

## Matematika EP1 vizsga, 2015. jún. 2.

### I. rész: Számítási feladatok

1. Határozzuk meg az  $a$  és  $b$  paraméterek értékét úgy, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} (1+ax)^{2/x} & \text{ha } x > 0 \\ b & \text{ha } x = 0 \\ \frac{1-\sqrt{1-x}}{x} & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

függvény folytonos legyen.

2. Vizsgáljuk meg az

$$f(x) = 2 \sin x - x$$

függvényt: keressük meg a lokális szélsőértékeit és inflexiós pontjait, majd vázoljuk a függvény grafikonját.

3. Adott az  $x(t) = R \cos t$  és  $y(t) = R \sin t$  ahol  $t \in [0, \pi]$  félkörvonal paraméteres egyenlete. Számítsuk ki integrálással a görbe  $x$  tengely körüli megforgatásával kapott forgástest felszínét.

4. Tekintsük az

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & -2 \\ -1 & 5 & 4 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixot. Kifejtés segítségével vezessük vissza  $\det(A)$  kiszámítását  $2 \times 2$ -es mátrixok determinánsaira, majd adjuk meg  $\det(A)$  értékét. Írjuk le, melyik sorok vagy oszlopok szerint fejtettünk ki.

5. Adottak az  $\underline{u}_1 = (1, 0, 1)$  és  $\underline{u}_2 = (-2, 0, 2)$  vektorok. Ellenőrizzük, hogy ezek merőlegesek egymásra. Egészítsük ki ezt egy  $\underline{u}_3$  vektorral az  $\mathbb{R}^3$  vektortér ún. ortogonális bázisává, azaz egy olyan vektorrendszerre, amelyben minden vektor merőleges a másik kettőre. Egy megoldási lehetőség: tetszőleges  $\mathbb{R}^3$ -beli vektort bontunk fel  $\underline{u}_1$ -gyel párhuzamos és rá merőleges összetevőkre, majd a merőleges komponenset bontunk tovább  $\underline{u}_2$ -vel párhuzamos és rá merőleges vektorok összegére.

### II. rész: Elméleti feladatok

6. Definiáljuk egy sorozat határértékét. A definíció alapján bizonyítsuk be, hogy az

$$a_n = \frac{1}{n^2}$$

sorozat konvergens. Mi a határértéke?

7. Mit jelent az, hogy az  $f$  függvény konvex az  $(a, b)$  intervallumon? Ha  $f$  konvex  $(a, b)$ -n és kétszer differenciálható, akkor mit mondhatunk az  $f''(x)$  függvényről  $(a, b)$ -n? Ellenőrizzük ezt az  $f(x) = x^4$  függvényre.

8. Adjuk meg a határozott integrálra vonatkozó parciális integrálás formuláját. Ennek segítségével számítsuk ki az alábbi integrált.

$$\int_0^1 x e^{-x} dx$$

9. Milyen tulajdonságokkal definiáljuk a két  $\mathbb{R}^3$ -beli vektor vektoriális szorzatát? Milyen geometriai jelentés kapcsolható ehhez? Az  $\underline{a} = (3, -1, 2)$  és  $\underline{b} = (4, 0, 1)$  vektorok esetén számoljuk ki az  $\underline{a} \times \underline{b}$  vektoriális szorzatot, majd ellenőrizzük a merőlegességi feltételt.

10. Mit jelent az, hogy egy  $V$  vektortérben vektorok egy  $W$  részhalmaza alteret alkot? Tekintsük a legfeljebb negyedfokú valós polinomok  $V$  vektorterét. Alteret alkot-e az a  $W_1$  részhalmaz, amely azokból a polinomokból áll, melyeknek a 2 helyen felvett értéke 0? És az a  $W_2$  részhalmaz, amely azokat a polinomokat tartalmazza, amelyekben a négyzetes tag együtthatója  $-1$ ?

Minden feladat 6 pontos. A sikeres vizsgához az elméleti részből legalább 9 pontot el kell érni.