Feladatok a Diffrenciálegyenletek IV témakörhöz

1. Határozzuk meg következő differenciálegyenletek általános megoldását a próba függvény módszerrel.

   (a) $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$

   (b) $y'' - 3y' - 4y = 2\sin t$

   (c) $y'' - 3y' - 4y = -8t\cos(2t)$

   (d) $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t} + 2\sin t - 8t\cos(2t)$

   (e) $y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t}$

2. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

   (a) $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2t}$

   (b) $y'' + 2y' + 5y = 3\sin(2t)$

   (c) $y'' - 2y' - 3y = -3te^{-t}$

   (d) $y'' + 2y' + y = 2e^{-t}$

3. Határozzuk meg a kezdetiérték probléma megoldását:

$$y'' + 4y = t^2 + 3t, \qquad y(0) = 0, y'(0) = 2.$$

4. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y'' + 4y = 3\csc t, \qquad (\csc t = 1/\sin t)$$

5. Határozzuk meg az alábbi két differenciálegyenlet megoldását a konstans variációs módszerrel majd a próba függvény módszerrel is.

   (a) $y'' - 5y' + 6y = 2e^{t}$.

   (b) $4y'' - 4y' + y = 16e^{t/2}$.

6. Határozzuk mega következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y'' + y = \tan t, \qquad 0 < t < \frac{\pi}{2}.$$

7. Határozzuk mega következő differenciálegyenlet általános megoldását:

$$4y'' + y = 2\sec(t/2), \qquad -\pi < t < \pi \ (\sec t = 1/\cos t).$$

8. Tekintsük a következő differenciálegyenletet:

$$t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 2t^3, \quad t > 0.$$

Először ellenőrizzük le, hogy az

$$Y_1 = t, \qquad Y_2 = te^t$$

függvények a megfelelő $t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0$ homogén egyenlet fundamentális megoldását adják. Ezek után határozzuk meg az eredeti inhomogén egyenlet általános megoldását!

Eredmények

1. Mivel

$$y_{i,alt} = Y_{h,alt} + y_{i,p} \tag{1}$$

ezért először a homogén részt oldjuk meg:

$$Y'' - 3Y' - 4Y = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet $r^2 - 3r - 4 = 0$. Ennek gyökei:

$$r_1 = -1, \qquad r_2 = 4. \tag{2}$$

Az általános megoldás.

$$Y_{h,alt} = c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t}. \tag{3}$$

Vegyük észre, hogy a baloldal és így a homogén rész általános megoldása közös a következő 5 feladatban.

1a. Mivel 2 nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek ezért az $y = y_{i,p}$ partikuláris megoldást

$$y = c \cdot e^{2t}$$

alakban keressük. A c konstans meghatározásához az $y = c \cdot e^{2t}$ függvényt vissza helyettesítjük az $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$ egyenletbe. Ehhez először kiszámoljuk:

$$y' = 2ce^{2t}, \qquad y'' = 4ce^{2t}.$$

Vissza helyettesítés után kapjuk:

$$(4c - 3 \cdot 2c - 4 \cdot c) \cdot \mathrm{e}^{2t} = 3\mathrm{e}^{2t}.$$

Innen $c = -1/2$. Vagyis

$$y = y_{i,p} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}.$$

Ez és (3) együttesen azt adja, hogy

$$y_{i,alt} = c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{4t} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}$$

1b. Csak az $y = y_{i,p}$ partikuláris megoldást meghatározása van hátra, hiszen az $Y_{h,alt}$ megoldást már előbb meghatároztuk. Az $y = y_{i,p}$ megoldást keressük

$$y = A\cos t + B\sin t$$

alakban. Vagyis meg kell határozni az A és B konstansokat úgy hogy $y = A\cos t + B\sin t$ egy megoldása legyen az

$$y'' - 3y' - 4y = 2\sin t. \tag{4}$$

egyenletnek. Ehhez kiszámoljuk az $y = A\cos t + B\sin t$ első és második deriváltját:

$$y' = -A\cos t + B\sin t, \qquad y'' = -A\cos t - B\sin t.$$

A (4) egyenletbe való vissza helyettesítés után:

$$(-5A - 3B)\cos t + (3A - 5B)\sin t = 2\sin t.$$

A $\cos t$ és a $\sin t$ együtthatói mindkét oldalon meg kell hogy egyezzenek:

$$\begin{aligned} -5A - 3B &= 0 \\ 3A - 5B &= 2. \end{aligned}$$

Tehát: $A = 3/17$ és $B = -5/17$. Ezért

$$y_{i,p} = \frac{3}{17}\cos t - \frac{5}{17}\sin t.$$

Ez, (1) és (3) együttesen adja, hogy

$$y_{i,alt} = \underbrace{c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{4t}}_{Y_{h,alt}} + \underbrace{\frac{3}{17}\cos t - \frac{5}{17}\sin t}_{y_{i,p}}.$$

1c. Meg kell határoznunk az A, B konstansokat úgy, hogy $y_{i,p} = A\mathrm{e}^t\cos(2t) + B\mathrm{e}^t\sin(2t)$ az $y'' - 3y' - 4y = -8t\cos(2t)$ differenciálegyenlet egy megoldása legyen. Ehhez kiszámoljuk az első és második deriváltat:

$$y' = (A + 2B)\,\mathrm{e}^t\cos(2t) + (-2A + B)\,\mathrm{e}^t\sin(2t),$$

$$y'' = (-3A + 4B)\,\mathrm{e}^t\cos(2t) + (-4A - 3B)\,\mathrm{e}^t\sin(2t).$$

Vissza helyettesítve az $y'' - 3y' - 4y = -8t\cos(2t)$ egyenletbe kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 10A + 2B &= 8 \\ 2A - 10B &= 0. \end{aligned}$$

A megoldások: $A = 10/13$ and $B = 2/13$. Tehát

$$y_{i,p} = \frac{10}{13}\mathrm{e}^t\cos(2t) + \frac{2}{13}\mathrm{e}^t\sin(2t).$$

Ez, (1) és (3) együttesen adja, hogy:

$$y_{i,alt} = \underbrace{c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{4t}}_{Y_{h,alt}} + \underbrace{\frac{10}{13}\mathrm{e}^t\cos(2t) + \frac{2}{13}\mathrm{e}^t\sin(2t)}_{y_{i,p}}.$$

1d. Vegyük észre, hogy az egyenlet jobboldala az előző három egyenlet jobboldalainak az összege. Használva, hogy az egyenletünk **lineáris** ez azt jelenti, hogy az általános az előző három egyenlet partikuláris megoldásainak megoldásainak összegeként kapjuk ezen egyenlet egy partikuláris megoldását:

$$y_{i,p} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} + \frac{3}{17}\cos t - \frac{5}{17}\sin t + \frac{10}{13}\mathrm{e}^t\cos(2t) + \frac{2}{13}\mathrm{e}^t\sin(2t)$$

Tehát az általános megoldás:

$$y_{i,alt} = \underbrace{c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{4t}}_{Y_{h,alt}} + \underbrace{-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} + \frac{3}{17}\cos t - \frac{5}{17}\sin t + \frac{10}{13}\mathrm{e}^t\cos(2t) + \frac{2}{13}\mathrm{e}^t\sin(2t)}_{y_{i,p}}.$$

1e. Használva (2)-et látjuk, hogy a -1 egyszeres gyöke a karakterisztikus polinomnak. Ezért egy partikuláris megoldást

$$y = (At + B)\mathrm{e}^{-t}$$

alakban keresünk. Vagyis meg kell találnunk az A és B konstansokat, melyekre az $y = (At + B)\mathrm{e}^{-t}$ függvény az $y'' - 3y' - 4y = 2\mathrm{e}^{-t}$ egyenletnek megoldása lesz. Először kiszámoljuk a deriváltakat:

$$y' = (A - B)e^{-t} - Ate^{-t}, \qquad y'' = (-2\,A + B)e^{-t} + Ate^{-t}.$$

Vissza helyettesítés után adódik, hogy $A = -2/3$, $B = 0$. Így az $y'' - 3y' - 4y = 2\mathrm{e}^{-t}$ egyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_{i,p} = -\frac{2}{3}\mathrm{t}\mathrm{e}^{-t}.$$

Ez, (1) és (3) együttesen adja, hogy:

$$y_{i,alt} = \underbrace{c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2\mathrm{e}^{4t}}_{Y_{h,alt}} + \underbrace{-\frac{2}{3}t\mathrm{e}^{-t}}_{y_{i,p}}.$$

2a. $y = c_1\mathrm{e}^{3t} + c_2\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{2t}$
2b. $y = c_1\mathrm{e}^{-t}\cos(2t) + c_2\mathrm{e}^{-t}\sin(2t) + \frac{3}{17}\sin(2t) - \frac{12}{17}\cos(2t)$
2c.$y = c_1\mathrm{e}^{3t} + c_2\mathrm{e}^{-t}\frac{3}{16}t\mathrm{e}^{-t} + \frac{3}{8}t^2\mathrm{e}^{-t}$
2d.$y = c_1\mathrm{e}^{-t} + c_2t\mathrm{e}^{-t} + t^2\mathrm{e}^{-t}$.
3. $y = \frac{7}{10}\sin(2t) - \frac{19}{40}\cos(2t) + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8} + \frac{3}{5}\mathrm{e}^{t}$
4.Az általános megoldást a

$$y_{i,alt} = Y_{h,alt} + y_{i,p} \tag{5}$$

formula adja mivel az egyenlet lineáris. Az egyenlet homogén része:

$$Y'' + 4Y = 0.$$

Ennek karakterisztikus polinomja $r^2 + 4r = 0$. A karakterisztikus polinom gyökei:

$$r_1 = 2i, \qquad r_2 = -2i.$$

A homogén rész általános megoldása:

$$Y_{h,alt} = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t). \tag{6}$$

Az $y = y_{i,p}$ partikuláris megoldás meghatározásához a konstans variációs módszert kell használnunk. Vagyis meg kell határozni azon $c_1(t), c_2(t)$ konstansokat, melyekre:

$$y = c_1(t)\cos(2t) + c_2(t)\sin(2t) \tag{7}$$

egy megoldása az $y'' + 4y = 3\csc t$ egyenletnek. Ehhez a következő algebrai egyenletet kell megoldanunk:

$$\begin{aligned} c_1'(t)\cos(2t) + c_2'(t)\sin(2t) &= 0 \\ -2c_1'(t)\sin(2t) + 2c_2'(t)\cos(2t) &= 3\csc t. \end{aligned}$$

Az első egyenletből adódik, hogy

$$c_2'(t) = -c_1'(t)\frac{\cos(2t)}{\sin(2t)}.$$

Ezt a második egyenletbe vissza helyettesítve:

$$c_1'(t) = -\frac{3\csc t\sin(2t)}{2} = -3\cos t.$$

Ezt az utolsó előtti egyenletbe vissza írva:

$$c_2'(t) = \frac{3}{2}\csc t - 3\sin t.$$

Integrálás után kapjuk:

$$c_1(t) = -3\sin(t),\ c_2(t) = \frac{3}{2}\ln|\csc t - \cot t| + 3\cos t.$$

(Az integráláskor adódó konstansokat elhagyjuk mert csak egyetlen partikuláris megoldásra van szükségünk.) Ezért

$$y = y_{i,p} = (-3\sin(t))\cdot\cos(2t) + (\frac{3}{2}\ln|\csc t - \cot t| + 3\cos t)\cdot\sin(2t).$$

Használva az (5) és a (6) formulákat kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} y_{i,alt} &= c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) \\ &+ (-3\sin(t))\cdot\cos(2t) + (\frac{3}{2}\ln|\csc t - \cot t| + 3\cos t)\cdot\sin(2t). \end{aligned}$$

5a. $y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + e^t$.
5b. $y = c_1 e^{t/2} + c_2 t e^{t/2} + 2t^2 e^{t/2}$.
6. $y = c_1\cos t + c_2\sin t - (\cos t)\ln(\tan t + \sec t)$.
7. $y = c_1\cos(t/2) + c_2\sin(t/2) + t\sin(t/2) + 2\,[\ln\cos(t/2)]\cos(t/2)$.
8. $y = c_1 t + c_2 t e^t - 2t^2$.