Képletgyűjtemény az A3 vizsgára

Építőkari Matematika A3

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, $\qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

$\sin x \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$, $\qquad \sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$

deriváltak:

$(\sinh x)' = \cosh x$

$(\cosh x)' = \sinh x$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \ln(a)$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{ar\,sinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$(\operatorname{ar\,cosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$(\operatorname{ar\,tanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$

$(\operatorname{ar\,coth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\operatorname{arc\,cot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

differenciálási szabályok:

$(cu)' = cu'$ $\qquad$ (c konstans)

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}$

integrálási szabályok:

$\int cf \, dx = c \int f \, dx$ $\qquad$ (c konstans)

$\int (f+g) \, dx = \int f \, dx + \int g \, dx$

$\int f(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$,

ahol F az f primitív függvénye

$\int f(g(x)) g'(x) \, dx = F(g(x)) + c$,

ahol F az f primitív függvénye

$\int f^\alpha f' \, dx = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, ha $\alpha \neq -1$

$\int \frac{f'}{f} \, dx = \ln |f| + c$

$\int uv' \, dx = uv - \int u'v \, dx$

nevezetes helyettesítések:

$R(e^x)$	$e^x = t$
$R(\sqrt{ax+b})$	$\sqrt{ax+b} = t$
$R\left(\frac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{cx+d}}\right)$	$\frac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{cx+d}} = t$
$R(\sin x, \cos x)$	$\sin x, \cos x, \tan x, \tan \frac{x}{2} = t$
$R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$	$x = a \sin t, \; x = a \cos t$
$R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$	$x = a \sinh t$
$R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$	$x = a \cosh t$

integrálok:

$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ $\qquad$ ($\alpha \neq -1$)

$\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$

$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

$\int \cos x \, dx = \sin x + c$

$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + c$

$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + c$

$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c$

$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{ar\,sinh} \frac{x}{a} + c$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{ar\,cosh} \frac{x}{a} + c$

$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{ar\,tanh} \frac{x}{a} + c$, $\qquad$ ha $\left|\frac{x}{a}\right| < 1$

$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{ar\,coth} \frac{x}{a} + c$, $\qquad$ ha $\left|\frac{x}{a}\right| > 1$

$\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + c$

$\int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + c$

1.
$$e^{it} = \cos t + i \cdot \sin t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

2.
$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (a \neq 0).$$

egyenletre karakterisztikus egyenlet:
$$ar^2 + br + c = 0.$$

3. **Próba függvény módszer**ben, ha az
$$ay'' + by' + cy = g(t), \qquad a \neq 0 \text{ és } t \in I$$
egyenletben
$$g(t) = e^{ut}\left(A_n(t)\cos(vt) + B_m(t)\sin(vt)\right),$$
ahol $A_n(t), B_m(t)$ polinomok, melyeknek fokai n illetve m, akkor az inhomogén partikuláris alakja:
$$y_{i,p} = t^s e^{ut}\left(P_k(t)\cos(vt) + Q_k(t)\sin(vt)\right)$$
ahol az s az $u + i \cdot v$ multiplicitása a karakterisztikus egyenlet gyökei között. $P_k(t), Q_k(t)$ általános alakú $k = \max(n, m)$ fokú polinomok.

4. **Konstans variációs módszer**ben:
$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \qquad t \in I$$
egyenlet $Y'' + p(t)Y' + q(t)Y = 0$ homogén részének fundamentális megoldása y_1, y_2, akkor az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása $y_{i,p} = C_1(t) \cdot y_1(t) + C_2(t) \cdot y_2(t)$, ahol a $C_1(t), C_2(t)$ függvények deriváltjaira teljesül, hogy:
$$C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t) = 0$$
$$C_1'(t)y_1'(t) + C_2'(t)y_2'(t) = g(t)$$

5. **Hiányos másodrendű egyenletben:**
Ha y hiányzik, a helyettesítés: $p(x) := y'(x)$.
Ha viszont az x hiányzik, akkor a helyettesítés: $y' = p(y)$

6. **Az** $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ **differenciálegyenlet egzakt**, ha
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$
Az egyenlet megoldásához meg kell találni azt az $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt, amire $\text{grad}F = (M, N)$. Ekkor a differenciálegyenlet megoldása:
$$F(x,y) = \text{Const.}$$

Valószínűségszámítás

Szorzási szabály:

$$\mathbb{P}\{E_1E_2 \dots E_n\} = \mathbb{P}\{E_n \mid E_1 \dots E_{n-1}\} \cdots \mathbb{P}\{E_3 \mid E_1E_2\} \cdot \mathbb{P}\{E_2 \mid E_1\} \cdot \mathbb{P}\{E_1\},$$

Teljes valószínűség tétele:

Ha $F_1, F_2, \dots$ teljes eseményrendszert alkotnak, azaz
$\bigcup_i F_i = S$, és $F_i \cap F_j = \emptyset$ ha $i \neq j$, akkor
$$\mathbb{P}\{E\} = \sum_i \mathbb{P}\{E \mid F_i\} \cdot \mathbb{P}\{F_i\}.$$

Bayes Tétel:

Ha $F_1, F_2, \dots$ teljes eseményrendszert alkotnak, azaz
$\bigcup_i F_i = S$, és $F_i \cap F_j = \emptyset$ ha $i \neq j$, akkor
$$\mathbb{P}\{F_i \mid E\} = \frac{\mathbb{P}\{E \mid F_i\} \cdot \mathbb{P}\{F_i\}}{\sum_j \mathbb{P}\{E \mid F_j\} \cdot \mathbb{P}\{F_j\}}.$$

Binomiális(n, p) eloszlás

→ súlyfüggvénye: $p(i) = \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n$

→ várható értéke: $\mathbb{E}(X) = np$

→ szórásnégyzete: $\mathbb{D}^2(X) = np(1-p)$

→ legvalószínűbb értéke: $\lfloor (n+1)p \rfloor$

Poisson(λ) eloszlás

→ súlyfüggvénye: $p(i) = \frac{\lambda^i}{i!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$

→ várható értéke: $\mathbb{E}(X) = \lambda$

→ szórásnégyzete: $\mathbb{D}^2(X) = \lambda$

→ legvalószínűbb értéke: $\begin{cases} \lfloor \lambda \rfloor & \text{, ha } \lambda \text{ nem egész,} \\ \lambda \text{ és } \lambda - 1 & \text{, ha } \lambda \text{ egész.} \end{cases}$

Geometriai(p) eloszlás

→ súlyfüggvénye: $p(i) = (1-p)^{i-1} \cdot p, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$

→ várható értéke: $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$

→ szórásnégyzete: $\mathbb{D}^2(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Egyenletes(a, b) eloszlás

→ sűrűségfüggvénye: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{, ha } a < x < b, \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$

→ eloszlásfüggvénye: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } x \le a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{, ha } a < x < b, \\ 1 & \text{, ha } x \ge b. \end{cases}$

→ várható értéke: $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$

→ szórásnégyzete: $\mathbb{D}^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Normális(μ, σ^2) eloszlás

→ sűrűségfüggvénye: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

→ eloszlásfüggvénye: $F(x) = \Phi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big)$, ahol Φ a standard normális eloszlásfüggvény.

Minden x-re $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

→ várható értéke: $\mathbb{E}(X) = \mu$

→ szórásnégyzete: $\mathbb{D}^2(X) = \sigma^2$

Exponenciális(λ) eloszlás

→ sűrűségfüggvénye: $f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{, ha } x > 0, \\ 0 & \text{, ha } x \le 0. \end{cases}$

→ eloszlásfüggvénye: $F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{, ha } x > 0, \\ 0 & \text{, ha } x \le 0. \end{cases}$

→ várható értéke: $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$

→ szórásnégyzete: $\mathbb{D}^2(X) = 1/\lambda^2$

DeMoivre-Laplace tétel: Ha $X \sim$ binomiális(n, p), akkor $\mathbb{P}\Big\{ \dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le a \Big\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(a)$.

Centrális határeloszlás tétel: Ha $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független azonos eloszlású változók μ várható értékkel és σ szórással, akkor

$$\mathbb{P}\Big\{ \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \le a \Big\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(a)$$

A standard normális eloszlásfüggvény táblázata

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000