Feladatok a harmadik hétre

1. Oldjuk meg az alábbi (a)-(d) pontokban adott kezdeti érték problémákat és minden esetben számítsuk ki a $\lim_{t\to\infty} y(t) =?$ határértéket.

   (a) $y'' + 5y' + 6y = 0, \qquad y(0) = 2, y'(0) = 3$

   (b) $y'' + y' - 2y = 0, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 1,$

   (c) $y'' + 4y' + 3y = 0, \qquad y(0) = 2, y'(0) = -1,$

   (d) $y'' + 8y' - 9y = 0, \qquad y(1) = 1, y'(1) = 0.$

2. Tekintsük a következő kezdeti érték problémát:

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \qquad y(0) = 2, y'(0) = \beta,$$

   ahol $\beta > 0$.

   (a) Oldjuk meg a kezdeti érték problémát!

   (b) A β függvényében határozzuk meg a megoldás maximum pontjának (t_m, y_m) koordinátáit.

   (c) Határozzuk meg a β legkisebb értékét, melyre: $y_m \geq 4$.

   (d) Határozzuk meg a t_m és az y_m viselkedését amint $\beta \to \infty$.

3. A következő (a)–(d) feladatokban az Euler formula használatával írjuk fel az adott komplex kitevős hatványok értékét $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ alakban.

   (a) e^{-3+6i}

   (b) e^{1+2i}

   (c) $e^{i\pi}$

   (d) 2^{1-i}

4. A következő (a)–(d) feladatokban határozzuk meg a kezdeti érték feladat megoldását!

   (a) $16y'' - 8y' + 145y = 0, \qquad y(0) = -2, y'(0) = 1$

   (b) $y'' + 4y = 0, \qquad y(0) = 1, y'(0) = 1,$

(c) $y'' - 2y' + 5y = 0, \qquad y(\pi/2) = 0, y'(\pi/2) = 2,$

(d) $y'' + 2y' + 2y = 0, \qquad y(\pi/4) = 2, y'(\pi/4) = -2.$

5. A következő (a)–(d) feladatokban határozzuk meg a kezdeti érték feladat megoldását!

   (a) $y'' - y' + 0.25y = 0, \qquad y(0) = 2, y'(0) = \frac{1}{3}$

   (b) $9y'' - 12y' + 4y = 0, \qquad y(0) = 2, y'(0) = -1$

   (c) $9y'' + 6y' + 82y = 0, \qquad y(0) = -1, y'(0) = 2$

   (d) $y'' + 4y' + 4y = 0, \qquad y(-1) = 2, y'(-1) = 1$

6. Tekintsük a következő kezdeti érték problémát:

$$4y'' + 12y' + 9y = 0, \qquad y(0) = 1, y'(0) = -4.$$

   (a) Oldjuk meg a kezdeti érték problémát és vázoljuk a megoldást a $0 \leq t \leq 5$ intervallumon!

   (b) Határozzuk meg a megoldás zérus helyeit!

   (c) Határozzuk meg a minimum (t_0, y_0) koordinátáit!

   (d) Változtassuk meg a második kezdeti értéket $y'(0) = b$-re és határozzuk meg a megoldást mint b függvényét. Ezek után találjuk meg a b-nek azt a kritikus értékét, amely elválasztja azon megoldásokat, amelyek mindig pozitívak azoktól, melyek végül is negatívak lesznek.

Eredmények az összes feladatra és teljesen kidolgozott megoldások az 1.(a), 3.(a), 4.(a)és az 5.(a) feledatokra

1. (a) A karakterisztikus egyenlet:

$$r^2 + 5r + 6 = 0.$$

Megoldásai: $r_1 = -2, r_2 = -3$. Tehát az általános megoldás:

$$y = c_1 \mathrm{e}^{-2t} + c_2 \mathrm{e}^{-3t}. \tag{1}$$

Az általános megoldás deriváltja:

$$y' = -2c_1 \mathrm{e}^{-2t} - 3c_2 \mathrm{e}^{-3t}. \tag{2}$$

Behelyettesítjük a kezdeti feltételeket (1)-be és (2)-be:

$$\begin{aligned} 2 = y(0) &= c_1 + c_2 \\ 3 = y'(0) &= -2c_1 - 3c_2 \end{aligned}$$

Ezt megoldva:

$$c_1 = 9, \quad c_2 = -7$$

Ezeket vissza helyettesítjük (1)-be és kapjuk a kezdeti érték feladat megoldását:

$$y = 9\mathrm{e}^{-2t} - 7\mathrm{e}^{-3t}.$$

1. (b) $y = \mathrm{e}^t$, $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \infty$,

1. (c) $y = \frac{5}{2}\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}$, $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$.

1. (d) $y = \frac{1}{10}\mathrm{e}^{-9(t-1)} + \frac{9}{10}\mathrm{e}^{t-1}$, $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \infty$.

2. (a) $y = (6+\beta)\mathrm{e}^{-2t} - (4+\beta)\mathrm{e}^{-3t}$,

2. (b) $t_m = \ln\left[(12+3\beta)\,/\,(12+2\beta)\right]$, $y_m \frac{4}{27}(6+\beta)^3/(4+\beta)^2$,

2. (c) $\beta = 6(1+\sqrt{3})$,

2. (d) $t_m \to \ln(3/2)$.

3. (a) $\mathrm{e}^{-3+6i} = \mathrm{e}^{-3}\mathrm{e}^{-6i} = \mathrm{e}^{-3}\left(\cos 6 + i\sin 6\right) \cong 0.0478 - 0.0139 \cdot i$.

3. (b) $\mathrm{e}\cos 2 + i\mathrm{e}\sin 2$,

3. (c) -1,

3. (d) $2\cos(\ln 2) - 2i\sin(\ln 2)$.

4. (a) A karakterisztikus egyenlet:

$$16r^2 - 8r + 145 = 0.$$

Ennek gyökei: $r_1 = 1/4 + 3i, r_2 = 1/4 - 3i$. Tehát az általános megoldás:

$$y = c_1\mathrm{e}^{t/4}\cos(3t) + c_2\mathrm{e}^{t/4}\sin(3t). \tag{3}$$

Az általános megoldás deriváltja::

$$y' = 1/4\, c_1\, e^{1/4\,t}\cos(3\,t) - 3\, c_1\, e^{1/4\,t}\sin(3\,t) + 1/4\, c_2\, e^{1/4\,t}\sin(3\,t) + 3\, c_2\, e^{1/4\,t}\cos(3\,t) \tag{4}$$

Helyettesítsük a kezdeti feltételeket a (3) és a (4) egyenletekbe:

$$\begin{aligned} -2 = y(0) &= c_1 \\ 1 = y'(0) &= \frac{1}{4}c_1 + 3c_2. \end{aligned}$$

Így kapjuk, hogy $c_1 = -2$ és $c_2 = 1/2$. Ezt helyettesítve (a (3)-ba kapjuk a kezdeti érték feladat megoldását:

$$y = -2e^{t/4}\cos(3t) + \frac{1}{2}e^{t/4}\sin(3t).$$

4. (b) $y = \frac{1}{2}\sin(2t)$
4. (c) $y = -e^{t-\pi/2}\sin(2t)$
4. (d) $y = \sqrt{2}e^{-(t-\pi/4)}\cos t + \sqrt{2}e^{-(t-\pi/4)}\sin t$
5. (a) A karakterisztikus egyenlet:

$$r^2 - r + 0.25 = 0.$$

Ennek gyökei: $r_1 = r_2 = 1/2$. Tehát az általános megoldás:

$$y = c_1e^{t/2} + c_2 \cdot t \cdot e^{t/2}. \tag{5}$$

Az általános megoldás deriváltja:

$$y' = 1/2 \cdot \; c_1\, e^{1/2\,t} + c_2\, e^{1/2\,t} + 1/2 \cdot \; c_2\, te^{1/2\,t}. \tag{6}$$

Helyettesítsük a kezdeti érték feltételeket az (5) és a (6) egyenletekbe. Kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2 = y(0) &= c_1 \\ \frac{1}{3} = y'(0) &= \frac{1}{2}c_1 + c_2 \end{aligned}$$

Innen $c_1 = 2$ és $c_2 = -\frac{2}{3}$. Helyettesítsük ezt az (5) egyenletbe, hogy megkapjuk a kezdeti érték probléma megoldását:

$$y = 2e^{t/2} - \frac{2}{3} \cdot t \cdot e^{t/2}.$$

5. (b) $y = 2e^{2t/3} - \frac{7}{3}te^{2t/3}$,
5. (c) $y = -e^{-t/3}\cos(3t) + \frac{5}{9}e^{-t/3}\sin(3t)$,
5. (d) $y = 7e^{-2(t+1)} + 5te^{-2(t+1)}$.
6. (a) $e^{-3t/2} - \frac{5}{2}te^{-3t/2}$,
6. (b) $t = 2/5$,
6. (c) $t_0 = 16/15$, $y_0 = -\frac{5}{3}e^{-8/5}$
6. (d) $y = e^{-3t/2} + \left(b + \frac{3}{2}\right)te^{-3t/2}$, $b = -\frac{3}{2}$.