Feladatok a második hétre

1. Határozzuk meg a következő elsőrendű lineáris differenciálegyenletek általános megoldását!

   (a)
$$y' - y = \mathrm{e}^{-x}.$$

   (b)
$$y' - \frac{y}{x} = x^2 + 3x - 2.$$

2. Tekintsük az
$$y' - 2y = 3e^t$$
differenciálegyenletet.

   (a) Határozzuk meg az iránymezőt!

   (b) Az iránymező vizsgálata után adjuk meg, hogyan viselkednek a megoldások nagy t esetén!

   (c) Határozzuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását és vizsgáljuk meg, hogy ez hogyan viselkedik, ha $t \to \infty$!

3. Határozzuk meg a következő kezdeti érték problémák megoldásait!

   (a)
$$y' - y = 2te^{2t}, \quad y(0) = 1$$

   (b)
$$ty' + 2y = t^2 - t + 1, \quad y(1) = 1/2, \quad t > 0$$

   (c)
$$ty' + (t+1)\,y = t, \quad y(\ln 2) = 1, \quad t > 0$$

4. A feladat (a), (b) és (c) pontjaiban $dy/dt = f(y)$ alakú differenciálegyenletet tekintünk. Mindegyik esetben először rajzolja le a $y \to f(y)$ függvény grafikonját, határozza meg a kritikus (egyensúlyi) pontokat, és osztályozza mindegyiket mint asszimptotikusan stabil Lyapunov stabil vagy instabil. Rajzolja le a fázis vonalakat és rajzolja le néhány megoldás görbéjét (közelítőleg) a t, y síkon.

(a)
$$dy/dt = y(y-1)(y-2), \quad y(0) = y_0 \geq 0$$

(b)
$$dy/dt = \mathrm{e}^y - 1, \quad y_0 \in \mathbb{R}$$

(c)
$$dy/dt = -2(\operatorname{arctg} y)/(1+y^2), \quad y_0 \in \mathbb{R}$$

A következő tételt tanultuk az előadáson:

1. TÉTEL: Tegyük fel, hogy mind az f mind a $\partial f/\partial y$ folytonos függvények egy olyan $\alpha < t < \beta, \gamma < y < \delta$ téglalapon, amely tartalmazza a (t_0, y_0) pontot. Akkor van olyan $(t_0 - h, t_0 + h) \subset (\alpha, \beta)$ intervallum, amelyben a következő kezdeti érték probléma megoldása létezik és egyértelmű:

$$y' = f(t,y), \qquad y(t_0) = y_0. \tag{1}$$

5. A következő három problémában határozzuk meg a ty síknak azon részeit, ahol a tétel feltételei teljesülnek.

   (a) $y' = \frac{t-y}{2t+5y}$

   (b) $y' = \frac{\ln|ty|}{1-t^2+y^2}$

   (c) $y' = (t^2+y^2)^{3/2}$

   Daniel Bernoulli 1760-ban már használt matematikai módszereket a himlő terjedésének vizsgálatára. A következő két feladatban egyszerű modelleket látunk erre a problémára. Hasonló modelleket használnak a rémhírek terjedésének modellezésére és bizonyos árú cikkek terjedésének vizsgálatára.

6. Tegyük fel, hogy valamely populáció két részre osztható: azokra akik megkaptak egy bizonyos betegséget és képesek megfertőzni másokat, és azokra akik a betegséget még nem kapták meg de hajlamosak arra, hogy a betegséget megkapják. Az utóbbiaknak a teljes populációhoz viszonyított arányát nevezzük x-nek és az előbbinek a teljes populációhoz viszonyított arányát y-nak. Tehát $x + y = 1$. Tegyük fel, hogy a betegség azáltal terjed, hogy egészséges és beteg egyének találkoznak és a betegség terjedésének dy/dt sebessége arányos ezen találkozások

számával. Tegyük fel, hogy az egészséges és beteg emberek szabadon mozognak egymás között, tehát az egymással való találkozásaik száma arányos $x \cdot y$-al. Mivel $x = 1 - y$ kapjuk, hogy

$$dy/dt = \alpha y(1-y), \quad y(0) = y_0,$$

ahol $\alpha > 0$ arányossági tényező és y_0 a beteg egyének aránya a teljes populációban kezdetben.

(a) határozzuk meg az egyensúlyi állapotokat és osztályozzuk őket aszerint, hogy asszimptotikusan stabil vagy instabilak-e.

(b) Oldjuk meg a fenti kezdeti érték problémát és ezáltal igazoljuk, hogy az előző pontban levont következtetésünk helyes volt. Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 1$$

vagyis a betegség az egész populációt megfertőzi.

7. Bizonyos betegségek (pl. tífusz) többnyire *hordozók* által terjednek, vagyis olyan személyek által, akik terjesztik a betegséget de a betegség szimptómái nem látszanak rajtuk. Jelentse x azon egyének arányát az egész populációhoz viszonyítva akik megkaphatják a betegséget (de most még teljesen egészségesek) és legyen y a hordozók aránya az egész populációhoz. Tegyük fel, hogy a hordozókat felfedezik és eltávolítják a populációból β sebességgel. Vagyis

$$dy/dt = -\beta \cdot y. \tag{2}$$

(Időegység alatt az akkor éppen létező hordozók β-ad részét eltávolítják) Tegyük fel, hogy a betegség terjedése arányos $x \cdot y$-al (vagyis a hordozók és a megfertőzhető emberek szabadon találkoznak egymással). A

$$dx/dt = -\alpha xy. \tag{3}$$

(a) Az (3) egyenletet megoldva határozzuk meg y-t mint a t függvényét feltéve, hogy kezdetben $y(0) = y_0$.

(b) Az előző pont eredményét használva oldjuk meg a (3) egyenletet feltéve, hogy $x(0) = x_0$.

(c) Határozzuk meg a populáció azon egyéneinek az arányát akik sohasem kapják meg a betegséget azáltal, hogy kiszámoljuk a

$$\lim_{t\to\infty} x(t)$$

határértékét.

Eredmények és megoldások

Ezek az egyenletek

$$y' + p(x)\,y = q(x) \tag{4}$$

alakú egyenletek, melyeknek megoldását a következőképpen kapjuk:

$$y_{i,ált} = Y_{h,ált} + y_{i,p} \tag{5}$$

vagyis a (4) inhomogén egyenlet általános megoldása $y_{i,ált}$ egyenlő az

$$Y' + p(x)Y = 0 \tag{6}$$

homogén egyenlet általános megoldása $Y_{h,ált}$ plusz a (4) inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása $y_{i,p}$.

1. (a) Itt $p(x) \equiv -1$; $q(x) = \mathrm{e}^{-x}$. A megoldás két lépésből áll:

1. lépés: A homogén rész az $Y' - Y = 0$ diff.egyenlet szétválasztható változójú és megoldása: $Y_{h,alt} = C \cdot \mathrm{e}^{x}$.

2.lépés: Most keressük az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását, $y_{i,p}$-t. Ehhez meg szeretnénk határozni **egy** olyan $C(x)$ függvényt, amelyre

$$y = C(x) \cdot \mathrm{e}^{x}$$

megoldása az $y' - y = \mathrm{e}^{-x}$ egyenletnek. Vissza helyettesítés után kapjuk, hogy $C(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$ egy ilyen függvény, tehát

$$y_{i,p} = C(x) \cdot \mathrm{e}^{x} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}.$$

Vagyis

$$y_{i,ált} = Y_{h,ált} + y_{i,p} = \underbrace{c \cdot \mathrm{e}^{x}}_{Y_{h,ált}} + \left(\underbrace{-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}}_{y_{i,p}} \right).$$

(b) Itt $p(x) = -\frac{1}{x}$; $q(x) = x^2 + 3x - 2$. A megoldás két lépésből áll:

1. lépés: A homogén rész az $Y' - \frac{Y}{x} = 0$ diff.egyenlet, amely szétválasztható változójú és megoldása: $Y_{h,ált} = C \cdot x$.

2.lépés: Most keressük az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását, $y_{i,p}$-t. Ehhez szeretnénk határozni **egy** olyan $C(x)$ függvényt, amelyre

$$y = x \cdot C(x)$$

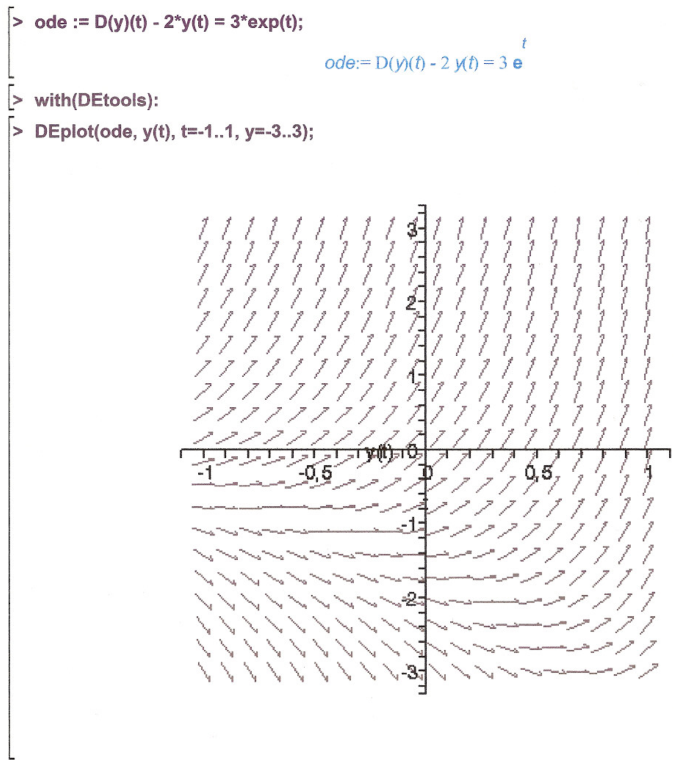
megoldása az $y' - \frac{y}{x} = x^2 + 3x - 2$ egyenletnek. Mivel $y' = C(x) + xC'(x)$, ezt behelyettesítve az $y' - \frac{y}{x} = x^2 + 3x - 2$ egyenletbe kapjuk, hogy

$$C(x) + xC'(x) - C(x) = x^2 + 3x - 2.$$

Innen: $C(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln|x|$ (itt nem kell feltüntetni az integrálból adódó konstanst, mert csak **egy** partikuláris megoldást keresünk). Tehát $y_{i,p} = x \cdot C(x) = \frac{x^3}{2} + 3x^2 - 2x\ln|x|$. Így

$$y_{i,ált} = Y_{h,ált} + y_{i,p} = \underbrace{c \cdot x}_{Y_{h,ált}} + \underbrace{\frac{x^3}{2} + 3x^2 - 2x\ln|x|}_{y_{i,p}}.$$

2. (a)



1. ábra. Megoldás a MAPLE használatával

(b) $\lim_{t\to\infty} y(t) = \infty$.

(c) $y(t) = -3\mathrm{e}^t + C \cdot \mathrm{e}^{2t}$.

3. (a)

$$y(t) = \left(2t\mathrm{e}^t - 2\mathrm{e}^t + 3\right)\mathrm{e}^t$$

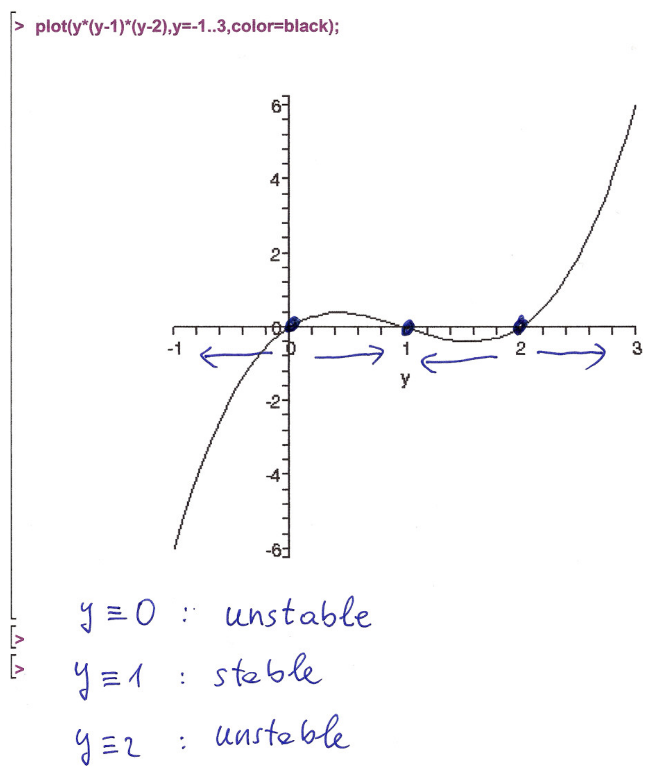
(b)

$$y(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{2} + \frac{1}{12t^2}$$

(c)

$$y(t) = 1 - \frac{1}{t} + 2\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$$

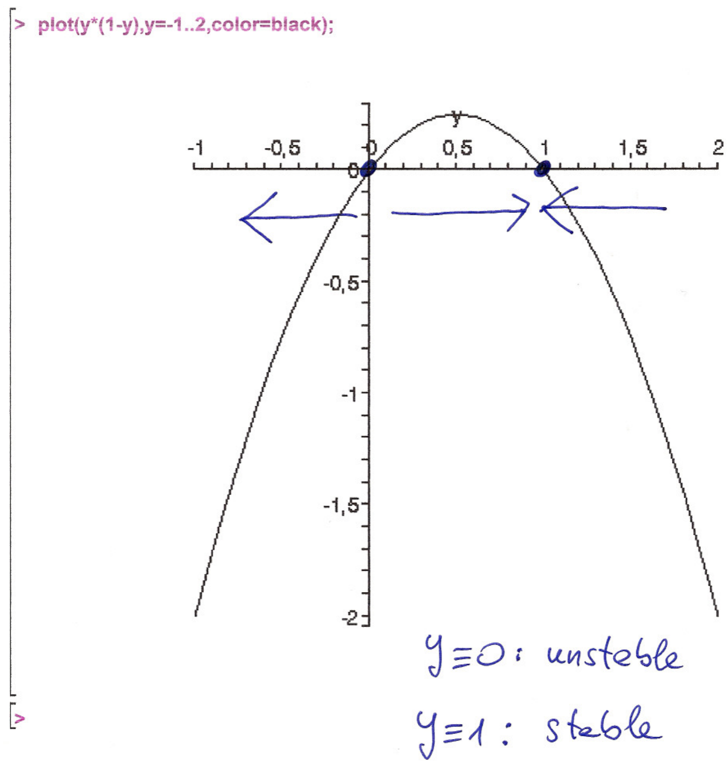
4. (a)



2. ábra. Ha $f(y) > 0$ akkor $y(t)$ növekvő, ha $f(y) < 0$ akkor $y(t)$ csökkenő

(b) $y \equiv 0$: instabil
(c) $y \equiv 0$: asszimptotikusan stabil

5. (a) $2t + 5y > 0$ or $2t + 5y > 0$.
(b) $1 - t^2 - y^2 > 0$ or $1 - t^2 - y^2 < 0$
(c) Mindenütt teljesülnek a feltételek.
6. (a)



3. ábra. Ha $f(y) > 0$ akkor $y(t)$ növekvő, ha $f(y) < 0$ akkor $y(t)$ csökkenő

(b) $y = y_0 / \left[y_0 + (1 - y_0)\mathrm{e}^{-\alpha t}\right]$

7. (a) $y = y_0 \mathrm{e}^{-\beta t}$
(b) $x = x_0 \exp\left[-\alpha y_0 (1 - \mathrm{e}^{-\beta t})/\beta\right]$
(c) $x_0 \exp\left[-\alpha y_0/\beta\right]$