Matematika EP1 vizsga megoldásai, 2015. jan. 15.

I. rész: Számítási feladatok

1. Számítsuk ki az
$$a_n = \frac{107 + 3n^2}{36 + n^2}$$
sorozat határértékét, és adjuk meg a $\varepsilon = 1/100$ értékhez tartozó küszöbindexet.

   Megoldás: $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$. A küszöbindex számításához $|a_n - 3| = 1/(36 + n^2) < 1/100$ akkor teljesül, ha $36 + n^2 > 100$, azaz $n > 8$.

2. Az $y = \sqrt{x-1} + 2$ görbe $x_0 = 5$ pontjához húzott érintőre ebben a pontban állított merőleges egyenes hol metszi a koordinátatengelyeket?

   Megoldás: Ha $f(x) = \sqrt{x-1}+2$, akkor $f'(x) = 1/(2\sqrt{x-1})$. Behelyettesítve $f(5) = 4$ és $f'(5) = 1/4$, ezért az érintő az $(5, 4)$ ponton átmenő $1/4$ meredekségű egyenes, a rá merőleges pedig -4 meredekségű. A merőleges egyenes egyenlete tehát $y = -4(x-5)+4$, tengelymetszetei $(6, 0)$ és $(0, 24)$.

3. Barkács Bernát 2 mm-es lemezből kivág egy olyan síkidomot, amelyet a koordinátarendszerben a koordinátatengelyek és az $y = \cos x$ görbe $x = 0$ és $x = \pi/2$ közé eső darabja határolnak. Határozzuk meg az alakzat súlypontjának koordinátáit. (Segítség: használjuk a képletgyűjtemény formuláit és azonosságait, különösen az y koordináta számlálójának kiszámításához.)

   Megoldás:
$$\int_0^{\pi/2} x\cos x \,\mathrm{d}x = [x\sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - [-\cos x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1,$$
$$\int_0^{\pi/2} \cos x \,\mathrm{d}x = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1,$$
$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8},$$
ezért $x_s = \frac{\pi}{2} - 1$ és $y_s = \frac{\pi}{8}$.

4. Adjuk meg annak az origón átmenő egyenesnek az egyenletrendszerét, amely merőleges az alábbi két egyenesre.
$$\begin{cases} x = 3s + 8 \\ y = 4 - 2s \\ z = -s - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -5 - 5t \\ y = 4 - 2t \\ z = 3t + 3 \end{cases}$$

   Megoldás: A keresett egyenes irányvektorát a két adott egyenes irányvektorának vektoriális szorzataként kaphatjuk meg:
$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & -2 & -1 \\ -5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -16 \end{pmatrix} \,||\, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{az egyenes egyenletrendszere} \qquad \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases}.$$

5. Legyen
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -6 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki az A^{-1} inverzmátrixot (ha létezik) és az $A^{-1}\underline{\mathbf{b}}$ szorzatot.

Megoldás:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 13 & -5 & 17 \\ 16 & -6 & 21 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad\qquad A^{-1}\underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 23 \\ 28 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

II. rész: Elméleti feladatok

6. Mondjuk ki a sorozatokra vonatkozó rendőrelvet. Használjuk fel a tételt a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{2^n}$$

határérték kiszámításához.

Megoldás: Ld. jegyzet. $-1 \le \cos(n) \le 1$, ezért $-1/2^n \le \cos(n)/2^n \le 1/2^n$. Mivel $\lim_{n\to\infty}(-1/2^n) = \lim_{n\to\infty} 1/2^n = 0$, ezért $\lim_{n\to\infty} \cos(n)/2^n = 0$.

7. Tegyük fel, hogy az f függvény szigorúan monoton csökkenő és differenciálható az (a,b) intervallumon. Definiáljuk ezt a két tulajdonságot. Igaz-e ekkor, hogy $f'(x) < 0$ minden $x \in (a,b)$ esetén? Ha igaz, indokoljuk, ha nem, adjunk ellenpéldát.

Megoldás: Ld. jegyzet. Az állítás nem igaz: pl. $f(x) = -x^3$ a $(-1,1)$-en, mert $f'(x) = -3x^2$ és $f'(0) = 0$.

8. Mondjuk ki a Newton – Leibniz-tételt. Hogyan kell az állítást módosítani, ha az

$$\int_1^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

integrált szeretnénk kiszámolni? Végezzük is el az integrálást.

Megoldás: Ld. jegyzet.

$$\int_1^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{K\to\infty} \int_1^K e^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{K\to\infty} [-e^{-x}]_1^K = \lim_{K\to\infty} (e^{-1} - e^{-K}) = e^{-1}.$$

9. Tekintsük az

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= 0 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszert valamely $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$ valós együtthatókkal. Mivel minden egyenlet a jobb oldalán 0 áll, a Gauss-elimináció során nem juthatunk önellentmondó sorhoz. Hány megoldása lehet a fenti egyenletrendszernek? Ez az

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

együtthatómátrix milyen tulajdonságán múlik?

Megoldás: Mivel nem kaphatunk önellentmondó sort, 1 vagy végtelen sok megoldás lehet. Egy megoldás van, ha $\det(A) \neq 0$, végtelen sok megoldás van, ha $\det(A) = 0$.

10. Mit jelent az, hogy a V vektortérben a W részhalmaz egy altér? A háromdimenziós vektorok $V = \{(x,y,z) : x,y,z \in \mathbb{R}\}$ vektorterében alteret alkot-e a $W_1 = \{(x,y,z) : x = 3y - 2z\}$ vektorhalmaz? És a $W_2 = \{(x,y,z) : x = 3y - 2z + 4\}$ részhalmaz? A választ indokoljuk.

Megoldás: Ld. jegyzet. W_1 altér, mert zárt a műveletekre, $\underline{0} = (0,0,0)$ benne van és minden $\underline{u} = (x,y,z)$-hez $-\underline{u} = (-x,-y,-z)$ is benne van. W_1 nem altér, pl. mert $\underline{0}$ nincs benne.