2. pótzh
2007. december 14.
Feladatok és megoldások

1. feladat:

Minden munkanap reggel véletlenszerű, de konstans sebességgel sétálok a munkahelyemre, ami 2 km-re van a lakásomtól. Sebességem független az előző napoktól, és egyenletes eloszlásúnak vehető 4 és 6 km/óra között. Mivel a sebességem véletlentől függ, véletlentől függ az is, hogy **mennyi ideig sétálok**. Adja meg ennek az (órában mért) időtartamnak az eloszlásfüggvényét! Igazolja, hogy az időtartam várható értéke $\ln(\frac{3}{2}) \approx 0,405$ óra, a szórása $\sqrt{\frac{1}{6} - \left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2} \approx 0,05$ óra!

Megoldás:

A séta sebességét jelöljük V -vel, az időtartamát X-szel. A sebesség egyenletes eloszlású a $(4;6)$ intervallumon, ezért

$$P(V < v) = \frac{v-4}{6-4} = \frac{v-4}{2} \qquad (4 < v < 6)$$

Az út, idő, sebesség összefüggése alapján $X = \frac{2}{V}$. X akkor a legkisebb, ha V a legnagyobb, ezért X legkisebb értéke $2/6 = 1/3$. X akkor a legnagyobb, ha V a legkisebb, ezért X legnagyobb értéke $2/4 = 1/2$. Tehát X az $(\frac{1}{3};\frac{1}{2})$ intervallumba esik. X eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = P(X < x) = P(\frac{2}{V} < x)$$

$$= 1 - P(V < \frac{2}{x}) = 1 - \frac{\frac{2}{x} - 4}{2} = 3 - \frac{1}{x} \qquad \left(\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}\right)$$

A várható érték kiszámolásához szükség van a sűrűségfüggvényre:

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{x^2} \qquad \left(\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}\right)$$

A várható érték:

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} x\ \frac{1}{x^2}\ dx = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x}\ dx = [\ln(x)]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \left(\ln(\frac{1}{2})\right) - \left(\ln(\frac{1}{3}) =\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

Szükség van a második momentumra:

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} x^2 \, \frac{1}{x^2} \; dx = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} 1 \; dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

A szórás egyenlő a második momentum mínusz a várható érték négyzetéből vont négyzetgyök:

$$\sqrt{\frac{1}{6} - \left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2}$$

2. feladat:

A **teljes menetidő** két tag összege. Az egyik tag a séta ideje: **amennyi időt mozgásban vagyok** (ezzel foglalkoztunk az 1. példában), a másik tag pedig az idő, amennyit az útkereszteződéseknél összesen várakoznom kell: **amennyi időt álldogálok**. Az, hogy mennyit álldogálok, független attól, hogy mennyi ideig mozgok, és egyenletes eloszlású 0 és $\frac{1}{12}$ óra között. Mi a valószínűsége annak, hogy a teljes menetidő $\frac{1}{2}$ óránál kevesebb? (A valószínűséget fel kell írni egy olyan képlettel, melynek numerikus értéke a valószínűséget adja, de a képlet numerikus értékét kiszámolni nem kell.)

Megoldás:

Az első feladat megoldásában már használt X mellett bevezetjük az Y és Z jelöléseket: $X =$ amennyi időt mozgásban vagyok, $Y =$ amennyi időt álldogálok, $Z =$ teljes menetidő. Mivel $Z = X + Y$, először meghatározzuk az (X, Y) kétdimenzós valószínűségi változó $f(x, y)$ sűrűségfüggvényét, hogy azután abból integrálással kiszámolhassuk a $P\left(Z < \frac{1}{2}\right)$ valószínűséget.

X sűrűségfüggvényét már tudjuk az 1. feladat megoldásából: $\frac{1}{x^2}$ az $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$ intervallumon. Mivel Y egyenletes eloszlású 0 és $\frac{1}{12}$ között, sűrűségfüggvénye 12-vel egyenlő a $\left(0; \frac{1}{12}\right)$ intervallumon. X és Y függetlensége miatt ezekből szorzással adódik $f(x, y)$:

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2} \, 12 = \frac{12}{x^2} \qquad \left(\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}, \;\; 0 < y < \frac{1}{12}\right)$$

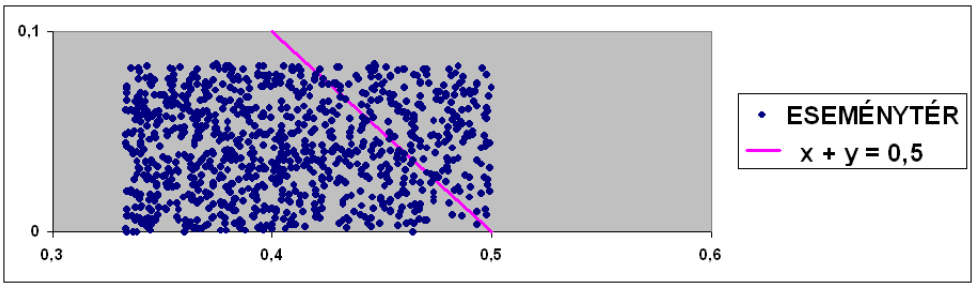
A $P\left(Z < \frac{1}{2}\right) = P\left(X + Y < \frac{1}{2}\right)$ valószínűséget úgy kapjuk meg, hogy $f(x, y)$-t az eseménytérnek azon a részén integráljuk, ahol az $x + y < \frac{1}{2}$ egyenlőtlenég fennáll. Az

$$\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2} \qquad 0 < y < \frac{1}{12} \qquad x + y < \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenégek egy trapézt határoznak meg, amit A-val jelölünk. (Lásd az Excellel készített egyszerű rajzot, illetve rajzoljon Ön szebbet, jobbat!)

A kérdezett valószínűség:

$$P(X + Y < \frac{1}{2}) = \iint_A f(x, y) \;\; dx \; dy$$



A számolás részletezése:

A rajzból látszik, hogy a téglalap alakú eseménytérben a háromszög komplementere egy háromszög, amin kényelmesebb integrálni, mint a trapézon, ezért a kérdezett valószínűséget a komplementer esemény segítségével jobb kiszámolni:

$$P(X+Y<\frac{1}{2}) = 1 - P(X+Y>\frac{1}{2}) = 1 - \iint_B f(x,y)\ \ dx\ dy$$

ahol az B halmaz az

$$\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2} \qquad 0 < y < \frac{1}{12} \qquad x+y > \frac{1}{2}$$

egyenlőtlenségek által meghatározott háromszöget jelenti. Az integrál kiszámolása:

$$= 1 - \iint_B \frac{12}{x^2}\ \ dx\ dy$$

$$= 1 - \int_{\frac{5}{12}}^{\frac{6}{12}} \left(\int_{\frac{6}{12}-x}^{\frac{1}{12}} \frac{12}{x^2}\ \ dy \right) dx$$

$$= 1 - \int_{\frac{5}{12}}^{\frac{6}{12}} \left(\frac{12}{x^2} \left(x - \frac{5}{12} \right) \right) dx$$

$$= 1 - \int_{\frac{5}{12}}^{\frac{6}{12}} \left(\frac{12}{x} - \frac{5}{x^2} \right) dx$$

$$= 1 - \left[12\ \ln(x) + 5\ \frac{1}{x} \right]_{\frac{5}{12}}^{\frac{6}{12}}$$

$$= 1 - \left(\left(12\ \ln(\frac{6}{12}) + 5\ \frac{1}{\left(\frac{6}{12}\right)} \right) - \left(12\ \ln(\frac{5}{12}) + 5\ \frac{1}{\left(\frac{5}{12}\right)} \right) \right)$$

$$= 0,81$$

3. feladat:

Ha egy szemeszterben 100 munkanap van, akkor ez 100 reggeli sétát jelent. **A 100 reggeli séta alatt eltöltött összes időnek** (a várakozási idők nélkül) mennyi a várható értéke, mennyi a szórása? Mi a valószínűsége annak, hogy egy szemeszter alatt (a várakozási idők nélkül) több mint 41 órát töltök a reggeli sétákkal? (A feladat megoldásában támaszkodhat az 1. feladat végén megadott numerikus eredményekre.)

Megoldás:

A 100 reggeli séta alatt eltöltött összes idő 100 függeetlen séta-idő összege, ezért normális eloszlásúnak vesszük. A várható értéke az egy sétához tartozó várható érték 100-szorosa, vagyis $100 \times 0,405 = 40,5$. A szórása az egy sétához tartozó szórás $\sqrt{100} = 10$-szerese: $10 \times 0,05 = 0,5$. A kérdezett valószínűség:

$$P(\text{összes idő} > 41) = 1 - P(\text{összes idő} < 41)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{41 - 40,5}{0,5}\right) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0,84 = 0,16$$