

Név:.....

Neptun-kód:.....

ZH	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	V	Σ	jegy

Matematika EP1 vizsga, 2015. jan. 22.

I. rész: Számítási feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi határértéket.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(\sqrt{n} + 2)^2}{n} - \left(\frac{n}{4}\right)^{-1} \right)^{\sqrt{n}}$$

2. Tekintsük azt a görbét a térben, amelynek (x, y, z) koordinátáira fennállnak az $y = 2x$ és $z = x^2$ összefüggések. Mennyi a görbe azon pontjának x koordinátája, amelynek a tér $(6, -3, 4)$ pontjától vett távolságának négyzete minimális?

3. Az $f(x) = x^3$ függvény grafikonját megforgatjuk az x tengely körül. Mennyi az így keletkező felület $x = 0$ és $x = 1$ közé eső darabjának felszíne?

4. Adjuk meg a tér azon egyenesét, amely átmegy az $(1, 2, 3)$ ponton és merőleges a $z = 3x + 5$ síkra.

5. Határozzuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszer összes megoldását.

$$\begin{aligned} 3x - y + 4z &= 11 \\ x - z &= 2 \\ 5x - y + 2z &= 15 \\ -2x + y - 5z &= -9 \end{aligned}$$

II. rész: Elméleti feladatok

6. Definiáljuk, mit jelent az, hogy egy sorozat konvergens. Korlátos sorozat esetén milyen további tulajdonság meglétével biztosítható a konvergencia? Konvergál-e az $a_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$ sorozat? A választ a definíció alapján indokoljuk.

7. Mondjuk ki a L'Hospital-szabályt. Segítségével számítsuk ki az alábbi határértéket.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2(x+1)}$$

8. Melyik deriválási szabályból és hogyan következik a parciális integrálás képlete? Az alábbi példán mutassuk be, hogyan alkalmazható.

$$\int_0^1 \arctan x \, dx$$

9. Hogyan értelmezzük két háromdimenziós vektor vektoriális szorzatát az eredmény tulajdonságainak (hosszának és irányának) segítségével? Adjuk meg a művelet geometriai jelentését is.

10. Mit jelent az, hogy egy vektortérben néhány vektor generátorrendszert alkot? Generátorrendszert alkot-e a számnégyesek vektorterében az $(1, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 1, 1)$ vektorokból álló halmaz? Előállítható-e ezek lineáris kombinációjaként az $(1, 2, 3, 4)$ vektor? A válaszokat indokoljuk.

Minden feladat 6 pontos. A sikeres vizsgához az elméleti részből legalább 9 pontot el kell érni.