Matematika EP1 vizsga megoldásai, 2015. jan. 22.

I. rész: Számítási feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi határértéket.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(\sqrt{n}+2)^2}{n}-\left(\frac{n}{4}\right)^{-1}\right)^{\sqrt{n}}$$

Megoldás: A zárójelben lévő kifejezés átalakítása után

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(\sqrt{n}+2)^2}{n}-\left(\frac{n}{4}\right)^{-1}\right)^{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4\sqrt{n}+4}{n}-\frac{4}{n}\right)^{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}=e^4.$$

2. Tekintsük azt a görbét a térben, amelynek (x, y, z) koordinátáira fennállnak az $y = 2x$ és $z = x^2$ összefüggések. Mennyi a görbe azon pontjának x koordinátája, amelynek a tér $(6, -3, 4)$ pontjától vett távolságának négyzete minimális?

Megoldás: Jelölje $f(x)$ a görbe azon pontjának távolságnégyzetét a $(6, -3, 4)$ ponttól, amelynek első koordinátája x. Ekkor $f(x) = (x-6)^2 + (2x+3)^2 + (x^2-4)^2$. Ennek a függvénynek a minimumát keressük. Egyszerűsítés után $f'(x) = 4x^3 - 6x$, ezért lokális szélsőértékek az $f'(x) = 0$ egyenlet $x = 0$ és $x = \pm\sqrt{3/2}$ helyeken lehetnek. Az $f''(x) = 12x^2 - 6$ második deriválatba helyettesítve adódik, hogy $f''(0) = -6$ miatt a 0 lokális maximum, $f''(\pm\sqrt{3/2}) = 12$ miatt pedig $\pm\sqrt{3/2}$ lokális minimum, melyek egyben abszolút minimumok is.

3. Az $f(x) = x^3$ függvény grafikonját megforgatjuk az x tengely körül. Mennyi az így keletkező felület $x = 0$ és $x = 1$ közé eső darabjának felszíne?

Megoldás:

$$2\pi\int_0^1 x^3\sqrt{1+(3x^2)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}\,\mathrm{d}x = 2\pi\left[\frac{(1+9x^4)^{3/2}}{9\cdot 4\cdot 3/2}\right]_0^1 = \pi\frac{10\sqrt{10}-1}{27}.$$

4. Adjuk meg a tér azon egyenesét, amely átmegy az $(1, 2, 3)$ ponton és merőleges a $z = 3x+5$ síkra.

Megoldás: Sík normálvektora $(3, 0, -1)$, ami a merőlegesség miatt az egyenes irányvektorának választható. Az egyenes egyenletrendszere

$$\begin{cases} x = 3t+1 \\ y = 2 \\ z = -t+3 \end{cases}.$$

5. Határozzuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszer összes megoldását.

$$\begin{aligned} 3x - y + 4z &= 11 \\ x - z &= 2 \\ 5x - y + 2z &= 15 \\ -2x + y - 5z &= -9 \end{aligned}$$

Megoldás: Végtelen sok megoldás van, ezek a t szabad paraméterrel felírva $(x, y, z) = (t+2, 7t-5, t)$.

II. rész: Elméleti feladatok

6. Definiáljuk, mit jelent az, hogy egy sorozat konvergens. Korlátos sorozat esetén milyen további tulajdonság meglétével biztosítható a konvergencia? Konvergál-e az $a_n = (-1)^n(1+\frac{1}{n})$ sorozat? A választ a definíció alapján indokoljuk.

   Megoldás: Definíciót ld. jegyzet. Ha monoton is a korlátos sorozat, akkor konvergens. Az a_n sorozat nem konvergál, mert bármely két szomszédos elemének távolsága legalább 2, ezért semmilyen szám $\varepsilon = 1/2$ sugarú környezetébe nem eshet a sorozat minden eleme egy idő után. A sorozat torlódási pontjai a ± 1.

7. Mondjuk ki a L'Hospital-szabályt. Segítségével számítsuk ki az alábbi határértéket.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2(x+1)}$$

   Megoldás: Ld. jegyzet.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{3x^2+2x},$$

   ahol a számláló 1-hez, a nevező 0-hoz tart. A $3x^2+2x$ nevező a 0-ban előjelet vált, ezért $x \to 0+$ határértékben pozitív értékeken keresztül tart 0-hoz, azaz a hányados határértéke $+\infty$; $x \to 0-$ határértékben negatív értékeken keresztül tart a nevező 0-hoz, azaz a hányados határértéke $-\infty$. A L'Hospital-szabály tehát a jobb és bal oldali határértékekre külön-külön alkalmazható, de az eredeti határérték nem létezik. (A feladat eredetileg $\sin x/(x(1+x^2))$ határértéke lett volna, ami 1-nek adódik.)

8. Melyik deriválási szabályból és hogyan következik a parciális integrálás képlete? Az alábbi példán mutassuk be, hogyan alkalmazható.

$$\int_0^1 \arctan x \,\mathrm{d}x$$

   Megoldás: A szorzat deriválási szabályának integrálásából következik. A példában $f'(x) = 1$ és $g(x) = \arctan x$ választható. Ekkor

$$\int_0^1 \arctan x \,\mathrm{d}x = [x \arctan x]_0^1 - \int_0^1 x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan 1 - \left[\frac{\ln(1+x^2)}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

9. Hogyan értelmezzük két háromdimenziós vektor vektoriális szorzatát az eredmény tulajdonságainak (hosszának és irányának) segítségével? Adjuk meg a művelet geometriai jelentését is.

   Megoldás: Ld. jegyzet.

10. Mit jelent az, hogy egy vektortérben néhány vektor generátorrendszert alkot? Generátorrendszert alkot-e a számnégyesek vektorterében az $(1,0,0,0)$, $(1,1,0,0)$, $(1,1,1,0)$, $(1,1,1,1)$ vektorokból álló halmaz? Előállítható-e ezek lineáris kombinációjaként az $(1,2,3,4)$ vektor? A válaszokat indokoljuk.

    Megoldás: Definíciót ld. jegyzet. Generátorrendszert alkotnak, mert az $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$, $(0,0,0,1)$ bázis elemei kifejezhetők az adott vektorok segítségével: $(0,1,0,0) = (1,1,0,0) - (1,0,0,0)$; $(0,0,1,0) = (1,1,1,0) - (1,1,0,0)$; $(0,0,0,1) = (1,1,1,1) - (1,1,1,0)$. Továbbá $(1,2,3,4) = -(1,0,0,0) - (1,1,0,0) - (1,1,1,0) + 4(1,1,1,1)$.

Minden feladat 6 pontos. A sikeres vizsgához az elméleti részből legalább 9 pontot el kell érni.