

Feladatok és pár megoldás is a Differenciálegyenletek I. témakörben

2.1. Mi az

$$y' = \frac{y}{x}$$

egyenlet általános és egy partikuláris megoldása?

2.2. Oldjuk meg az

$$y' = e^{x+y}$$

szétválasztható változójú differenciálegyenletet.

2.3. A radioaktív bomlás során a sugárzó anyag $y(t)$ mennyisége arányos az anyag csökkenésének gyorsaságával. Írjuk fel a folyamatot leíró differenciálegyenletet. Határozzuk meg az arányossági tényezőt, ha az anyag felezési ideje 100 (másodperc), azaz ennyi idő múlva éppen fele annyi sugárzó anyag van, mint kezdetben. Mi lesz az $y(t)$ függvény alakja, ha kezdetben 1 (kilogramm) volt anyagunkból?

2.4. Határozzuk meg az

$$y' = \frac{e^x}{y+1} \quad ; \quad y(0) = -4$$

Cauchy-feladat megoldását.

2.5. Közegben (pl. víz, levegő) nagyobb sebességgel haladó magára hagyott test sebességének négyzetével arányos módon lassul. Milyen görbe szerint alakul sebesség-idő grafikonja?

2.6. Keressük meg az

$$y' = \frac{1 + 2e^y}{e^y x \ln(x)}$$

szétválasztható változójú egyenlet általános és egy partikuláris megoldását.

2.7. Oldjuk meg az

$$(e^{-2y} - e^{-y})y' = \frac{e^{x-y} + e^{-x-y}}{e^y + 1}$$

ijesztő alakú egyenletet.

2.8. Oldjuk meg az

$$x + y - xy' = 0 \quad ; \quad y(1) = 1$$

változóban homogén kezdetiérték-feladatot (Cauchy-problémát).

2.9. Keressük meg az

$$xe^{y/x} + y = xy'$$

egyenlet összes megoldását.

2.10. Mely $y(x)$ függvényekre igaz az

$$xy' = y(\ln(y) - \ln(x))$$

változóban homogén differenciálegyenlet?

2.1. eredménye: $y = 0$ minden x -re, vagy $y = \pm e^C x$, ahol C konstans. Egy partikuláris megoldása például $y = -3x$ amikor a mínusz érvényes és $C = \ln(3)$.

2.2. eredménye: $y = -\ln(-e^x - C)$, ahol $C < 0$ konstans. A megoldás adott C mellett csak ott értelmezett, ahol $-e^x - C > 0$ azaz $x < \ln(-C)$.

2.3. megoldása: A differenciálegyenlet

$$-\frac{dy}{dt} = Ay \quad ,$$

hiszen bal oldalon áll az anyag csökkenésének sebessége, jobb oldalon a mennyisége, A az arányossági tényező. Ez egy egyszerű szétválasztható egyenlet. "Átrendezve" és integrálva

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= -A \int dt \\ \ln(|y|) &= -At + C \quad (C \text{ konstans}) \\ y &= \pm e^C e^{-At} \quad , \end{aligned}$$

de persze csak a plusz eset azaz $y > 0$ megoldás releváns. Mi lesz A értéke? A felezési idő értéke és definíciója szerint

$$\begin{aligned} y(100) &= \frac{1}{2}y(0) \\ e^C e^{-100A} &= \frac{1}{2}e^C \\ -100A &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ A &= \frac{\ln(2)}{100} \quad . \end{aligned}$$

A kezdeti $y(0) = 1$ (kilogramm) feltétellel a feladat Cauchy-problémává vált. $e^C e^{-A \cdot 0} = 1$ miatt $e^C = 1$, $C = 0$, így ezzel a feltétellel az

$$y(t) = e^{-At} = e^{-(\ln(2)/100)t}$$

függvény írja le a sugárzó anyag mennyiségét.

2.4. megoldása: Az egyenletet átírva

$$\begin{aligned} \int (y+1) dy &= \int e^x dx \\ \frac{y^2}{2} + y &= e^x + C \end{aligned}$$

másodfokú egyenletre jutunk, melynek megoldása

$$y(x) = -1 \pm \sqrt{1 + 2(e^x + C)} \quad ,$$

a kezdeti feltétel szerint

$$y(0) = -1 \pm \sqrt{1 + 2C} = -4$$

tehát a megoldásban a mínusz érvényes, és $C = 3$. Ezzel a megoldás

$$y(x) = -1 - \sqrt{7 + 2e^x} .$$

2.5. eredménye: A felírható egyenlet

$$-\frac{dv}{dt} = A v^2$$

($A > 0$ konstans), megoldása

$$v = \frac{1}{At + C} .$$

2.6. megoldása: A szétválasztható egyenletet átrendezve és integrálva

$$\int \frac{e^y}{1 + 2e^y} dy = \int \frac{1}{x \ln(x)} dx .$$

Az $u = e^y$ és $v = \ln(x)$ helyettesítéssel

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{1 + 2u} &= \int \frac{1}{v} dv \\ \frac{1}{2} \ln(1 + 2u) &= \ln(|v|) + C \\ \ln(1 + 2u) &= \ln(v^2) + 2C \\ u &= \frac{1}{2} (e^{2C} v^2 - 1) \\ y = \ln(u) &= \ln(e^{2C} (\ln x)^2 - 1) - \ln(2) \end{aligned}$$

az általános megoldás (olyan $x > 0$ -ra, hogy $(e^{2C} (\ln x)^2 - 1) > 0$ teljesüljön). Egy partikuláris megoldás a $C = 2$ eset, ekkor

$$y = \ln(e^4 (\ln x)^2 - 1) - \ln(2) .$$

2.7. eredménye: $y = \operatorname{arch}(\operatorname{sh}(x) + \frac{C}{2})$ adott C konstans mellett ott, ahol $(\operatorname{sh}(x) + \frac{C}{2}) \geq 1$.

2.8. eredménye: Az egyenlet általános megoldása ($u = \frac{y}{x}$ helyettesítéssel) $y = x \ln(|x|) + C|x|$, melyet az $y(1) = 1$ kezdetiérték-feltételhez igazítva $C = 1$, így a Cauchy-feladat megoldása $y = x \ln(|x|) + |x|$.

2.9. eredménye: Szintén az előbbi helyettesítéssel $y = x \ln(C + \ln(|x|))$.

2.10. megoldása: Az egyenletet átírva és $u = \frac{y}{x}$ -et majd $z = \ln(u)$ -t helyettesítve ($x, y > 0$)

$$\begin{aligned} xy' &= y \ln\left(\frac{y}{x}\right) \\ y' &= u \ln(u) \\ u'x + u &= u \ln(u) \\ \int \frac{du}{u \ln(u) - u} &= \int \frac{dx}{x} \\ \int \frac{dz}{z - 1} &= \int \frac{dx}{x} \\ \ln(|z - 1|) &= \ln(x) + C \\ |z - 1| &= e^C x . \end{aligned}$$

Ha $z > 1$ azaz $y > e \cdot x$, akkor

$$y = ux = e^z x = e^{e^C x + 1} x \quad ,$$

míg $y < e \cdot x$ esetén

$$y = ux = e^z x = e^{-e^C x + 1} x \quad .$$

Ezek a megoldások előbb felírt feltételeiket magukban foglalják. Vizsgálatinkból kimaradt az $u = e$ azaz $y = e \cdot x$ eset (a negyedik sorban osztottunk olyan taggal, amely nullát ad ebben az esetben), mely szintén megoldása az egyenletnek.