Lineáris algebra

Vektorterek

Def

A V halmazt **vektortérnek** nevezzük, ha bármely $\underline{u}, \underline{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén értelmezett az $\underline{u}+\underline{v} \in V$ összeadás és a $\lambda \underline{u} \in V$ skalárral való szorzás, továbbá teljesül néhány természetes műveleti azonosság.

Fő példák

- vektorok egy egyenesen : $\mathbb{R}$
- síkvektorok : $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$
- térvektorok : $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y,z) : x,y,z \in \mathbb{R}\}$

Def

A V vektortér $U \subseteq V$ részhalmaza **altér**, ha maga is vektortér, azaz az összeadás és skalárral való szorzás műveletei nem vezetnek ki a halmazból.

Pl

- $\mathbb{R}^2$-ben origón átmenő egyenesek, $\mathbb{R}^3$-ban origón átmenő egyenesek, síkok
- $\{(x,y,z) : x, z \in \mathbb{R}, y = 0\}$ altér
- $\{(x,y,z) : x, z \in \mathbb{R}, y = 1\}$ nem altér, mert $(2,1,2)$ és $(3,1,4)$ a részhalmazban van, de az összegük $(5,2,6)$ már nincs

Def

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ vektorok **lineáris kombinációja** a $\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n$ vektor, ahol $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Def

A V vektortér $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ vektorai **bázist** alkotnak, ha bármely $\underline{v} \in V$ vektor egyértelműen előáll $\underline{v} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_n \underline{v}$ lineáris kombinációként.

Tétel

Adott V vektortérben bármely két bázis elemszáma azonos.

Def

Egy V vektortérben a bázis elemszámát a vektortér **dimenziójának** nevezzük.
Jel: $\dim(V)$.

Pl

- $\mathbb{R}^2$-ben $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ standard bázis, de bázis bármely két nem egy egyenesbe eső vektor, pl. $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$
- $\mathbb{R}^3$-ban $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ standard bázis, de bázis bármely három nem egy síkba eső vektor, pl. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$

Skaláris szorzás

$\underline{u} = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$ és $\underline{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ vektorok skaláris szorzata

$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$, $\underline{u}$ hossza $\|\underline{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

Ha két vektor skaláris szorzata nulla, akkor a vektorokat merőlegesnek nevezzük.

Mgj $\mathbb{R}^2$-ben ugyanígy Tulajdonság: $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\| \cdot \cos\alpha$ ahol α $\underline{u}$ és $\underline{v}$ hajlásszöge

Párhuzamos és merőleges komponensek

Adott $\underline{v}$ vektor egyértelműen áll elő adott $\underline{u}$ vektorral párhuzamos és rá merőleges komponensek összegeként: $\underline{v} = \underline{v}_p + \underline{v}_m$, ahol $\underline{v}_p$ párhuzamos $\underline{u}$-val, $\underline{v}_m$ pedig merőleges rá. Mégpedig $\underline{v}_p = \dfrac{\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle}{\|\underline{u}\|^2} \cdot \underline{u}$ és

$\underline{v}_m = \underline{v} - \underline{v}_p$.

Lineáris transzformációk

Def

Adott V vektortér esetén a $T: V \to V$ transzformáció lineáris, ha minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $T(\underline{u} + \underline{v}) = T(\underline{u}) + T(\underline{v})$ és $T(\lambda \underline{u}) = \lambda T(\underline{u})$.

Def

Legyen $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ a V vektortér standard bázisa ($V = \mathbb{R}^2$ vagy $\mathbb{R}^3$), T lineáris transzformáció. Ekkor a bázisvektorok $T(\underline{v}_1), \ldots, T(\underline{v}_n)$ képeiből mint oszlopvektorokból képzett mátrixot a T transzformáció mátrixának nevezzük.

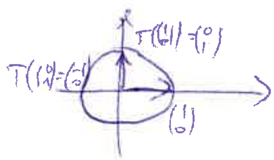
All

Ha a T transzformáció mátrixa A, akkor tetszőleges $\underline{v} \in V$ vektor képe megkapható mint $T(\underline{v}) = A\underline{v}$ mátrixszorzat.

Pl

$V = \mathbb{R}^2$ T: origó körüli forgatás $\pi/2$ szöggel

$T\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $T\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$



T mátrixa $A = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$ $\underline{v} = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ esetén $T(\underline{v}) = A\underline{v} = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

Pl

$V=\mathbb{R}^3$ T: xz síkra való merőleges vetítés

$T\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $T\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $T\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Köv

Ha a T_1 transzformáció mátrixa A_1, T_2 mátrixa A_2, akkor a $\underline{v}\mapsto T_1(T_2(\underline{v}))$ összetett transzformáció mátrixa $A_1\cdot A_2$.

Megj

Mátrixok tekinthetők lineáris leképezések leírására szolgáló objektumoknak. A továbbiakban így tekintünk a mátrixokra.

Determináns szemléletes jelentése

Az egységnégyzet ($\mathbb{R}^2$-ben) vagy egységkocka ($\mathbb{R}^3$-ban) képének területe vagy térfogata egyenlő a transzformáció determinánsának abszolút értékével. Az előjel irányításváltást (pl. tükrözés) vagy irányítástartást fejez ki.

Inverz

A transzformáció mátrixának inverze az inverztranszformáció mátrixa.

Mátrix rangja

Def

Az A mátrix rangja a legnagyobb négyzetes nem nulla determinánsú részmátrixának mérete. Jel: $rk(A)$.

Áll

Transzformáció mátrixának rangja egyenlő a transzformáció képeként előálló vektorok alterének dimenziója.

Pl $\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&1&1\\3&-1&4\end{pmatrix}$ mátrix rangja 2, mert a 3. sor az első kettő összege $\Rightarrow$ det $=0$, de pl. $\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}$ nem nulla det. részmátrix.

Lineáris egyenletrendszerek

Adott A négyzetes mátrix és $\underline{b}$ vektor esetén az $A\underline{x}=\underline{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldása annak az $\underline{x}$ vektornak a megkeresését jelenti, amelyet az A-nak megfelelő lineáris transzformáció $\underline{b}$-be visz.

Adott A együtthatómátrix esetén minden $\underline{b}$-hez pontosan akkor van $A\underline{x}=\underline{b}$-nek pontosan egy megoldása, ha az A-nak megfelelő lineáris transzformáció kölcsönösen egyértelmű, azaz invertálható, azaz teljes rangú, azaz nem nulla a determinánsa.

Tétel

Egy A $n\times n$-es mátrixra a következők ekvivalensek:

- $\det(A)\neq 0$
- létezik A^{-1}
- A együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszereknek pontosan egy megoldása van
- $rk(A)=n$
- A-nak megfelelő lineáris transzformáció $\mathbb{R}^n$-nek kölcsönösen egyértelmű transzformációja önmagára
- A sorai/oszlopai $\mathbb{R}^n$ egy bázisát alkotják
- A sorai/oszlopai által feszített paralelepipedon térfogata nem nulla

Sajátérték, sajátvektor

Def

Legyen A $n\times n$-es mátrix. A $\lambda\in\mathbb{R}$ számot az A mátrix sajátértékének, a $\underline{v}\neq\underline{0}$ vektort pedig a hozzá tartozó sajátvektornak nevezzük, ha $A\underline{v}=\lambda\underline{v}$.

Szemléletes jelentés: Az A-nak megfelelő lineáris transzformáció a $\underline{v}$ vektort a λ-szorosába viszi (forgatás nélkül).

Kiszámítása

A sajátértékek a $\det(A-\lambda I)=0$ egyenlet gyökei. Egy adott λ sajátértékhez tartozó sajátvektorok pedig az $(A-\lambda \underline{I})\underline{v}=\underline{0}$ lineáris egyenletrendszer megoldásai.

Pl

$A=\begin{bmatrix}7 & -3\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ sajátértékei: $\det\begin{bmatrix}7-\lambda & -3\\ 1 & 3-\lambda\end{bmatrix}=(7-\lambda)(3-\lambda)-(-3)\cdot 1=\lambda^2-10\lambda+24=0$

gyökei $\lambda_1=4$, $\lambda_2=6$.

$\lambda_1=4$-hez tartozó sajátvektorok:

$\left[\begin{array}{cc|c}3 & -3 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]$ $v_2=t\in\mathbb{R}$ szabad paraméter (mivel az oszlopában nincs vezéregyes), $v_1-v_2=0 \Rightarrow v_1=v_2=t$, azaz $\underline{v}=\begin{pmatrix}t\\t\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_2=6$-hoz tartozó sajátvektorok:

$\left[\begin{array}{cc|c}1 & -3 & 0\\ 1 & -3 & 0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]$ $v_2=t\in\mathbb{R}$ szabad paraméter, $v_1-3v_2=0\Rightarrow v_1=3v_2=3t$, azaz $\underline{v}=\begin{pmatrix}3t\\t\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

Tulajdonság

Egy $\underline{v}$ sajátvektor tetszőleges nemnulla számszorosa is ugyanahhoz a sajátértékhez tartozó sajátvektor. Általában egy adott λ sajátértékhez tartozó sajátvektorok alteret alkotnak, ezt a λ-hoz tartozó sajátaltérnek hívjuk.

Áll

Szimmetrikus mátrix különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorai egymásra merőlegesek.

Tétel

Legyen A szimmetrikus $n\times n$-es mátrix, azaz $A^T=A$. Ekkor A minden sajátértéke valós. Létezik továbbá n egymásra merőleges sajátvektora.

Diagonalizálás

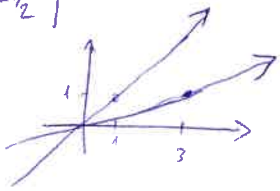
Az A $n\times n$-es mátrix diagonalizálható, ha léteznek olyan P invertálható és D diagonális mátrixok, amelyekkel $A=PDP^{-1}$.

Kiszámítás

Ha A-nak $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ különböző sajátértékei és $\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_n$ a hozzá tartozó sajátvektorok, akkor $P=\left[\underline{v}_1 \,\vdots\, \underline{v}_2 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \underline{v}_n\right]$ és $D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots\ \lambda_n\end{pmatrix}$ választható.

Pl $A=\begin{bmatrix}7 & -3\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ esetén $P=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$ $P^{-1}=\begin{bmatrix}-1/2 & 3/2\\ 1/2 & -1/2\end{bmatrix}$

Szemléletes jelentés: Az A-nak megfelelő lineáris transzformáció a $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n$ vektorok által meghatározott (nem feltétlenül derékszögű) koordinátarendszerben koordinátairányokban történő nyújtásokból áll.



Pl

$A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ forgatásmátrixnak $\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}-\lambda & -1\\ 1 & -\lambda\end{bmatrix}=\lambda^2+1=0$ nincs valós sajátértéke.

Ezért nem is diagonalizálható a valós mátrixok körében.

Ortogonális diagonalizálás

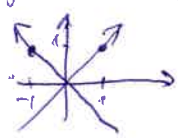
Ha A $n\times n$-es szimmetrikus mátrix, akkor legyenek $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ a sajátértékei és $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n$ a hozzá tartozó ortonormált (egységhosszú és páronként merőleges) sajátvektorok. Ekkor $P^T\cdot P=I$, azaz $P^T=P^{-1}$, és az ilyen P mátrixot ortogonálisnak nevezzük. Ekkor $A=PDP^T$.

Pl

$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ sajátértékei $\lambda_1=3$, $\lambda_2=1$. Sajátvektorai: λ_1-hez tartozó: $t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, melyek közül az egységhosszú $\underline{v}_1=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; λ_2-höz $t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, az egységhosszú $\underline{v}_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

Azaz $P=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ és $D=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ esetén $P^{-1}=P^T=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ (könnyen számolható), továbbá $A=PDP^T$.

Szemléletes jelentés: A sajátvektorok által meghatározott koordinátarendszer derékszögű.



Mátrixhatványozás

Ha A diagonalizálható mátrix, azaz $A=PDP^{-1}$, akkor $A^{100}=(PDP^{-1})(PDP^{-1})\dots(PDP^{-1})$ $=PD\underbrace{P^{-1}P}_{I}D\underbrace{P^{-1}P}_{I}\cdots DP^{-1}=PD^{100}P^{-1}$, ahol $D^{100}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \ddots\ \lambda_n\end{bmatrix}^{100}=\begin{bmatrix}\lambda_1^{100} & 0\\ 0 & \ddots\ \lambda_n^{100}\end{bmatrix}$ könnyen számolható.

Pl

$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ esetén $A^{100}=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}3^{100} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3^{100}+1}{2} & \frac{3^{100}-1}{2}\\ \frac{3^{100}-1}{2} & \frac{3^{100}+1}{2}\end{bmatrix}$