Az 1. zárthelyi megoldásai

2005. március 30.

Az 1. feladat megoldása

Definiáljuk a következő eseményeket

$$\begin{aligned} A_i &= \{i \text{ pont lesz felül a dobókockán}\}, \quad i = 1, \dots 6 \\ B &= \{2 \text{ fej adódott}\} \end{aligned}$$

$\mathbf{P}(A_i) = \dfrac{1}{6}$, $i = 1, \dots 6$ *(1 pont)*

$\mathbf{P}(B \mid A_i) = \dbinom{i}{2} \left(\dfrac{1}{2}\right)^i$, $i = 1, \dots 6$ *(4 pont)*

Bayes-tétel:

$\mathbf{P}(A_4 \mid B)$-t kellett kiszámolni, továbbá $\mathbf{P}(A_4 \mid B) = \dfrac{\mathbf{P}(B \mid A_4)\mathbf{P}(A_4)}{\mathbf{P}(B)}$ *(3 pont)*

$\mathbf{P}(A_4 \mid B) = \dfrac{\mathbf{P}(B \mid A_4)\mathbf{P}(A_4)}{\sum_{i=2}^{6} \mathbf{P}(B \mid A_i)\mathbf{P}(A_i)} = \dfrac{\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4}{\sum_{i=2}^{6} \binom{i}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^i}$ *(2 pont)*

Az 2. feladat megoldása

Legyen X a húzások száma.
X eloszlásának meghatározása 6 pontot ért, a várható érték kiszámolása 4-et.

Az eloszlás meghatározása:
A valószínűségi változó értékei: $1, 2, 3, 4, 5$ *(1 pont)*
Az értékeken felvett valószínűségek (a teljes valószínűség tételével, vagy fagráffal):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X = 1) &= \frac{4}{8} \\ \mathbf{P}(X = 2) &= \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \\ \mathbf{P}(X = 3) &= \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \\ \mathbf{P}(X = 4) &= \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \\ \mathbf{P}(X = 5) &= \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} \qquad (\textit{ 5 pont}) \end{aligned}$$

(Ha csak a feltételes valószínűségeket írja fel, akkor 1 pont)
(Ha csak 4 értéket ír fel és azok jók, akkor 1 pont levonás)
A várható érték meghatározása:
Általános képélet felírása: $\mathbf{E}X = \sum_i x_i \mathbf{P}(X = x_i)$ *(1 pont)*
Alkalmazva a feladatbeli valószínűségi változóra:
$\mathbf{E}X = \sum_{i=1}^{5} i\mathbf{P}(X = i) = \frac{4}{8} + 2\frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} + 3\frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} + 4\frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} + 5\frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} = \frac{4}{5}$ *(3 pont)*

A 3. feladat megoldása

Legyen X a 20 perc alatt beérkezett telefonhívások száma.

Mivel sokan telefonálhatnak a tanszékre, de egy-egy embernél az, hogy tényleg telfonál kis valószínűségű, ezért X Poisson eloszlású. (*1 pont* + *2 pont* az indoklás)

Egy óra alatt átlag 5 hívás, akkor 20 perc alatt $\frac{5}{3}$ hívás érkezik be. Mivel a Poisson eloszlás paramétere éppen a várható értéke, ezért $X \sim Poisson\left(\frac{5}{3}\right)$. (*2 pont*)

Ismert, hogy a Poisson eloszlás legvalószínűbb értéke, ha a paraméter nem egész, a paraméter egész része. Így X legvalószínűbb értéke $\left\lfloor \frac{5}{3} \right\rfloor = 1$. (*3 pont*)

Az, hogy éppen egy hívás lesz $\mathbf{P}(X = 1) = \lambda e^{-\lambda} = \frac{5}{3} e^{-\frac{5}{3}}$ valószínűségű. (*2 pont*)