Név: .... **Neptun-kód:** ....

ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	V	$\sum$	jegy

Matematika EP1 vizsga, 2015. máj. 28.

I. rész: Számítási feladatok

1. Adjuk meg a valós számok azon legbővebb részhalmazát, amelyen az
$$f(x) = \frac{\operatorname{tg}(3x)}{\sin x}$$
formulával adott függvény folytonos. Az $x = 0$ pontban tegyük folytonossá a függvényt.

2. Mennyi az alapkörének a sugara és a magassága annak a hengernek, amely elfér egy $\sqrt{2}$ sugarú gömbben és a palástjának felszíne maximális?

3. Adott egy egységnyi elektromos ellenállás, amelyre az $u(t) = \sin t$ függvény szerint váltakozó feszültséget kapcsolunk. Ohm törvénye alapján a kialakult áram az $i(t) = \sin t$ függvény szerint változik. A pillanatnyi teljesítményt a $p(t) = u(t)i(t)$ képlettel számíthatjuk ki, a t_1 és t_2 időpontok között végzett munkát pedig az
$$\int_{t_1}^{t_2} p(t)\,\mathrm{d}t$$
integrál adja meg. Igazoljuk azt a középiskolában tanult állítást, hogy ekkor a váltakozó feszültség effektív értéke $u_{\text{eff}} = 1/\sqrt{2}$, azaz a váltakozó feszültség által egy periódus alatt végzett munka megegyezik az $u(t) = u_{\text{eff}}$ konstans egyenfeszültség által ugyanezen az egységnyi ellenálláson ugyanannyi idő alatt végzett munkával. Ohm törvénye miatt az egységnyi ellenálláson az $u(t) = u_{\text{eff}}$ konstans feszültség esetén $i(t) = u_{\text{eff}}$ konstans áram alakul ki. (Segítség: használjuk a képletgyűjteményben található $\sin^2 x$-re vonatkozó azonosságot az integrálás előtt.)

4. Tekintsük az alábbi mátrixokat.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
Számítsuk ki az A, B, C mátrixok inverzei közül azokat, amelyek léteznek. Minden inverzet szorozzunk össze az A, B, C mátrixok közül azokkal, amelyekkel lehet (mindkétféle sorrendet próbáljuk meg).

5. Egy síkba esnek-e az origóból az $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$ és $(3, 1, 2)$ pontokba mutató vektorok. A választ indokoljuk.

II. rész: Elméleti feladatok

6. Mondjuk ki a sorozatokra vonatkozó rendőrelvet. Használjuk ezt az
$$a_n = \frac{3 + (-1)^n}{n^2}$$
sorozat határértékének meghatározásához.

7. Az f differenciálható függvény esetén adjunk elégséges feltételt arra, hogy a függvény az (a, b) intervallumon szigorúan monoton növő ill. csökkenő. Ennek segítségével írjuk fel, hogy az $f(x) = \sin(2x)$ függvény mely intervallumokon növekszik ill. csökken.

8. Mondjuk ki a Rolle-féle középértéktételt. Alkalmazható-e a tétel az $f(x) = \cos x$ függvényre a $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ intervallumon? Ha igen, mutassuk meg, hogy a tétel állítása igaz. Ha nem, a tétel melyik feltétele sérül?

9. Legyen f egy folytonos függvény, amelynek primitív függvénye F. Ha φ egy szigorúan monoton növő differenciálható függvény, akkor az
$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$
integrálban az $u = \varphi(x)$ helyettesítéssel milyen integrálhoz jutunk? Számítsuk ki a kapott integrált, majd az eredményt fejezzük ki az x változó segítségével. Alkalmazzuk a fentieket az
$$\int \frac{e^x}{e^{2x} + 1}\,\mathrm{d}x$$
kiszámításához $u = e^x$ helyettesítéssel.

10. Mikor lesz egy lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása? Ilyenkor három egyenlet és három ismeretlen esetén mit mondhatunk az együtthatómátrix determinánsáról? Írjunk fel egy ilyen példát is a megoldásokkal együtt. (Ez segíthet megsejteni a választ a fenti kérdésekre.)

Minden feladat 6 pontos. A sikeres vizsgához az elméleti részből legalább 9 pontot el kell érni.