Feladatok és megoldások a 10. hétre
Építőkari Matematika A3

1. Egy gyárban az I. gépsor az idő 60%-ában, a II. gépsor az idő 70%-ában dolgozik egymástól függetlenül. Mi a valószínűsége, hogy
   (a) mindkét gép dolgozik,
   (b) legalább az egyik gép dolgozik,
   (c) csak az egyik gép dolgozik,
   (d) mindkét gép áll?

2. Tegyük fel, hogy egy családban minden gyermek 50% eséllyel lesz fiú vagy lány, függetlenül a többi gyermektől. Egy 5 gyermekes családban számoljuk ki a következő valószínűségeket:
   (a) Minden gyermek egyforma nemű.
   (b) A három idősebb gyermek fiú, a két fiatalabb gyermek lány.
   (c) Pontosan három fiú van a családban.
   (d) A két legidősebb gyermek lány.
   (e) Legalább egy lány van.

3. Egy piros és egy zöld kockával dobunk. Tekintsük az alábbi eseményeket: $A =$ {a dobott számok összege 7}, $B =$ {legalább az egyik kockán van hatos}, $C =$ {mindkét kockával páratlant dobok}, $D =$ {a két kockával különböző számokat dobok}, $E =$ {a zöld kockával 4-est dobok}.
   (a) Függetlenek-e egymástól az A és C események?
   (b) Kizáróak-e az A és C események?
   (c) Mennyi a B esemény valószínűsége?
   (d) Hogyan viszonyul egymáshoz A és D? Milyen következtetést vonhatunk le ebből a valószínűségeikre nézve? És függetlenségükre nézve?
   (e) Függetlenek-e egymástól az A és E események?
   (f) Mindezek alapján mutassunk példát olyan eseményekre, amelyek
      i. függetlenek, de nem kizáróak,
      ii. kizáróak, de nem függetlenek.

4. Egy piros és egy zöld kockával dobunk. Tekintsük az alábbi eseményeket: $A =$ {a dobott számok összege 7}, $B =$ {a piros kockával 3-ast dobok}, $C =$ {a zöld kockával 4-est dobok}.
   (a) Függetlenek-e az A és B események? Az A és C események? Hát a B és C események?
   (b) Függetlenek-e az A, B, C események?
   (c) Függetlenek-e az A és a $B \cap C$ események?
   (d) Tehát: függetlenek-e az A, B, C események?

5*. Egy szabályos érmedobás kimenetelét szeretnénk szimulálni, de sajnos csak egy meglehetősen gyanús kinézetű cinkelt érme áll rendelkezésünkre. Az érme feldobáskor p valószínűséggel mutat fejet, és bár p értékét nem ismerjük, minden okunk megvan feltételezni, hogy $p \neq 1/2$. Hogy mégis szabályos érmedobást szimuláljunk, a következő algoritmus szerint járunk el:

(1) Feldobjuk az érmét.

(2) Megint feldobjuk az érmét.

(3) Ha mindkét dobás fej, illetve ha mindkét dobás írás, akkor visszatérünk az (1) lépéshez.

(4) Ha a két dobás különböző, akkor a másodikat tekintjük az algoritmusunk kimenetelének.

(a) Mutassuk meg, hogy az algoritmus egyenlő valószínűséggel fog fej és írás eredményt adni.

(b) Lehetne-e egyszerűsíteni az algoritmust a következőképpen: egymás után addig dobáljuk az érmét, amíg két egymást követő dobás különböző lesz, és az utolsó dobást adjuk meg kimenetelként?

6. Egy cinkelt érme p valószínűséggel mutat fejet feldobáskor. Az érmét egymás után sokszor feldobjuk. Mi a valószínűsége, hogy az első négy dobás eredménye

   (a) F, F, F, F,

   (b) $Í$, F, F, F?

   (c*) Mi a valószínűsége, hogy az ($Í$, F, F, F) sorozatot előbb fogjuk látni, mint a (F, F, F, F) sorozatot? (Tipp: Hogyan történhet meg az, hogy az (F, F, F, F) sorozatot látjuk előbb?)

7. Egy vetélkedőn egy házaspár alkot egy csapatot. Amikor a műsorvezetőtől egy eldöntendő kérdést kapnak, a férj és a feleség is egymástól függetlenül p valószínűséggel mondaná a helyes választ. Az alábbiak közül melyik a jobb stratégia?

   (a) Egyiküket kijelölik, aki a másikra nem hallgatva válaszol a kérdésre, vagy

   (b) mindketten gondolkodnak a kérdésen, és ha egyetértenek válaszolnak, ha pedig különböző a véleményük akkor feldobnak egy szabályos pénzt, hogy eldöntsék melyikük véleményét fogják válaszolni?

8. Az A, B, és C városok között a következő utak épültek: $A - B$, $A - C$, $B - C$. Egy téli éjszakán mindhárom utat egymástól függetlenül p valószínűséggel eltorlaszolja a hó. Mi a valószínűsége, hogy másnap reggel valamilyen úton el lehet jutni A-ból C-be?

9. Az A, B, és C városok között a következő utak épültek: $A - B$, $A - B$ egy másik nyomvonalon is, $B - C$. Egy téli éjszakán mindhárom utat egymástól függetlenül q valószínűséggel eltorlaszolja a hó. Mi a valószínűsége, hogy másnap reggel valamilyen úton el lehet jutni A-ból C-be?

10. Egy versenyen öt női és öt férfi versenyző indul. Tegyük fel, hogy nincs két azonos eredmény, és mind a 10! sorrend egyformán valószínű. Legyen X a legjobb női versenyző helyezése. (Például ha $X = 1$, akkor nő lett a verseny győztese.) Határozzuk meg X súlyfüggvényét, azaz a $\mathbb{P}\{X = i\}$ valószínűségeket, $i = 1, 2, \ldots, 10$.

11. Az X valószínűségi változó súlyfüggvénye $p(i) = \frac{i^2}{30}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Határozzuk meg X várható értékét.

12. Albert és Béla a következőt játszák: Mindketten feldobnak egy dobókockát, majd Albert annyi forintot kap Bélától amennyi a két kockán levő pontok különbségének a négyzete. Béla meg annyit kap Alberttől, amennyi a két kockán levő pontok összege. Melyiküknek kedvez a játék?

13. Egy sorsjátékon 1 darab 1 000 000 Ft-os, 10 darab 50 000 Ft-os, és 100 darab 5 000 Ft-os nyeremény van. A játékhoz 40 000 darab sorsjegyet adnak ki. Mennyi legyen a jegy ára, hogy egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke a jegy árának felével egyezzen meg?

14. Tételezzük fel a 700 Ft, 10 000 Ft, 789 ezer Ft, és 535 millió Ft fix nyereményeket a lottón. 150 Ft-os jegyárral számolva mekkora az egy lottószelvényen várható nyereségünk?

15. Anna és Béla két kockával játszanak. Anna akkor fizet Bélának, ha mindkét feldobott kockán páratlan szám szerepel. Béla akkor fizet Annának, ha pontosan egy kockával páros számot dobnak. Ha más eset fordul elő, egyikük sem fizet. Milyen pénzösszegben állapodjanak meg, hogy a játék méltányos legyen?

16. Legyen X egy dobókockával dobott szám. Mennyi X várható értéke és szórása? Mi a helyzet n oldalú "kocka" esetén?

17. Egy iskolakirándulás során négy busz szállítja adiákokat. A négy buszban 40, 33, 25, illetve 50 diák utazik. Vétlenszerűen kiválasztunk egy diákot, legyen X az ő buszában utazó összes tanuló száma. A négy buszsofőr közül szintén egyet véletlenszerűen kiválasztunk, legyen Y az ő buszán utazó tanulók száma.

    (a) Mit gondolunk, $\mathbb{E}(X)$ vagy $\mathbb{E}(Y)$ lesz nagyobb? Miért?

    (b) Számoljuk ki $\mathbb{E}(X)$ és $\mathbb{E}(Y)$ értékét.

    (c) Számoljuk ki X és Y szórását.

18. Egy dobozból, amiben 4 piros és 6 fehér golyó van, visszatevés nélkül kihúzok 3 golyót. Jelölje X a kihúzott piros golyók számát. Határozzuk meg X eloszlását, várható értékét, és szórását.

19. Véletlenszerűen elhelyezünk egy huszárt egy üres sakktáblára. Mennyi a lehetséges lépései számának a várható értéke? (A 8×8-as sakktábla (i, j) négyzetén álló huszár egy lépésben az $(i+1, j+2)$, $(i-1, j+2)$, $(i-2, j+1)$, $(i-2, j-1)$, $(i-1, j-2)$, $(i+1, j-2)$, $(i+2, j-1)$, $(i+2, j+1)$ mezőkre léphet, amennyiben ezek még a sakktáblán találhatóak.)

20. Két kockával dobva, mennyi a dobott számok nagyobbikának illetve kisebbikének várható értéke?

21. Egy 1-től 10-ig véletlenszerűen kiválasztott számot kell kitalálnunk, igen-nem kérdésekkel. Számítsuk ki, hogy várhatóan hány kérdésre van szükségünk a következő esetekben:

    (a) Az i-edik kérdésünk a következő: "A szám i?", $i = 1, 2, \dots, 10$.

    (b) Minden egyes kérdéssel megpróbáljuk kizárni a lehetséges számok felét, amennyire ez csak lehetséges. Például az első kérdésünk "A szám nagyobb, mint 5?". Ha igen, a második kérdésünk "A szám nagyobb, mint 7?", stb.

22. Ha $\mathbb{E}(X) = 1$ és $\mathbb{D}^2(X) = 5$, határozzuk meg a következő mennyiségeket:

    (a) $\mathbb{E}[(2+X)^2]$,

    (b) $\mathbb{D}^2(4+3X)$.

23. Legyen X egy valószínűségi változó μ várható értékkel és σ szórással. Határozzuk meg

$$Y := \frac{X-\mu}{\sigma}$$

várható értékét és szórását.

24. Hány véletlenszerűen kiválasztott emberre van ahhoz szükség, hogy közülük legalább egynek legalább 1/2 valószínűséggel ugyanaznap legyen a születésnapja, mint nekem?

Eredmények

1.(a) $0.6 \cdot 0.7 = 0.42$

(b) $1 - 0.4 \cdot 0.3 = 0.88$

(c) $0.6 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.7 = 0.46$

(d) $0.4 \cdot 0.3 = 0.12$

2.(a) $(1/2)^5 + (1/2)^5 = 1/16$

(b) $1/32$

(c) $\binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 5/16$

(d) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1/4$

(e) $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 31/32$

3.(a) Nem, mert

(b) kizáró események.

(c) $1 - \mathbb{P}\{\text{egyik sem hatos}\} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2$

(d) A-ból következik D, avagy $A \subset D$. Ezért $\mathbb{P}\{A\} \le \mathbb{P}\{D\}$, és pl. $5/6 = \mathbb{P}\{D\} \neq \mathbb{P}\{D \,|\, A\} = 1$ mutatja, hogy A és D nem lehetnek függetlenek.

(e) Az A esemény a 36 lehetséges kimenetelből hat esetben valósul meg, ezért valószínűsége $1/6$. Az E esemény valószínűsége is $1/6$, $A \cap E$ pedig pontosan egy esetben valósul meg, valószínűsége $1/36$. Így $\mathbb{P}\{A\} \cdot \mathbb{P}\{E\} = \mathbb{P}\{A \cap E\}$, a két esemény független.

(f) i. A és E;

ii. A és C.

4.(a) $\mathbb{P}\{A\} = \mathbb{P}\{B\} = \mathbb{P}\{C\} = 1/6$, és $\mathbb{P}\{AB\} = \mathbb{P}\{AC\} = \mathbb{P}\{BC\} = 1/36$, ezért A és B; A és C; B és C páronként függetlenek.

(c) Mivel $B \cap C \subset A$, $B \cap C$ és A nem lehetnek függetlenek.

(b),(d) A, B, C nem függetlenek. Erre utal a (c) eredmény, illetve az, hogy $1/36 = \mathbb{P}\{A \cap B \cap C\} \neq \mathbb{P}\{A\} \cdot \mathbb{P}\{B\} \cdot \mathbb{P}\{C\} = 1/216$.

4*.(a) Az algoritmus átfogalmazható a következőképp: kétszer feldobjuk az érmét. Ha egyezik a két eredmény, akkor a két dobásunk nem számít, újra kezdjük a kísérletet. Ha különböző a két eredmény, akkor tekintjük a második kimenetelt. Ebből a megfogalmazásból látszik, hogy az algoritmusunk kimenetelei egy feltételes eloszlást követnek:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\text{az algoritmus } F\text{-et ad}\} &= \mathbb{P}\{(Í,\, F) \,|\, (Í,\, F) \text{ vagy } (F,\, Í)\} \\ &= \frac{\mathbb{P}\{(Í,\, F)\}}{\mathbb{P}\{(Í,\, F) \text{ vagy } (F,\, Í)\}} = \frac{(1-p)p}{(1-p)p + p(1-p)} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Hasonlóan, az algoritmus $1/2$ valószínűséggel ad írást is.

(b) Bármilyen $0 < p < 1$ esetén előbb-utóbb biztosan lesz fej és írás is a dobások között. A (b) algoritmus ezért F-et ad akkor és csak akkor, ha az első dobás $Í$, ennek valószínűsége $1 - p$. Az algoritmus $Í$-t ad akkor és csak akkor, ha az első dobás F, ennek valószínűsége p. Így a (b) algoritmus nem ad szabályos pénzérmedobás-eredményeket.

A feladatban a nehézséget annak megfogalmazása jelenti, hogy miért nem igaz az (a)-ban adott érvelésünk a (b) algoritmus esetén. Az (a) algoritmus fenti átfogalmazásában *teljesen rögzített* két érmedobást (az első kettőt) tekintünk, míg a (b) algoritmusban *véletlen sorszámú* két dobásról van szó, arról a kettőről, melyekben először látunk változást a fej-írás sorozatban. Ez az ártalmatlannak tűnő különbség lényegesen eltorzítja a $(F,\, Í)$ illetve az $(Í,\, F)$ kimenetelek valószínűségét, így (a)-beli érvelésünk a (b) esetben így nézne ki:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\text{az algoritmus } F\text{-et ad}\} &= \mathbb{P}\{(Í,\, F) \,|\, (Í,\, F) \text{ vagy } (F,\, Í)\}\\ &= \frac{\mathbb{P}\{(Í,\, F)\}}{\mathbb{P}\{(Í,\, F) \text{ vagy } (F,\, Í)\}} = \frac{(1-p)}{(1-p)+p} = 1-p,\end{aligned}$$

és hasonlóan az algoritmus $Í$ kimenetelének valószínűsége p.

6(a) p^4

(b) $(1 - p) \cdot p^3$

(c*) Az első megállapításunk, hogy $0 < p < 1$ esetén előbb-utóbb biztosan latni fogjuk az $(F,\, F,\, F,\, F)$ sorozatot. Tegyük fel, hogy az első ilyen sorozat az n-edik dobással kezdődik. Ha $n > 1$, akkor az $n - 1$-edik dobás nem lehet F, mert akkor az első $(F,\, F,\, F,\, F)$ sorozat már az n-edik dobás előtt elkezdődött volna. Ezért ilyenkor az $n-1$-dik dobás mindenképpen $Í$, és így az $n - 1$-edik dobással kezdődően az $(Í,\, F,\, F,\, F,\, F)$ sorozatot látjuk. Ebben pedig az $(Í,\, F,\, F,\, F)$ sorozat előbb jelenik meg, mint az $(F,\, F,\, F,\, F)$ sorozat. Azaz az $(F,\, F,\, F,\, F)$ sorozat csak akkor jöhet az $(Í,\, F,\, F,\, F)$ sorozat előtt, ha mindjárt az $n = 1$ helyen elkezdődik, vagyis ha az első négy dobás mindegyike fej. Ennek esélye p^4.

7. Az (a) esetben a helyes választ p valószínűséggel adja a csapat. A (b) esetben legyen E az az esemény, hogy a csapat a helyes eredményt adja, J illetve R, hogy a feleség vagy a férj a jó illetve rossz választ adná (azaz pl. $(J,\, J)$ az az esemény, hogy mindketten a helyes választ tudnák). Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{E\} &= \mathbb{P}\{E \,|\, (J,\, J)\} \cdot \mathbb{P}\{(J,\, J)\} + \mathbb{P}\{E \,|\, (J,\, R)\} \cdot \mathbb{P}\{(J,\, R)\}\\ &\quad + \mathbb{P}\{E \,|\, (R,\, J)\} \cdot \mathbb{P}\{(R,\, J)\} + \mathbb{P}\{E \,|\, (R,\, R)\} \cdot \mathbb{P}\{(R,\, R)\}\\ &= 1 \cdot p^2 + \frac{1}{2} \cdot p(1-p) + \frac{1}{2} \cdot (1-p)p + 0 \cdot (1-p)^2 = p.\end{aligned}$$

A két stratégia között tehát nincs különbség. A (b)-hez hasonló stratégiák nagyobb csapatok (és $p > 1/2$) esetén segítenek.

8. Jelöljük a keresett eseményt $A \leftrightsquigarrow C$-vel, és az A és B közötti út átjárhatóságát $A \leftrightarrow B$-vel. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{A \leftrightsquigarrow C\} &= \mathbb{P}\{A \leftrightsquigarrow C \,|\, A \leftrightarrow C\} \cdot (1-p) + \mathbb{P}\{A \leftrightsquigarrow C \,|\, A \not\leftrightarrow C\} \cdot p\\ &= 1 \cdot (1-p) + \mathbb{P}\{A \leftrightarrow B,\ B \leftrightarrow C\} \cdot p = 1 - p + (1-p)^2 \cdot p.\end{aligned}$$

9. Az előző feladat jelöléseivel az $A \leftrightsquigarrow B$ és $B \leftrightsquigarrow C$ események függetlenek. Ezért

$$\mathbb{P}\{A \leftrightsquigarrow C\} = \mathbb{P}\{A \leftrightsquigarrow B\} \cdot \mathbb{P}\{B \leftrightsquigarrow C\} = [1 - q^2] \cdot (1 - q).$$

10. Nyilván nulla a valószínűség, ha $i > 6$.
<u>Sorrend nélkül:</u> Ha a csak a versenyzők nemét nézzük, akkor mind a $\binom{10}{5}$ lehetséges elrendezés egyforma valószínű. Ezek közül meg kell számolnunk, hány elrendezés esetén lesz férfi az első $i-1$ helyen, azután pedig egy nő. Másszóval meg kell számolnunk hányféleképpen rendezhető el 4 nő és $5-(i-1) = 6-i$ férfi az első nő mögötti $10-i$ helyre. A válasz $\binom{10-i}{4}$, és a keresett valószínűség

$$\frac{\binom{10-i}{4}}{\binom{10}{5}} = \frac{(10-i)! \cdot 5! \cdot 5!}{10! \cdot 4! \cdot (6-i)!} = \frac{(10-i)! \cdot 5 \cdot 5!}{10! \cdot (6-i)!}.$$

<u>Sorrenddel:</u> Ebben az esetben minden versenyzőt különbözőnek tekintünk. Meg kell számonunk, hogy a 10! lehetőségből hány olyan sorrend van, ahol az első $i-1$ helyen férfi van, az i-dik helyen pedig nő. Az első $i-1$ helyre $5!/[5-(i-1)]! = 5!/(6-i)!$ féleképp válogathatunk sorrendben férfiakat (ismétlés nélküli variáció). Ezután jön 5 lehetőség az i-dik hely női versenyzőjének kiválasztására, majd a maradék $10-i$ helyre $(10-i)!$ féleképpen rendezhetjük el a versenyzőket. A keresett valószínűség tehát

$$\frac{5! \cdot 5 \cdot (10-i)!}{(6-i)! \cdot 10!}.$$

A válasz tehát $i = 1, 2, 3, 4, 5$ és 6 esetén $1/2,\ 5/18,\ 5/36,\ 5/84,\ 5/252,\ 1/252$.

11.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{4} i \cdot p(i) = \sum_{i=1}^{4} \frac{i^3}{30} = \frac{1^3}{30} + \frac{2^3}{30} + \frac{3^3}{30} + \frac{4^3}{30} = \frac{10}{3}.$$

12. Legyen X a két kockán levő pontok különbségének négyzete. Ekkor X súlyfüggvénye $p(0) = 1/6,\ p(1) = 10/36,\ p(4) = 8/36,\ p(9) = 6/36,\ p(16) = 4/36,\ p(25) = 2/36$, várható értéke

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 4 \cdot \frac{8}{36} + 9 \cdot \frac{6}{36} + 16 \cdot \frac{4}{36} + 25 \cdot \frac{2}{36} = \frac{210}{36} = \frac{35}{6}.$$

Hasonlóan, Y a két kockán levő pontok összege, súlyfüggvénye $p(2) = p(12) = 1/36,\ p(3) = p(11) = 2/36,\ p(4) = p(10) = 3/36,\ p(5) = p(9) = 4/36,\ p(6) = p(8) = 5/36,\ p(7) = 6/36$, várható értéke 7=42/6. Béla tehát hosszú távon jobban jár.

13. A nyeremény várható értéke

$$\frac{1}{40\,000} \cdot 1\,000\,000\,\text{Ft} + \frac{10}{40\,000} \cdot 50\,000\,\text{Ft} + \frac{100}{40\,000} \cdot 5\,000\,\text{Ft} = 50\,\text{Ft},$$

a jegyet tehát 100 Ft-ért kell árulni.

14. A várható nyeremény

$$\frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{85}{3}}{\binom{90}{5}} \cdot 700 + \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{85}{2}}{\binom{90}{5}} \cdot 10\,000 + \frac{\binom{5}{4} \cdot \binom{85}{1}}{\binom{90}{5}} \cdot 789\,000 + \frac{1}{\binom{90}{5}} \cdot 535\,000\,000 \simeq 43.\underline{^{66}}\,\text{Ft}.$$

Ha a jegyár 150 Ft, akkor várhatóan $106.\underline{^{34}}$ Ft-ot vesztünk szelvényenként.

15 Anna $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1/4$ eséllyel fizet Bélának, Béla pedig $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1/2$ eséllyel fizet Annának. A játék méltányos, ha Anna kétszer annyit fizet, mint Béla, pl. 2 petákot, míg Béla 1 petákot.

16 n oldalú "kocka" esetén X súlyfüggvénye $p(i) = 1/n$, $i = 1, 2, \ldots n$. A számtani sor összegképletével

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot p(i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

A szóráshoz a második momentum is kell, ehhez felhasználjuk a négyzetszámok összegére vonatkozó képletet:

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{n} i^2 \cdot p(i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6}.$$

A szórás ezek segítségével

$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2} = \sqrt{\frac{2n^2 + 3n + 1}{6} - \frac{n^2 + 2n + 1}{4}} = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}}.$$

Kocka eseén $n = 6$, $\mathbb{E}(X) = 7/2$, $\mathbb{D}(X) = \sqrt{35/12}$.

17.(a) Nagyobb eséllyel választunk egy diákot egy tömöttebb buszról, míg a sofőr választásakor minden busz egyenlő valószínű. Ezért X várhatóan nagyobb lesz Y-nál.

(b) X súlyfüggvényét felhasználva

$$\mathbb{E}(X) = 40 \cdot \frac{40}{148} + 33 \cdot \frac{33}{148} + 25 \cdot \frac{25}{148} + 50 \cdot \frac{50}{148} \simeq 39.28.$$

Y egyenlő eséllyel veszi föl bármelyik megadott létszám értékét,

$$\mathbb{E}(Y) = 40 \cdot \frac{1}{4} + 33 \cdot \frac{1}{4} + 25 \cdot \frac{1}{4} + 50 \cdot \frac{1}{4} = 37.$$

(c) A szóráshoz meghatározzuk a második momentumokat:

$$\mathbb{E}(X^2) = 40^2 \cdot \frac{40}{148} + 33^2 \cdot \frac{33}{148} + 25^2 \cdot \frac{25}{148} + 50^2 \cdot \frac{50}{148} \simeq 1625.4,$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = 40^2 \cdot \frac{1}{4} + 33^2 \cdot \frac{1}{4} + 25^2 \cdot \frac{1}{4} + 50^2 \cdot \frac{1}{4} = 1453.5.$$

A szórások

$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)^2]} \simeq \sqrt{1625.4 - 39.28^2} \simeq 9.06,$$
$$\mathbb{D}(Y) = \sqrt{\mathbb{E}(Y^2) - [\mathbb{E}(Y)^2]} \simeq \sqrt{1453.5 - 37^2} \simeq 9.19.$$

18. X súlyfüggvénye:

$$p(0) = \frac{\binom{4}{0} \cdot \binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{6}, \quad p(1) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{2}, \quad p(2) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10}, \quad p(3) = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{6}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{30}.$$

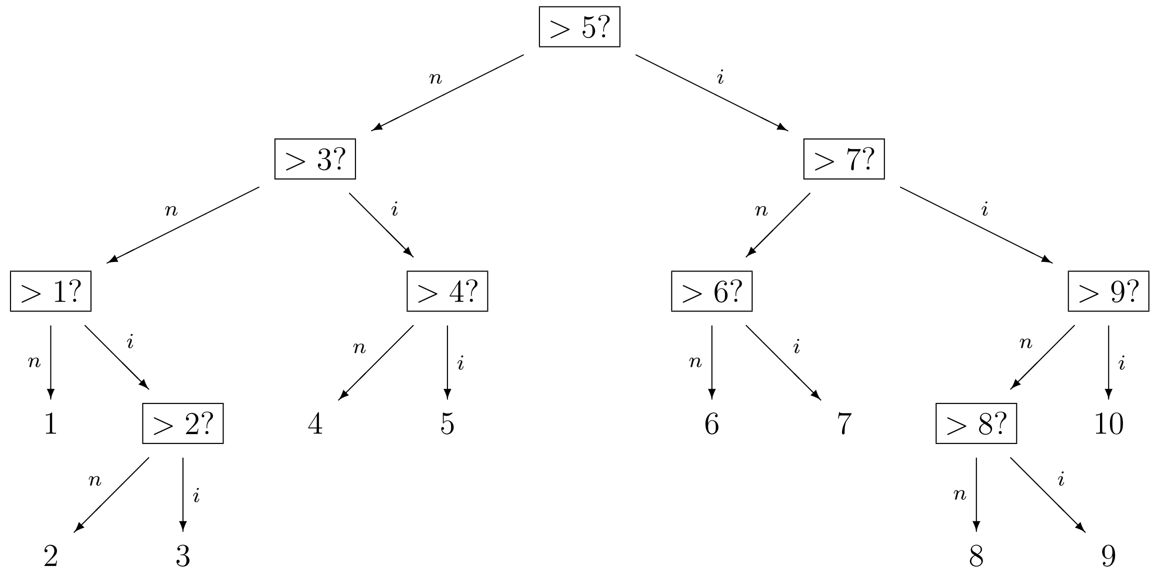
Ezek alapján

$$\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{1}{30} = \frac{6}{5},$$
$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{6} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{3}{10} + 3^2 \cdot \frac{1}{30} = 2,$$

$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2} = \sqrt{2 - [6/5]^2} = \sqrt{14}/5.$

21.(a) Legyen X a véletlen szám. A módszerünk szerint annyi kérdésre van szükség amennyi az X értéke. Ezért a válasz $\mathbb{E}(X) = 5.5$.

(b) Legyen a stratégiánk a következő:



Az első kérdésünk az, hogy a szám nagyobb-e, mint 5. Ennél, és a további kérdéseknél mindig próbáljuk megfelezni a lehetőségeket. Három kérdés szükséges akkor és csak akkor, ha a véletlen szám $1, 4, 5, 6, 7$, vagy 10 (azaz 6/10 valószínűséggel), négy kérdés szükséges akkor és csak akkor, ha a véletlen szám $2, 3, 8$, vagy 9 (4/10 valószínűséggel). A kérdések várható száma ezért $3 \cdot \frac{6}{10} + 4 \cdot \frac{4}{10} = \frac{17}{5} = 3.4$. 1 től 10-ig terjedő véletlen számnál a két módszer várható időtartama nem különbözik számottevően, azonban nagy véletlen számoknál a (b) módszer lényegesen gyorsabban működik.

22.(a) $\mathbb{E}[(2+X)^2] = \mathbb{E}(4)+\mathbb{E}(4X)+\mathbb{E}(X^2) = 4+4\mathbb{E}(X)+\mathbb{D}^2(X)+[\mathbb{E}(X)]^2 = 4+4\cdot 1+5+1^2 = 14.$

(b) A szórásnégyzet esetén az additív konstans nem számít, a multipliktaív konstans pedig négyzetesen jön ki a szórásnégyzet alól. Ezért $\mathbb{D}^2(4+3X) = 3^2 \cdot \mathbb{D}^2(X) = 9 \cdot 5 = 45$.

23.

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\Big(\frac{1}{\sigma} \cdot X - \frac{\mu}{\sigma}\Big) = \frac{1}{\sigma} \cdot \mathbb{E}(X) - \frac{\mu}{\sigma} = 0,$$

$$\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{D}^2\Big(\frac{1}{\sigma} \cdot X - \frac{\mu}{\sigma}\Big) = \frac{1}{\sigma^2}\mathbb{D}^2(X) = 1,$$

ezért $\mathbb{D}(Y) = 1$. Y-t az X változó *standardizáltjának* hívjuk.

24. Annak valószínűsége, hogy n ember közül eggyel sem közös a szülinapom $\left(\frac{364}{365}\right)^n$ (szökőéveket nem számolva). Annak valószínűsége, hogy legalább eggyel közös a szülinapom, $1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n$. Ezért keresem azt az n-et, melyre

$$\begin{aligned} 1 - \Big(\frac{364}{365}\Big)^n &\geq \frac{1}{2} \\ \Big(\frac{364}{365}\Big)^n &\leq \frac{1}{2} \\ n \cdot \log_2\Big(\frac{364}{365}\Big) &\leq -1 \\ n &\geq \frac{1}{\log_2(365) - \log_2(364)} \simeq 252.7, \end{aligned}$$

azaz legalább 253 ember szükséges.