2 + 4i)^4, \quad \frac{(3 + 4i)(2 + i)}{(1 + 2i)(4 + 3i)}$$

6. Oldjuk meg a következő egyenleteket:

   (a) $x^2 - 6x + 13 = 0$

   (b) $x^4 - x^2 - 6 = 0$

   (c) $x^2 + 5 + \frac{6}{x^2} = 0$

7. (a) Írjuk át az alábbi komplex számokat trigonometriai alakba:

$$-8, \quad 1 + i, \quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$$

   (b) Ezeket pedig algebrai alakba:

$$5\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right), \quad 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

Matematika B1 gyakorlat

2. feladatsor

2003. szept. 26.

1. Számítsd ki az alábbi két komplex szám szorzatát és hányadosát trigonometrikus alakban:

$$2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right), \quad 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

2. Adjuk meg az alábbi kifejezések értékét algebrai alakban:
   (a) $(1+i)^{12}$
   (b) $(-2\sqrt{3}+2i)^{-9}$

3. Határozzuk meg az alábbi z komplex számok összes komplex n-edik gyökét:
   (a) $z = -1,\ n = 4$
   (b) $z = -243i,\ n = 5$

4. Számítsd ki annak a Gauss-féle számsíkra rajzolt szabályos háromszögnek a harmadik csúcsát, melynek két ismert csúcsa $z_1 = 1 + 4i$ és $z_2 = 5 + i$!

5. Oldjuk meg a következő egyenleteket:
   (a) $z^4 - z = 0$
   (b) $|z| + z = 2 + i$

6. Osszuk el maradékosan az alábbi polinomokat:
   (a) $x^5 + 3x^4 - 2x^2 - x + 8$ és $x + 2$
   (b) x^6 és $2x^2 - x + 3$

7. * Legyen a p valós együtthatós polinom, melynek gyöke a z komplex szám ($p(z) = 0$). Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\overline{z}$, z konjugáltja is gyöke p-nek, vagyis $p(\overline{z}) = 0$!

8. * Az előző feladat eredményének segítségével lássuk be, hogy az algebra alaptételéből következik az alábbi állítás: Minden valós együtthatós polinom felbontható valós első- és másodfokú polinomok szorzatára!

Matematika B1 gyakorlat

3. feladatsor

2003. okt. 3.

1. Keressünk az alábbi sorozatok számára $\varepsilon = 0,001$-hez tartozó küszöbindexet:
$$a_n = \frac{2n-1}{2n+1}, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 1; \quad b_n = \frac{4^n}{3\cdot 4^n + 1}, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{3}.$$

2. A konvergencia definíciója alapján bizonyítsuk be, hogy a következő sorozatok konvergensek:
$$a_n = \frac{n}{n^3+1}, \quad b_n = \sqrt{\frac{n+4}{n}}.$$

3. Döntsük el, hogy a következő sorozatok konvergensek-e:
$$a_n = \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2n\pi}}, \quad b_n = \frac{4^{n-1}}{3^n + 2^{n+1}}.$$

4. Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét, ha létezik:
$$a_n = \frac{1000n^3 + 20n^2}{0,001n^4 + 100n^2}, \quad b_n = \frac{(n-1)^3 - (n+1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}, \quad c_n = \sqrt[4]{\frac{2^n+1}{n+2^n}},$$
$$d_n = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}, \quad e_n = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n^2-1} - n)}, \quad f_n = \frac{\sqrt{n^3+3n^2} + \sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[4]{5n^6+2} + \sqrt[5]{n^7+3n^3}},$$
$$g_n = \sqrt[n]{5n^2 - 30n + 21} \ (n \geq 2), \quad h_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad i_n = \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

5. Bizonyítsuk be, hogy az $\sqrt[n]{n}$ sorozat korlátos és a harmadik tagjától kezdve monoton csökkenő, tehát konvergens!

6. Konstruáljunk olyan a_n és b_n sorozatokat, melyekre $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, és
   (a) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = r$, ahol $r \in \mathbb{R}$,
   (b) $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = s$, ahol $s \in \mathbb{R}^+$.

Matematika B1 gyakorlat

4. feladatsor

2003. okt. 10.

1. Ábrázold az alábbi függvényeket derékszögű koordinátarendszerben:

   (a) $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{ha} \quad -\pi \le x < 0 \\ 2 & \text{ha} \quad 0 < x \le 1 \\ \frac{1}{x-1} & \text{ha} \quad 1 < x \le 4 \end{cases}$

   (b) $g(x) = \log_2 |x+2|$,

   (c) $h(x) = \operatorname{arsinh}(x-3)$.

2. Mi a következő függvények értelmezési tartománya és értékkészletei?

   (a) $f(x) = \log_2 \log_3 \log_4 x$,

   (b) $g(x) = \cosh \arcsin \frac{x}{2}$,

   (c) $h(x) = \arctan \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

3. Invertálhatók-e az előző feladatban adott függvények? Ha igen, fejezzük ki az inverz függvényt! Mi az inverz függvény értelmezési tartománya és értékkészlete?

4. Az alábbi függvények közül melyek párosak, páratlanok vagy periodikusak? Periodikus esetben adjunk legkisebb periódust (ha lehet)!

   (a) $f(x) = x \operatorname{sign} x$,

   (b) $g(x) = \sin^2 \frac{x}{\pi}$

   (c) $h(x) = x\sqrt{x^2-1}$,

   (d) $i(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \quad \text{irracionális} \\ 1 & \text{ha} \quad x \quad \text{racionális} \end{cases}$.

5. Milyen geometriai transzformációkkal származtatható az $f(x)$ grafikonjából az $f(x+a)$, $|f(x)|$ és $f(|x|)$ $\quad (a \in \mathbb{R})$ függvények grafikonjai? (Feltesszük, hogy $f(x)$ az egész számegyenesen értelmezett.)

6. * Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\mathbb{R}$-en értelmezett függvény felírható egy páros és egy páratlan függvény összegeként!

Matematika B1 gyakorlat

5. feladatsor

2003. okt. 17.

1. A függvényhatárérték definíciója alapján bizonyítsuk be a következő állításokat:
$$\lim_{x\to 2}\frac{3x+1}{5x+4}=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-4x}=2.$$

2. Számítsuk ki az alábbi határértékeket (ha szükséges, akkor az $x-x_0$ tényezővel való egyszerűsítés útján):
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4x-5}{x^2-1},\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^2-1},\quad \lim_{x\to \infty}\frac{x^2+4x-5}{x^2-1}.$$

3. Határozzuk meg a következő határértékeket:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x},\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1},\quad \lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}.$$

4. Döntsük el, hogy folytonosak-e a következő függvények az $x_0=1$ helyen:
   (a) $f(x)=\begin{cases}-2x+3 & \text{ha} \quad x\le 1,\\ 3x-5 & \text{ha} \quad x>1\end{cases}$
   (b) $g(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}.$

5. A differenciálhányados definíciója alapján határozzuk meg az alábbi függvények deriváltját a megadott x_0 helyen:
   (a) $f(x)=x^2,\quad x_0=5,$
   (b) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}},\quad x_0=3.$

6. Deriváljuk a következő függvényeket:
$$x^2-2x+3,\quad x^2\sin x,\quad xe^x,\quad (5x^3-3x+2)\ln x,\quad \frac{1}{x}+\sqrt{x^5},\quad \frac{\sin x+1}{\cos x-1}.$$

Matematika B1 gyakorlat

6. feladatsor

2003. okt. 18.

1. Állapítsuk meg, hogy mely függvények összetételéből származnak a következő függvények, majd számítsuk ki a deriváltjukat:

$$\sin x^3, \quad \sin^2(\tan x), \quad \sin(\tan^2 x).$$

2. Mennyi az alábbi függvények deriváltja?

$$\left(7x^2 - \frac{4}{x} + 6\right)^6, \quad \left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)^5, \quad (\sin^{20} x + 1)^{20}.$$

3. A láncszabály segítségével számítsuk ki a következő magasabb rendű deriváltakat:

$$(\sin(3x+1))^{(4)}, \quad \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(5)}, \quad (x^n)^{(n)}.$$

4. Írjuk fel az alábbi görbék érintőjének egyenletét az adott x_0 értékhez tartozó pontban!

   (a) $y = \dfrac{x+1}{x-1}, \quad x_0 = 2,$

   (b) $y = \arcsin\sqrt{1-x^2}, \quad x_0 = \dfrac{1}{2}.$

5. Határozzuk meg az $y = \arctan \dfrac{1}{x-2}$ egyenletű görbének azokat a pontjait, amelyekben az érintő párhuzamos az $y = -\dfrac{1}{2}x$ egyenletű egyenessel! Írjuk fel e pontokban az érintő egyenletét!

6. Határozzuk meg az alábbi görbék metszési szögét (az egyes görbékhez a metszéspontban húzott érintők hajlásszögét):

   (a) $y = x^2, \quad y = \sqrt{x},$

   (b) $y = \ln x, \quad x$ tengely.

Matematika B1 gyakorlat

7. feladatsor

2003. okt. 31.

1. Állapítsuk meg az alábbi határértékek típusát, majd számítsuk ki őket a L'Hôpital-szabály segítségével:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x},\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{x-\frac{\pi}{2}},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\arcsin x},$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)},\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right),\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}.$$

2. Határozzuk meg azokat az intervallumokat, amelyekben a következő függvények szigorúan monoton növekedők ill. csökkenők:
   (a) $f(x) = x^5 + 2x^3 - 7$,
   (b) $g(x) = x^2 - \ln x^2$,
   (c) $h(x) = x + 2\cos x$.

3. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális szélsőértékhelyeit:
   (a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$,
   (b) $g(x) = 3x + \cos x$,
   (c) $h(x) = x - \operatorname{arctg} x$.

4. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot, és ábrázoljuk vázlatosan az alábbi függvényeket:
   (a) $f(x) = 2x^2 - x^3$,
   (b) $g(x) = x + \frac{1}{x^2}$,
   (c) $h(x) = x^2 \ln x$.

5. * Bizonyítsuk be, hogy ha f és g $[a,b]$-ben folytonos, (a,b)-ben differenciálható, és minden $x \in (a,b)$-re $f'(x) > g'(x)$, akkor $f(b) - f(a) > g(b) - g(a)$. (Útmutatás: Vizsgáljuk $h(x) = f(x) - g(x)$-et.)

Matematika B1 gyakorlat

8. feladatsor

2003. nov. 14.

1. Egy folyó partján egy $3200m^2$ területű, téglalap alakú telket akarunk elkeríteni a lehető legrövidebb kerítéssel. A folyó partján nem állítunk kerítést. Hogyan válasszuk a téglalap oldalait?

2. Egy tó partjától $300m$-re tartózkodunk egy csónakban. A parton, a csónakból a partra bocsátott merőleges talppontjától $1000m$-re van az állomás. Elérhetjük-e a 21 perc múlva induló vonatot, ha a vízben a csónakkal percenként $48m$-t, a parton pedig percenként $60m$-t tudunk megtenni?

3. Adott R sugarú körlemezből mekkora nyílásszögű körcikket kell kivágnunk, hogy maximális térfogatú tölcsért kapjunk?

4. Számítsuk ki a $2xy - y^2 = 3$ implicit alakban adott $x \mapsto y(x)$ függvény második deriváltját!

5. Az $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletű ellipszishez érintőt húzunk. Az érintő és a koordinátatengelyek által meghatározott háromszög területe milyen x és y értékekre lesz minimális, és mennyi a háromszög területe?

6. Határozzuk meg az $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$ paraméteresen adott görbe deriváltját a

   (a) $t_0 = 0$

   (b) $t_0 = 1$

   paraméterértékekez tartozó pontokban, majd adjuk meg a két érintő egyenletét!

7. Írjuk fel a ciklois, vagyis az $x = \rho(t - \sin t)$, $y = \rho(1 - \cos t)$ paraméteres egyenletű görbe $P(x, y)$ pontbeli érintőjének iránytangensét! (Cikloist ír le egy egyenes mentén csúszásmentesen gördülő körvonal kiszemelt pontja, azaz a bicikli kerekének szelepe oldalról nézve.)

Matematika B1 gyakorlat

9. feladatsor

2003. nov. 21.

1. Számítsuk ki a következő, alapintegrálokra visszavezethető határozatlan integrálokat:

$$\int 7x^4 dx, \quad \int \left(\sqrt[5]{x} + \sqrt{x\sqrt{x}}\right) dx, \quad \int \frac{x+1}{x-1} dx, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx.$$

2. Határozzuk meg az alábbi, $\int f(x)^n f'(x) dx$ alakú integrálokat:

$$\int \frac{2x-5}{\sqrt[3]{(x^2-5x+10)^7}} dx, \quad \int \frac{\sqrt{\ln^3 x}}{x} dx, \quad \int \frac{x}{1-2x^2} dx.$$

3. Határozzuk meg a primitív függvényt:

$$\int \cos 5x \cos 7x dx, \quad \int \frac{\sin \ln x}{x} dx, \quad \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{9x^2-6x-3}} dx, \quad \int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx, \quad \int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx.$$

4. A parciális integrálás módszerével oldjuk meg az alábbi feladatokat:

$$\int x^3 \ln x \, dx, \quad \int x^2 \sin 2x \, dx, \quad \int \operatorname{arch} x \, dx.$$

Matematika B1 gyakorlat

10. feladatsor

2003. nov. 28.

1. Ha szükséges, parciális törtekre bontás után integráljuk az alábbi racionális törtfüggvényeket:

$$\int \frac{3x-1}{x^2-2x-3}dx, \qquad \int \frac{2x^4-x}{x^3-1}dx, \qquad \int \frac{2x^5-3x^2}{1+3x^3-x^6}dx$$

2. Integráljuk a következő törteket megfelelő helyettesítéssel:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx, \qquad \int \frac{e^x}{\sinh^2 x}dx, \qquad \int \frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4-1}}dx$$

3. Számítsuk ki a határozott integrálok értékét:

$$\int_0^5 (5x^3+1)dx + \int_5^4 (5x^3+1)dx, \qquad \int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx$$

$$\int_0^{\pi} \cos^2 2x, \qquad \int_0^2 f(x)dx, \quad \text{ahol} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{ha} \quad 0 \le x \le 1 \\ 2-x & \text{ha} \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

4. Készítsünk vázlatot, majd határozzuk meg az alábbi görbék által határolt síktartomány geometriai területét:
   (a) $y = 4 - x^2$ és $y = 0$
   (b) $\ln x$, $y = 2\ln\dfrac{x}{3}$ és $y = 0$
   (c) $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 1$ és $x + y = 1$

5. A forgástestek térfogatára tanult képlet alapján igazoljuk, hogy az r sugarú gömb térfogata $\dfrac{4r^3\pi}{3}$.

Matematika B1 gyakorlat

11. feladatsor

2003. dec. 5.

1. Számítsuk ki annak a síkidomnak a területét,

   (a) amelyet az $x^2 + y^2 \leq 4$ körlapból az $x^2 + (y-2)^2 = 4$ körön kívül eső pontok elhagyásával kapunk;

   (b) amelyet az $y = \sin x,\ y = x,\ x = \frac{\pi}{2}$ egyenletű görbék határolnak.

2. Határozzuk meg az alábbi explicit, paraméteres ill. polárkoordinátás alakban adott görbéknek a megadott intervallumhoz tartozó ívhosszát:

   (a) $y = 1 - \frac{x^2}{4},\ x \in [0, 2]$;

   (b) $y = \ln(1 - x^2),\ x \in [0, \frac{1}{2}]$;

   (c) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ y \in [0, 2\pi]$;

   (d) $x = t \sin t,\ y = t \cos t,\ t \in [0, T] \quad (T > 0$ paraméter);

   (e) $r = 1 - \cos\varphi,\ \varphi \in [0, 2\pi]$.

3. Számítsuk ki az alábbi egyenletű görbék adott intervallumhoz tartozó részének x-tengely körüli megforgatásával keletkező forgástestek térfogatát és felszínét:

   (a) $y = \sqrt{1 + x^2},\ x \in [0, 3]$;

   (b) $y = \sqrt{a^2 - x^2},\ x \in [-a, a] \quad (a > 0$ paraméter).

4. Ábrázoljuk a következő egyenletű görbék és egyenesek által határolt síkidomot, és határozzuk meg tömegközéppontjának koordinátáit:

   (a) $y = x^3,\ y = 0,\ x = 1$;

   (b) $y = \frac{1}{x^2},\ y = 0,\ x = 1,\ x = 3$.

Matematika B1 gyakorlat

12. feladatsor

2003. dec. 12.

1. Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékeit:

   (a) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^4 + 7n^2 - 2} - \sqrt{n^4 + 2n^2 - 3} \right)$

   (b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{3^n}}{2^n + 1}$

   (c) $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{2n+1} \right)^n$

2. (a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sinh x - x}{x^3}$

   (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x} \qquad (a > 0, b > 0)$

3. Legyen

$$f(x) = \pi + 2\arccos(\frac{x+1}{3})$$

   Határozzuk meg az inverz értelmezési tartományát ($D_{f^{-1}}$) és értékkészletét ($R_{f^{-1}}$). $f^{-1}(x) =?$
   Vázold az $y = f(x)$ grafikont! $f(-\frac{5}{2}) =?$, $f(-1) =?$, $f(\frac{1}{2}) =?$
   Milyen szög alatt metszi f^{-1} grafikonja az x tengelyt?

4. A deriváltak segítségével állapítsuk meg, hogy az alábbi függvények értelmezési tartományuk mely részhalmazán (szigorúan) monoton növekvőek és melyeken (szigorúan) monoton csökkenőek:

   (a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

   (b) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x + 4)$

5.

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} (x + 3)\sin 2x dx =?$$

$$\int_{1}^{36} \frac{1}{\sqrt[4]{x}^3 + 2\sqrt[4]{x}} dx =?$$

Matematika B1 gyakorlat

13. feladatsor

2003. dec. 13.

Számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat:

1.
$$\int_0^\infty e^{-x}dx, \qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx, \qquad \int_0^\infty e^{-x}\cos x dx$$

2.
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx, \qquad \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}^3}$$

3.
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{2+3x^2}, \qquad \int_1^\infty \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$$

4. Tekintsük a
$$\Gamma(t) := \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$$
improprius integrállal definiált függvényt, ahol $t > 0$ valós paraméter.

   (a) Határozzuk meg $\Gamma(1)$-et.

   (b) Parciális integrálással bizonyítsuk be a $\Gamma(t+1) = t\cdot\Gamma(t)$ azonosságot tetszőleges $t > 0$-ra.

   (c) Ezért $t \mapsto \Gamma(t)$ a $t \mapsto (t-1)!$ természetes kiterjesztése.