Matematika B4
2003.10.18. ZH megoldásai

1. Feladat

Szabályos érmével, illetve szabályos dobókockával dobunk.
$X :=$ ahány dobás kell az első fejig.
$Y :=$ ahány dobás kell az első hatosig.
Mennyi ekkor $P(X = Y)$ és $P(X < Y)$?

1. Megoldás

Mivel mind a fej-, mind a 6-os-dobás siker-kudarc típusú esemény, így mind az X, mind az Y valószínűségi változó eloszlása geometriai, méghozzá az alábbi paraméterekkel:

$$p_X = \tfrac{1}{2} \qquad q_X = \tfrac{1}{2}$$

$$p_Y = \tfrac{1}{6} \qquad q_Y = \tfrac{5}{6}$$

Tehát

$$P(X = a) = \left(\frac{1}{2}\right)^{a-1} \cdot \frac{1}{2},$$

és

$$P(Y = b) = \left(\frac{5}{6}\right)^{b-1} \cdot \frac{1}{6}.$$

2 pont

A együttes eloszlást a valószínűségi változók függetlensége miatt szorzással kapjuk:

$$P(X = a, Y = b) = \left(\frac{1}{2}\right)^{a-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{b-1} \cdot \frac{1}{6}.$$

1 pont

$$P(X = Y) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = Y = i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = i \text{ } \acute{e}s \; Y = i) =$$

2 pont

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^{i-1} = \frac{1}{12} \cdot \frac{\frac{5}{12}}{1 - \frac{5}{12}} = \frac{1}{7}.$$

1 pont

$$P(X < Y) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X < Y | X = i) \cdot P(X = i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(Y > i | X = i) \cdot P(X = i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(Y > i) \cdot P(X = i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} P(Y = j) \cdot P(X = i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{j-1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{2} =$$

2 pont

$$= \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \sum_{j=i+1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{j-i} =$$

$$= \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^{i-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k} =$$

$$= \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^{i-1} \cdot \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{5}{6}} =$$

$$= \frac{5}{12} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^{i-1} = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{1 - \frac{5}{12}} = \frac{5}{7}.$$

2 pont

2. Feladat

Egy ládában 2 piros és 4 fehér golyó van. Visszatevés nélkül húzunk az első pirosig. Adja meg a húzások számának az eloszlását és a várható értékét!

2. Megoldás

Legyen X = a húzások száma az első pirosig (a pirosat is beleértve). Ekkor X értéke $1, 2, 3, 4$ vagy 5 lehet, azaz az eseményterünk az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz.

A kérdezett eloszlás könnyen számolható:

$$P(X = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$
$$P(X = 2) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15},$$

2 pont

$$P(X = 3) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{5},$$
$$P(X = 4) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15},$$
$$P(X = 5) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{15}.$$

3 pont

És a várható érték:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{5} P(X = k) \cdot k =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{4}{15} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 3 + \frac{2}{15} \cdot 4 + \frac{1}{15} \cdot 5 =$$

3 pont

$$= \frac{35}{15} = 2,33$$

1 pont

3. Feladat

Ha egy városban délidőben egy óra alatt átlagosan 7 baleset történik, akkor negyed óra alatt hány baleset a legvalószínűbb? A használt eloszlás jogosságát indokolja!

3. Megoldás

Legyen a valószínűségi változónk, X = a városban $1/4$ óra alatt bekövetkező balesetek száma.

1 pont

Ekkor X eloszlását modellezhetjük Poisson-eloszlással, mivel
sok autó közlekedik a városban,

1 pont

egy adott autó balesetének valószínűsége igen kicsi, és

2 pont

a balesetek jó közelítéssel egymástól függetlenül történnek.

2 pont

Mivel az 1 óra alatt bekövetkező balesetek számának várható értéke 7, így az 1/4 óra alatt bekövetkező balesetek számának várható értéke, mely egyben az X Poisson-eloszlásának paramétere:

$$E(X) = 7 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = \lambda_X.$$

2 pont

És, mivel Poisson-eloszlásról van szó, a valószínűségi változó legvalószínűbben kapott értéke, azaz a módusz:

$$m = \lfloor \lambda \rfloor = \lfloor \frac{7}{4} \rfloor = 1.$$

2 pont