Feladatok és megoldások a 8. hétre
Építőkari Matematika A3

1. Oldjuk meg a következő differenciálegyenlet rendszert:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x' & + & 2y' & - & 3x & + & 4y & = & 2\sin t \\ 2x' & + & y' & + & 2x & - & y & = & \cos t. \end{array} \tag{1}$$

2. Oldjuk meg a következő differenciálegyenlet rendszert:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x' & - & 2x & + & y & = & \mathrm{e}^t \\ y' & - & 3x & + & 2y & = & t. \end{array}$$

3. Oldjuk meg a következő differenciálegyenlet rendszert:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x' & - & 2x & + & 5y & = & -\cos t \\ y' & - & x & + & 2y & = & \sin t. \end{array}$$

4. Oldjuk meg a következő differenciálegyenlet rendszert:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x' & - & x & - & y & = & \mathrm{e}^{-2t} \\ y' & - & 4x & + & 2y & = & -2\mathrm{e}^t. \end{array}$$

5. Tegyük fel, hogy A és B egymást kölcsönösen kizáró események, melyekre $\mathbb{P}\{A\} = 0.3$ és $\mathbb{P}\{B\} = 0.5$. Mi a valószínűsége, hogy
   (a) A vagy B bekövetkezik;
   (b) A bekövetkezik, de B nem következik be;
   (c) A és B is bekövetkezik?

6. A férfiak 28%-a cigarettázik, 7%-a szivarozik, 5%-a pedig cigarettázik és szivarozik is.
   (a) Hány százalékuk nem cigarettázik és nem is szivarozik?
   (b) Hány százalékuk szivarozik, de nem cigarettázik?

7. Egy kis közösség 20 családból áll. 4 családban egy gyermek van, 8 családban két gyermek van, 5 családban három, 2 családban négy, 1 családban pedig öt gyermek található.
   (a) Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott családban i gyermek van, $i =$ 1, 2, 3, 4, 5?
   (b) Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott gyermek i gyerekes családból jött, $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

8. Feldobunk egy érmét kétszer egymás után. Mi a valószínűsége, hogy dobunk fejet? És hogy *pontosan* 1 db fejet dobunk?

9. Mi a valószínűsége annak, hogy két darab (szabályos) kocka feldobásakor legalább az egyik 6-os lesz? És annak a valószínűsége, hogy egyik sem lesz 6-os?

10. Két szabályos kockával dobunk. Mi a valószínűsége, hogy a második kockával nagyobbat dobunk mint az elsővel?

11. Mindkét szabályos kockánknak két piros, két fekete, egy sárga, és egy fehér oldala van. Ezzel a két kockával dobva mi a valószínűsége, hogy egyforma színű oldaluk lesz fölül?

12. Mi a valószínűsége annak, hogy egy háromgyermekes családban a gyerekek mind egyneműek? (Feltesszük, hogy a gyermekek egymástól függetlenül $1/2$ valószínűséggel lesznek fiúk és lányok.)

13. Legalább hány szabályos pénzdarabot kell feldobni ahhoz, hogy 90%-nál nagyobb legyen az esély arra, hogy legyen köztük fej?

14. Hatszor dobunk egy szabályos dobókockával. Mi a valószínűsége annak, hogy mind a hat szám előjön?

15. Öt ember, A, B, C, D, E, véletlenszerűen sorba áll. Mi a valószínűsége, hogy

    (a) pontosan egy ember van A és B között;

    (b) pontosan két ember van A és B között;

    (c) pontosan három ember van A és B között?

16. Mi a valószínűsége annak, hogy egy 30 fős hallgatóságban nincs két olyan ember akiknek a születésnapja megegyezik? (Feltesszük, hogy a születésnapok egymástól függetlenül egyenlő valószínűséggel oszlanak el az év 365 napja között. Ne foglalkozzunk a szökőévekkel.)

17. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ötös lottón pontosan két találatunk lesz?

18. Egy erdőben 20 őz él, melyekből 5-öt befogtak, megjelöltek, majd visszaengedtek. Később ebből a 20 őzből 4-et befogunk. Mi a valószínűsége, hogy a négyből pontosan 2 van megjelölve? Milyen feltevésekkel élünk?

19. Egy konferencián 30 pszichiáter és 24 pszichológus vesz részt. Az 54 résztvevőből hármat véletlenszerűen kiválasztanak, akik egy fórumon vesznek részt. Mi a valószínűsége, hogy legalább egy pszichológus lesz köztük?

Eredmények

1.

$$\begin{array}{rcrcl} 2\,(D-3)\,x & + & 2\,(D+2)\,y & = & 2\sin t \\ 2\,(D+1)\,x & + & (D-1)y & = & \cos t. \end{array}$$

Tehát az egyenletrendszer determinánsa:

$$\Delta = \begin{vmatrix} D-3 & 2(D+2) \\ 2(D+1) & D-1 \end{vmatrix} = D^2 - 4D + 3 - 4(D^2 + 3D + 2) = -3D^2 - 16D - 5 \neq 0. \qquad (2)$$

Cramer-szabály alapján:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 2\sin t & 2(D+2) \\ \cos t & D-1 \end{vmatrix} \text{ és } \Delta y = \begin{vmatrix} D-3 & 2\sin t \\ 2(D+1) & \cos t \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Kiszámoljuk ezen két egyenlet jobb oldalain levő determinánsokat:

$$\begin{vmatrix} 2\sin t & 2(D+2) \\ \cos t & D-1 \end{vmatrix} = 2\cos t - 2\sin t + 2\sin t - 4\cos t = -2\cos t$$

és

$$\begin{vmatrix} D-3 & 2\sin t \\ 2(D+1) & \cos t \end{vmatrix} = -\sin t - 3\cos t - (4\cos t + 4\sin t) = -5\sin t - 7\cos t.$$

Felhasználva, hogy a (2) egyenletből $\Delta = -3D^2 - 16D - 5$ kapjuk, hogy a (3)-beli egyenletek:

$$-3x'' - 16x' - 5x = -2\cos t \qquad \text{és} \qquad -3y'' - 16y' - 5y = -5\sin t - 7\cos t. \qquad (4)$$

Ezeket a már tanult módon megoldva kapjuk, hogy

$$x = c_1 e^{-t/3} + c_2 e^{-5t} + \frac{1}{65}(8\sin t + \cos t) \text{ és } y = c_3 e^{-t/3} + c_4 e^{-5t} + \frac{1}{130}(61\sin t - 33\cos t) \qquad (5)$$

Helyettesítsük ezeket az eredeti (az (1) egyenlet rendszerbeli) második egyenletbe. Kapjuk, hogy:

$$\left(\underbrace{\frac{4}{3}c_1 - \frac{4}{3}c_3}_{0}\right) e^{-t/3} + (\underbrace{-8c_2 - 6c_4}_{0})e^{-5t} = 0.$$

Innen:

$$c_3 = c_1 \text{ és } c_4 = -\frac{4}{3}c_2.$$

Ezeket visszahelyettesítve (5)-be kapjuk, hogy az egyenletrendszer megoldása:

$$x = c_1 e^{-t/3} + c_2 e^{-5t} + \frac{1}{65}(8\sin t + \cos t), \qquad y = c_1 e^{-t/3} - \frac{4}{3}c_2 e^{-5t} + \frac{1}{130}(61\sin t - 33\cos t).$$

2. $x = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{3}{2}te^t - \frac{1}{4}e^t + t, \qquad y = c_1 e^t + 3c_2 e^{-t} + \frac{3}{2}te^t - \frac{3}{4}e^t + 2t - 1.$
3. $x = 5c_1\cos t + 5c_2\sin t + 2t\cos t - t\sin t - \cos t, \qquad y = c_1(2\cos t + \sin t) + c_2(-\cos t + 2\sin t) + t\cos t - \cos t.$
4. $x = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} + \frac{1}{2}e^t, \qquad y = -4c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} - e^{-2t}.$

5.(a) $\mathbb{P}\{A \cup B\} = 0.3 + 0.5 = 0.8.$

(b) $\mathbb{P}\{A \cap B^c\} = \mathbb{P}\{A\} = 0.3.$

(c) $\mathbb{P}\{A \cap B\} = \mathbb{P}\{\emptyset\} = 0$.

6. Legyen E az az esemény, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott férfi cigarettázik, és F az az esemény, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott férfi szivarozik.

(a) $\mathbb{P}\{E^c \cap F^c\} = 1 - \mathbb{P}\{E \cup F\} = 1 - \mathbb{P}\{E\} - \mathbb{P}\{F\} + \mathbb{P}\{E \cap F\} = 1 - 0.28 - 0.07 + 0.05 = 0.7$ vagy 70%.

(b) $\mathbb{P}\{F \cap E^c\} = \mathbb{P}\{F - E\} = \mathbb{P}\{F\} - \mathbb{P}\{F \cap E\} = 0.07 - 0.05 = 0.02$ vagy 2%.

7.(a) A valószínűségek sorrendben $\frac{4}{20}$, $\frac{8}{20}$, $\frac{5}{20}$, $\frac{2}{20}$, $\frac{1}{20}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ esetén.

(b) A valószínűségek sorrendben $\frac{4}{48}$, $\frac{16}{48}$, $\frac{15}{48}$, $\frac{8}{48}$, $\frac{5}{48}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ esetén.

8. Legalább egy dobásunk fej akkor és csak akkor, ha nem mindkét dobásunk írás. A valószínűség tehát 3/4. Pontosan egy fej kétféleképpen fordulhat elő ((H, T) és (T, H)) a négy lehetőségből, így a valószínűség 1/2.

9. Legalább egy hatost dobunk, hogy ha nem igaz az, hogy mindkét dobásunk nem 6-os. A válasz tehát $1 - (5/6)^2$. Nem dobunk egy 6-ost sem $(5/6)^2$ valószínűséggel.

10, 1. megoldás: Az az E esemény, hogy a második kockával nagyobbat dobunk mint az elsővel a következő elemi eseményekből áll:

$$
\begin{aligned}
E = \{(1, 2),\ &(1, 3),\ (1, 4),\ (1, 5),\ (1, 6),\\
&(2, 3),\ (2, 4),\ (2, 5),\ (2, 6),\\
& (3, 4),\ (3, 5),\ (3, 6),\\
& (4, 5),\ (4, 6),\\
& (5, 6)\}.
\end{aligned}
$$

Ezért $\#E = 15$, míg az eseménytér számossága $\#S = 36$, így a valószínűség $15/36 = 5/12$.
10, 2. megoldás: Az E esemény olyan számpárokból áll, melyeknek a második tagja nagyobb, mint az első tagja. Minden ilyen pár előáll az $\{1, 2, \dots, 6\}$ számok 2-kombinációjából, ha a kiválasztott két számot növekvő sorrendbe állítjuk. Ezért $\#E = \binom{6}{2} = 15$, és $\mathbb{P}\{E\} = 15/36 = 5/12$.
10, 3. megoldás: Definiáljuk az F-et mint azt az eseményt, hogy az első kockával nagyobbat dobunk, mint a másodikkal. Szimmetriaokokból $\mathbb{P}\{E\} = \mathbb{P}\{F\}$, és $(E \cup F)^c$ az az esemény, hogy a két kockával egyformát dobtunk, melynek az esélye 1/6. Ezért $5/6 = \mathbb{P}\{E \cup F\} = \mathbb{P}\{E\} + \mathbb{P}\{F\} - \mathbb{P}\{E \cap F\} = \mathbb{P}\{E\} + \mathbb{P}\{E\} - 0 = 2\mathbb{P}\{E\}$, melyből $\mathbb{P}\{E\} = 5/12$.

11. Mind a két kockának a piros oldala lesz fölül $2 \cdot 2 = 4$ esetben, mindkettőnek a fekete oldala lesz fölül $2 \cdot 2 = 4$ esetben, a sárga oldalak lesznek fölül 1 esetben, és a fehér oldalak lesznek fölül 1 esetben. Ez összesen 10 eset a 36 egyenlő valószínűségű kimenetelből, tehát a valószínűség $10/36 = 5/18$.

12. A gyerekek nemét tekintve 8 egyenlő valószínűségű kimenetel van. Ezek közül két esetben lesz a három gyermek egynemű, a válasz tehát $2/8 = 1/4$.

13. Annak valószínűsége, hogy legalább egy fejet dobunk n dobásból $1 - (1/2)^n$. Ezért keressük n-et, melyre

$$
\begin{aligned}
1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n &\geq 0.9\\
0.1 &\geq \left(\frac{1}{2}\right)^n\\
\log_2(0.1) &\geq -n\\
\log_2(10) &\leq n.
\end{aligned}
$$

Mivel n egész, a válasz az, hogy legalább $\lceil \log_2(10) \rceil = 4$ dobásra van szükség. (Itt $\lceil x \rceil$ a felső egészrészt jelöli, vagyis azt a legkisebb egész számot, amely x-nél nagyobb-egyenlő.)

14. Azon esetek száma melyekben mind a hat szám előjön megegyezik e hat szám permutációinak számával, azaz 6!-sal. Az eseménytér a hat számjegyből felírható bármilyen, hat hosszúságú sorozatok halmaza, ezért $\#S = 6^6$. A keresett valószínűség tehát $6!/6^6 = 5!/6^5 \simeq 0.015$.

15, megoldás sorrenddel:

(a) Háromféleképpen választhatjuk ki az ötből azt a két pozíciót, ahova A és B kerülnek úgy, hogy egy üres hely legyen köztük. Ha ezt megtettük, A-t és B-t kétféle sorrendben állíthatjuk erre a két pozícióra. Ekkor három üres helyünk marad, melyekre $3! = 6$ féleképpen állíthatjuk C-t, D,-t és E-t. Ezért $3 \cdot 2 \cdot 3! = 36$ sorrend van úgy, hogy pontosan egy személy kerül A és B közé. Mivel mind a $5! = 120$ sorrend egyformán valószínű, a válasz $36/120 = 3/10$.

(b) Kétféleképpen választhatjuk ki azt a két pozíciót, ahova A és B kerülnek, azután A-t és B-t kétféle sorrendben állíthatjuk erre a két pozícióra, majd a maradék helyekre $3! = 6$ féleképpen állíthatjuk sorba C-t, D,-t és E-t. Ezért $2 \cdot 2 \cdot 3! = 24$ olyan sorrend van, ahol pontosan két ember kerül A és B közé, a válasz $24/120 = 1/5$.

(c) Csak egyféleképpen választhatjuk ki azt a két pozíciót, ahova A és B kerülnek, azután A-t és B-t kétféle sorrendben állíthatjuk erre a két pozícióra, majd a maradék helyekre $3! = 6$ féleképpen állíthatjuk sorba C-t, D,-t és E-t. Ezért $1 \cdot 2 \cdot 3! = 12$ olyan sorrend van, ahol pontosan két ember kerül A és B közé, a válasz $12/120 = 1/10$.

15, megoldás sorrend nékül:

(a) Háromféleképpen választhatjuk ki az ötből azt a két pozíciót, ahova A és B kerülnek úgy, hogy egy üres hely legyen köztük. Mivel e két pozícióra nézve mind az $\binom{5}{2}$ lehetőség egyenlő valószínű, a válasz $3/\binom{5}{2} = 3/10$.

(b) Kétféleképpen választhatjuk ki azt a két pozíciót, ahova A és B kerülnek, a válasz most $2/\binom{5}{2} = 1/5$.

(c) Csak egyféleképpen választhatjuk ki azt a két pozíciót, ahova A és B kerülnek, a válasz most $1/\binom{5}{2} = 1/10$ lesz.

16. $365 \cdot 364 \cdots 336 = 365!/(365-30)!$ féleképpen oszthatunk ki 30 különböző születésnapot a hallgatóknak, míg 365^{30} féleképpen oszthatunk ki 30 tetszőleges születésnapot a hallgatóknak. Ezért a keresett valószínűség $365!/[335! \cdot 365^{30}] \simeq 0.29$.

17. Annyiféleképpen lehet kettesünk, ahányféleképpen kiválasztható az öt nyerőszámból kettő, és a 85 nem nyerő számból három. Ezért $\binom{5}{2} \cdot \binom{85}{3}$ féle kéttalálatos szelvény van, összesen $\binom{90}{5}$ különböző szelvény közül. A valószínűség tehát $\binom{5}{2} \cdot \binom{85}{3} / \binom{90}{5} \simeq 0.022$.

18. Ahhoz, hogy 2 megjelölt és 2 nem megjelölt őzet fogjunk, 2-őt kell kiválasztanunk az 5 megjelölt őzből, és 2-őt a 15 nem megjelölt őzből. Ezt $\binom{5}{2} \cdot \binom{15}{2}$ féleképpen tehetjük meg, míg $\binom{20}{4}$ féleképpen választható ki tetszőleges 4 őz. A valószínűség tehát $\binom{5}{2} \cdot \binom{15}{2} / \binom{20}{4} \simeq 0.22$.

A kérdést máshogy is megtámadhatjuk, ha az idő visszafordításával azt kérdezzük, hogy mennyi a valószínűsége annak, hogy az általunk fogott 4-ből kettő, és az általunk nem megfogott 16-ból három őz van megjelölve. Ekkor a válasz $\binom{4}{2} \cdot \binom{16}{3} / \binom{20}{5}$. A binomiálisok határozott kérésre bevallják, hogy a két válasz tulajdonképpen megegyezik.

19. Ha elosztjuk, hogy hányféleképpen választható a 30-ból 3 pszichiáter a fórumba azzal, ahányféleképpen az 54 résztvevőből választható 3 ember a fórumba, akkor megkapjuk annak a valószínűségét, hogy a fórumba nem választanak pszichológust: $\binom{30}{3} / \binom{54}{3}$. A válaszunk ezen esemény komplementumának valószínűsége, azaz $1 - \binom{30}{3} / \binom{54}{3} \simeq 0.84$.