Valószínűségszámítás viszga 2005. 12. 20.

Munkaidő: 90 perc

Számológépet nem szabad használni. Ahol a számolás gép nélkül nem végezhető el, ott az eredményt olyan képlettel adja meg, amelynek numerikus értékét már csak épp ki kellene számolni.

1. Anna, Bea és Csilla egy júniusi szombaton arról beszélgetnek, hogy kimenjenek-e vasárnap napozni a strandra. Anna szerint, ha másnap délben fúj a szél, akkor 0,6 valószínűséggel süt a nap. Bea szerint, ha másnap délben süt a nap, akkor 0,4 valószínűséggel fúj a szél. Csilla szerint másnap délben 0,8 fúj a szél. Lehetséges-e, hogy mindhárom lánynak igaza van? Ha igen, akkor adja meg annak a valószínűségét, hogy másnap sütni fog a nap; ha nem lehetséges, akkor indokolja meg, hogy miért nem!
2. Péter és Pál kockával játszik. Ha páratlan dobás adódik, akkor Péter 20 forintot veszít, ha négyes, akkor 30 forintot nyer, a többi esetben új dobásra kerül sor. A második dobásnál Péter 50 forintot nyer, ha hárommal osztható szám jön ki, 20 forintot veszít, ha 4-es a dobás, 30 forintot nyer az egyéb esetekben. Írja fel Péter nyereségének várható értékét és szórását!
3. Egy érmével a hatodik fejig dobunk, egy kockával pedig a második hatosig. A szükséges dobások számát X, illetve Y jelöli. Adja meg az alábbi valószínűségeket:
   $P(X = 10)$, $P(Y = 10)$, $P(X + Y = 10)$.
4. Legyen az X valószínűségi változó egyenletes eloszlású a [0, 1] intervallumon és $Y = \sin X$. Adja meg Y eloszlásfüggvényének és sűrűségfüggvényének képletét! Fordítson figyelmet az értelmezési tartományokra is!
5. X és Y egy-egy pártra leadott szavazat-arányokat jelöl. Az (X, Y) vektorváltozó sűrűségfüggvénye $f(x, y) = 24xy$ $(x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1)$. Számolja ki X sűrűségfüggvényét! X és Y függetlenek-e? (Válaszát indokolja!) Számolja ki az XY szorzat várható értékét!
6. Egy Túró Rudi automata ismeretlen p valószínűséggel nyeli el a bedobott érmét. Eddig százszor használtuk a gépet és ebből tízszer elnyelte a pénzünket. Ennek alapján normális eloszlás segítségével, 95% biztonsággal becsülje meg, hogy milyen pontos a $p \approx 0.1$ közelítés! (A standard normál eloszlás szerint a [-2, 2] intervallum valószínűségét vegye 0,95 -nek!)

Megoldások

1. Anna, Bea és Csilla egy júniusi szombaton arról beszélgetnek, hogy kimenjenek-e vasárnap napozni a strandra. Anna szerint, ha másnap délben fúj a szél, akkor 0,6 valószínűséggel süt a nap. Bea szerint, ha másnap délben süt a nap, akkor 0,4 valószínűséggel fúj a szél. Csilla szerint másnap délben 0,8 fúj a szél. Lehetséges-e, hogy mindhárom lánynak igaza van? Ha igen, akkor adja meg annak a valószínűségét, hogy másnap sütni fog a nap; ha nem lehetséges, akkor indokolja meg, hogy miért nem!

Megoldás:

P (N | S) = 0,6
P (S | N) = 0,4
P (S) = 0,8

A Bayes-tételből:

$$P(N \mid S) = \frac{P(N)}{P(S)} * P(S \mid N) \qquad \text{2 pont}$$

Innen:

$$P(N) = \frac{0{,}6 * 0{,}8}{0{,}4} = 1{,}2 \qquad \text{5 pont}$$

P (N) > 1, ezért az állítás ellentmondásos. Nem lehet mindenkinek igaza. 3 pont

2. Péter és Pál kockával játszik. Ha páratlan dobás adódik, akkor Péter 20 forintot veszít, ha négyes, akkor 30 forintot nyer, a többi esetben új dobásra kerül sor. A második dobásnál Péter 50 forintot nyer, ha hárommal osztható szám jön ki, 20 forintot veszít, ha 4-es a dobás, 30 forintot nyer az egyéb esetekben. Írja fel Péter nyereségének várható értékét és szórását!

Megoldás:

$P(X = -20) = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}*\frac{1}{6}=\frac{5}{9}$ 1 pont

$P(X = 30) = \frac{1}{6}+\frac{1}{3}*\frac{1}{2}=\frac{3}{9}$ 1 pont

$P(X = 50) = \frac{1}{3}*\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ 1 pont

$E(X) = (-20)*\frac{5}{9}+30*\frac{3}{9}+50*\frac{1}{9}=\frac{40}{9}$ 2 pont

$E(X^2) = (-20)^2*\frac{5}{9}+30^2*\frac{3}{9}+50^2*\frac{1}{9}=800$ 3 pont

$\sigma = \sqrt{E(X^2)-E(X)^2} = \sqrt{800-\left(\frac{40}{9}\right)^2}$ (= 27,93) 2 pont

3. Egy érmével a hatodik fejig dobunk, egy kockával pedig a második hatosig. A szükséges dobások számát X, illetve Y jelöli. Adja meg az alábbi valószínűségeket:
P (X = 10), P (Y = 10), P (X + Y = 10).

Megoldás:

X és Y függetlenek, negatív binomiális eloszlásúak.

P (X = i) = $\binom{i-1}{5} * \left(\frac{1}{2}\right)^{i}$

P (Y= j) = $(j-1) * \left(\frac{1}{6}\right)^{2} * \left(\frac{5}{6}\right)^{j-2}$ (j ≥ 2)

Így:

P (X = 10) = $\binom{9}{5} * \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ 2 pont

P (Y = 10) = $9 * \left(\frac{1}{6}\right)^{2} * \left(\frac{5}{6}\right)^{8}$ 2 pont

P (X + Y) = $\sum_{i=6}^{8} P(X=i \cup Y=10-i)$ = a függetlenség miatt

= P (X = 6) * P (Y = 4) + P (X = 7) * P (Y = 3) + P (X = 8) * P (Y = 2) = 3 pont

= $\left(\frac{1}{2}\right)^{6} * 3 * \left(\frac{1}{6}\right)^{2} * \left(\frac{5}{6}\right)^{2} + 6 * \left(\frac{1}{2}\right)^{7} * 2 * \left(\frac{1}{6}\right)^{2} * \frac{5}{6} + \left(\frac{7}{5}\right) * \left(\frac{1}{2}\right)^{8} * \left(\frac{1}{6}\right)^{2}$ 2 pont

4. Legyen az X valószínűségi változó egyenletes eloszlású a [0, 1] intervallumon és Y = sin X. Adja meg Y eloszlásfüggvényének és sűrűségfüggvényének képletét! Fordítson figyelmet az értelmezési tartományokra is!

Megoldás:

G (y) = P (Y < y) = P (sin X < y) = P (X < arcsin y) = arcsin y 5 pont

g (y) = G' (y) = (arcsin y)' = $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 3 pont

$X \in [0,1] \rightarrow \sin X \in [0, \sin 1]$, ezért 0 ≤ y ≤ sin 1 = 0,8415 2 pont

5. X és Y egy-egy pártra leadott szavazat-arányokat jelöl. Az (X, Y) vektorváltozó sűrűségfüggvénye f (x, y) = 24xy (x > 0, y > 0, x + y < 1). Számolja ki X sűrűségfüggvényét! X és Y függetlenek-e? (Válaszát indokolja!) Számolja ki az XY szorzat várható értékét!

Megoldás:

X sűrűségfüggvénye: f_1 (x) = $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$ = $\int\limits_{0}^{1-x} 24xy\,dy$ = $\left[24x\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1-x}$ =

= 12 $(1 - x)^2$ (0 < x < 1) 4 pont

X & Y nem függetlenek, mert az együttes eloszlás tartója nem téglalap. 2 pont

E (XY) = $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy$ = $24\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{1-x}(xy)^2\,dy\,dx$ = $24\int\limits_{0}^{1}\frac{x^2(1-x)^2}{3}\,dx$ =

$8*\left[\frac{x^3}{3}-3*\frac{x^4}{4}+3*\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}\right]_{x=0}^{x=1}$ = $\frac{2}{15}$ 4 pont

6. Egy Túró Rudi automata ismeretlen p valószínűséggel nyeli el a bedobott érmét. Eddig százszor használtuk a gépet és ebből tízszer elnyelte a pénzünket. Ennek alapján normális eloszlás segítségével, 95% biztonsággal becsülje meg, hogy milyen pontos a p ≈ 0.1 közelítés! (A standard normál eloszlás szerint a [-2, 2] intervallum valószínűségét vegye 0,95 -nek!)

Megoldás:

$P(|rel.\,gyak. - p| < x)$,ahol

$rel.\,gyak. = \frac{\sum X_i}{n}$ és p = 0,1 (A feladat megértése) 1 pont

= $P\left(\left|\frac{\sum X_i - np}{n}\right| < x\right)$ = $P\left(\left|\frac{\sum X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right| < \frac{x\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)$ =

=2 Φ $\left(\frac{x\,10}{\sqrt{p(1-p)}}\right)$ - 1 ≈ 0,95 4 pont

$\rightarrow \frac{x\,10}{\sqrt{p(1-p)}}$ = 2

x = $\frac{2\sqrt{p(1-p)}}{10}$ = $\frac{1}{5}\sqrt{p(1-p)}$ ≤ $\frac{1}{10}$ $\left(ha\ p = \frac{1}{2}\right)$ 3 pont

Tehát a közelítés hibája: x ≤ $\frac{1}{10}$ legalább 95%-os valószínűséggel.

A feladatsort és a megoldásokat begépelte: Minárik Péter
e-mail: mp555@hszk.bme.hu