1. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1998 nyár I. évf. 13.-18.tk.

1. Konvergensek-e az alábbi numerikus sorok? Válaszát indokolja! a) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n^3}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$

MO. a) $\sim \frac{1}{n^3} \rightsquigarrow$ konvergens, b) $\sim \frac{1}{n} \rightsquigarrow$ divergens.

2. a) Bizonyítsa be, hogy az $f_n(x) = \frac{n}{1+n^2x^3}$ sorozat egyenletesen konvergens az $[1,2]$ intervallumon!

b) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \int_1^2 \frac{n}{1+n^2x^3}\,dx = ?$

MO. a) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{n}{1+n^2x^3} = 0$ ha $x \geq 1$ $\rightsquigarrow$ $r_n(x) = f_n(x)$ ha $x \geq 1$ és így $|r_n(x)| = |f_n(x)| \leq \frac{n}{n^2x^3} \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ ha $x \geq 1$. b) a)–val a limes és az integrál felcserélhető, tehát $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{n}{1+n^2x^3} = 0$ miatt $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \int_1^2 \frac{n}{1+n^2x^3}\,dx = 0$.

3. Legyen $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Adja meg az $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{0}$ egyenlet összes megoldását!

MO. Gauss–elimináció után $\underline{\underline{A}} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, tehát $\underline{\underline{A}}$ oszlopai lin. függetlenek, az egyetlen megoldás a triviális $\underline{0}$.

4. Oldja meg az $y' + 2xy = x$ differenciálegyenletet!

MO. A homogén: $y' + 2xy = 0 \rightsquigarrow \int \frac{dy}{y} = -\int 2x\,dx \rightsquigarrow \ln|y| = -x^2 + c \rightsquigarrow y = ce^{-x^2}$, vagyis a homogén általános megoldása: $y_{h\acute{a}} = ce^{-x^2}$. Az inhomogén az állandók variálásával: $y = c(x)e^{-x^2} \rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow c'e^{-x^2} - 2xce^{-x^2} + 2xce^{-x^2} = x \rightsquigarrow c'e^{-x^2} = x \rightsquigarrow c' = xe^{-x^2} \rightsquigarrow c = \int xe^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} \rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow y = \frac{1}{2}e^{x^2}e^{-x^2} = \frac{1}{2}$. Így az inhomogén egy partikuláris megoldása: $y_{ip} = \frac{1}{2}$, amivel az inhomogén általános megoldása: $y_{i\acute{a}} = y_{h\acute{a}} + y_{ip} = \frac{1}{2} + ce^{-x^2}$.

5. Határozza meg az $f(x,y) = x^4 + y^2 - 32x$ függvény lokális szélsőértékhelyeit !

MO. $\operatorname{grad} f(x,y) = (4x^3 - 32, 2y) = 0 \rightsquigarrow x = 2, y = 0$. A második parciálisok mártixa: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, ennek determinánsa $P = (2,0)$–ban $96 > 0$, így itt van szélsőértéke, és ez minimum, mert itt $f_{xx} = 48 > 0$.

6. Legyen $T = \{(x,y) : x \leq y \leq 2 - x,\ x \geq 0\}$. $\int\int_T xy\,dx\,dy = ?$

MO. $\int\int_T xy\,dx\,dy = \int_0^1 \int_x^{2-x} xy\,dy\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x\left((2-x)^2 - x^2\right)\,dx = \int_0^1 2x - 2x^2\,dx = x^2 - 2\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$.

2. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1998 nyár I. évf. 13.-18.tk.

1. Konvergensek-e az alábbi improprius integrálok ? Válaszát indokolja!

$$\text{a)}\ \int_1^2 \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx \qquad \text{b)}\ \int_2^\infty \frac{1}{x^2\ln x}\,dx$$

MO. a) Nem: $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = -\frac{1}{\ln x}$ és $\displaystyle\nexists \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{1}{\ln x}$, b) Igen: $\displaystyle|\frac{1}{x^2\ln x}| \le \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{x^2}$ ha $x \ge 2$ és $\displaystyle\exists \int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$.

2. Legyen minden valós x–re $\displaystyle F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$. Számitsa ki az $F(-1)$, $F(0)$ és $F(1)$ értékeket 1 %–os pontossággal!

MO. e^x $x=0$ körüli Taylor-sora alapján : $\displaystyle F(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^\infty \frac{(-x^2)^n}{n!}\,dx = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n\frac{1}{n!}\int_0^\infty x^{2n}\,dx =$

$\displaystyle= \sum_{n=0}^\infty (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$, hiszen az integrálás és a határátmenet felcserélhető, tekintve, hogy a szóbanforgó hatványsor mindenütt konvergens (összegfüggvénye: e^{-x^2} minden valós x–re), így bármely korlátos intervallumon egyenletesen is konvergens. Következésképp, $\displaystyle F(1) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n\frac{1}{(2n+1)n!}$, ami nyilván Leibniz tipusú, így a hiba nem nagyobb, mint az első elhagyott tag abszolút értéke: $\displaystyle|r_n| \le \frac{1}{(2n+1)n!} \le 10^{-2} \rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow (2n+1)n! \ge 100 \rightsquigarrow n \ge 4 \rightsquigarrow F(1) \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} = \frac{26}{35} \approx 0.743$. Nyilván $F(0) = 0$ és, mivel e^{-x^2} páros, $F(-1) = F(1) \approx 0.743$.

3. Mely **a** és **b** valós számokra lesz az alábbi egyenletrendszernek a) nulla, b) egy, c) végtelen sok megoldása ?

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 1 \\ -x - y + z &= 3 \\ -x - 4y + \mathbf{a}z &= \mathbf{b} \end{aligned}$$

MO. A kibővített mátrix Gauss-elimináció után: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & a+8 & b+9 \end{pmatrix}$, tehát egy megoldás van ha $a \ne -8$, $b \ne -9$, végtelen sok megoldás van ha $a = -8$, $b = -9$, végül nincs megoldás ha $a = -8$, $b \ne -9$.

4. Vannak-e $\mathbf{R}^3$–nak olyan e és f bázisai, hogy $\underline{\underline{I}}_{ef} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, ahol I az identitásoperátor? Ha igen, adjon meg ilyen bázisokat!

MO. Igen, az adott matrix reguláris, mert Gauss-elimináció után: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pl. ha f $\mathbf{R}^3$ szokásos bázisa, akkor e a mátrix oszlopvektoraiból álló rendszer, hisz az operátor mátrixának definíciója alapján: $\underline{\underline{I}}_{ef} = (\ldots \underline{\underline{Ie_i}}_f \ldots) = (\ldots \underline{\underline{e_i}}_f \ldots)$.

5. Hol deriválható a következő f függvény? Az origón kívül $\displaystyle f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ és $f(0,0) = 0$.

MO. Mindenütt az origó kivételével, mert itt deriválható függvényekből van a deriválást megtartó módon összerakva, míg az origóban még csak nem is folytonos, hisz $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} f(x,0) = 0 \ne \frac{1}{2} = \lim_{x\longrightarrow 0} f(x,x)$.

6. Keresse meg az meg az $f(x,y) = xy$ függvény abszolút szélsőértékhelyeit a $K = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$ körlapon és állapítsa meg a szélsőértékeket!

MO.

$\operatorname{grad} f = (y,x) = 0$ iff $x = y = 0$. Itt $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 < 0$ így K belsejében nincs szélsőérték. A határon polárhelyettesítés után : $g(\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)|_{r=1} = \cos\varphi\sin\varphi =$ $= \frac{\sin 2\varphi}{2}$, $g'(\varphi) = \cos 2\varphi = 0 \rightsquigarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{4}$. Ezek a szélsőértékhelyek, $g(\pm\frac{\pi}{4}) = \pm\frac{1}{2}$, ezek a szélsőértékek.

3. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1998 nyár I. évf. 13.-18.tk.

1. Konvergensek-e az alábbi numerikus sorok? Válaszát indokolja!
 a) $(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{6})\ldots$ b) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots$

MO. a) Igen: a zárójelek elhagyásával keletkező altarnáló harmónikus sor konvergens. b) Nem: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots=$ $=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots)$, mely a divergens harmónikus sor konstansszorosaként divergens.

2. Hol konvergens és hol egyenletesen konvergens a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ függvénysor ?

MO. A sor az e^x Taylor-sora, mely mindenütt előállítja a függvényt, tehát mindenütt konvergens, így lévén hatványsor, minden véges intervallumon egyenletesen konvergens (VAGY: minden korlátos $[-K,K]$ intervallumon majorálható a konvergens $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{K^n}{n!}$ numerikus sorral (ez utóbbi konvergenciája a hányadoskritériummal: $\frac{K^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{K^n}=\frac{K}{n}\longrightarrow 0<1$ adódik), így itt Weierstrass-kritériummal egyenletesen konvergens.) **De** nem egyenletesen konvergens az egész számegyenesen mert már az $f_n(x)=\frac{x^n}{n\,!}$ fv. sorozat sem az, hisz az $a_n=n\longrightarrow\infty$ sorozat mentén $r_n(a_n)=f_n(a_n)=\frac{n^n}{n\,!}\longrightarrow\infty\neq 0$.

3. Adja meg az alábbi egyenletrendszer összes megoldását!

$$\begin{aligned} x+2y+2z &= 1\\ -x-y+z &= 3\\ -x-4y-8z &= -9 \end{aligned}$$

MO. Gauss-elimináció után az egyenletrendszer bővített mátrixa: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -7\\ 0 & 1 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, így $x=-7-4c\,,\ y=4+3c\,,\ z=-c\,,\ c\in\mathbf{R}$.

4. Határozza meg $\mathbf{R}^2$–en az $y=-x$ egyenesre való tükrözés operátorának mátrixát az $(i+j,i-j)$ bázisban, ahol $i=(1,0)\,,\ \ j=(0,1)$,!

MO. Legyen T a tükrözés operátora. Ekkor $T(i+j)=-(i+j)\,,\ T(i-j)=i-j$, tehát $\underline{\underline{T}}=\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Számítsa ki az alábbi határértékeket, ha léteznek!
a) $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\sin\frac{x+y}{x^2+y^2}$ b) $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}(x+y)\sin\frac{x+y}{x^2+y^2}$

MO. a) Nem létezik: átviteli elvvel adódik abból, hogy az $f(x,y)=\sin\frac{x+y}{x^2+y^2}$, $x_n=\frac{1}{2n\pi}$, $x'_n=\frac{1}{(4n+1)\pi}$ jelölésekkel $f(x_n,0)=0\longrightarrow 0$, $f(x'_n,0)=1\longrightarrow 1$, b) $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}(x+y)\sin\frac{x+y}{x^2+y^2}=0$ mert $\left|(x+y)\sin\frac{x+y}{x^2+y^2}\right|\leq$ $\leq|x+y|\longrightarrow 0$.

6. Határozza meg az $y=x^3$ és az $y=\sqrt[3]{x}$ görbék által határolt síkidom területét!

MO. $T=\int_0^1\int_{x^3}^{\sqrt[3]{x}}dy\,dx=\int_0^1\sqrt[3]{x}-x^3\,dx=\frac{3}{4}x^{4/3}-\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

4. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1998 nyár I. évf. 13.-18.tk.

1. Hol konvergens és hol egyenletesen konvergens az $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$ függvénysorozat?

MO. $f_n(x) \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0$ minden valós x–re, továbbá egyenletesen konvergens minden $[-K, K]$ intervallumon, mert itt $|r_n(x)| = |f_n(x)| \le \dfrac{K^n}{n!} \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0$. **De** nem egyenletesen konvergens az egész számegyenesen mert az $a_n = n \longrightarrow \infty$ sorozat mentén $r_n(a_n) = f_n(a_n) = \dfrac{n^n}{n\,!} \longrightarrow \infty \neq 0$.

2. Legyen $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ az origón kívül és $f(0) = 1$. Adja meg az $f''(0)$ értékét, ha létezik!

MO. e^x Taylor sora alapján $f(x) = 1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{6} \ldots$ mindenütt konvergens hatványsor határfüggvénye, így mindenütt akárhányszor deriválható és Taylor sora az őt előállító hatványsor. Következésképp, $\dfrac{f''(0)}{2}x^2 = \dfrac{x^2}{6}$, amiből $f''(0) = \dfrac{1}{3}$.

3. Legyen $e_1 = (1, 2, 0)$, $e_2 = (-1, -2, -1)$, $e_3 = (0, 1, 2)$. Döntse, el, hogy bázisa-e az $e = (e_1, e_2, e_3)$ vektorrendszer $\mathbf{R}^3$ -nak és ha igen, határozza meg a szokásos bázisról e–re való áttérés mátrixát!

MO. Igen, lineárisan függetlenek, ha s a szokásos bázis, akkor $\underline{\underline{I_{es}}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, az áttérés mátrixa ennek inverze: $\underline{\underline{I_{se}}} = \underline{\underline{I_{es}}}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Oldja meg az $y'' - 4y' + 4y = e^{4x}$ differenciálegyenletet !

MO. 1) A karakterisztikus polinomnak egyetlen kettős gyöke a $\lambda = 2$, igy a homogén egyenlet álalános megoldása: $y_{há} = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$. 2) Az inhomogén egy partikuláris megoldását $y = Ae^{4x}$ alakban keressük (az általános $e^{ax}(p(x)\sin bx + q(x)\cos bx)$ alakban $a = 4$, $b = 0$, $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, így, mivel az $a + bj = 4$ nem gyöke a karakterisztikus polinomnak, $m = 0$, azaz $x^m e^{ax}(P(x)\sin bx + Q(x)\cos bx) = = e^{4x}A)$. Ezzel tehát $y = Ae^{4x}$, $y' = 4Ae^{4x}$, $y'' = 16Ae^{4x}$, amit az erdeti egyenletbe visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy $e^{4x}A(16 - 16 + 4) = e^{4x}$. Ebből $A = \frac{1}{4}$, tehát az inhomogén egy partikuláris megoldása $y_{ip} = \frac{1}{4}e^{4x}$, amivel az inhomogén általános megoldása: $y_{iá} = y_{há} + y_{ip} = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + \dfrac{1}{4}e^{4x}$.

5. Számítsa ki a következő függvények határérékét a $P = (1, 1)$ pontban, amennyiben ez létezik! Eljárását indokolja! $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, $g(x, y) = \dfrac{x - 1}{x^2 - y^2}$.

MO. a) Az $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ függvény a $P = (1, 1)$ pontban folytonos, mert folytonmosságmegörző módon van összerakva ilyenekből, így $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow P} f(x, y) = f(P) = \dfrac{1}{2}$ b) Az $f(x, y) = \dfrac{x - 1}{x^2 - y^2}$ esetén nem létezik a $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(1,1)} f(x, y)$, mert $f(x, 1) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{x + 1} \xrightarrow[x\longrightarrow 1]{} \dfrac{1}{2}$, de $f(1, y) = \dfrac{1 - 1}{1 - y^2} = 0 \xrightarrow[y\longrightarrow 1]{} 0$.

6. Számítsa ki annak a tetraédernek a térfogatát, melyet az $x + y + z = 1$ sík és a koordinátasíkok határolnak!

MO. $V = \displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\,dy\,dx = \int_0^1 (y - yx + \frac{y^2}{2})\Big|_0^{1-x} dx =$
$= \displaystyle\int_0^1 (\frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}x^2)\,dx = (\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$.

5. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1998 nyár I. évf. 13.-18.tk.

1. Átrendezhetőek-e az alábbi sorok plusz végtelenbe divergáló sorokká? a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!}$

MO. Nem, mert abszolút konvergensek, hiszen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$ (vagy hányadoskritériummal $\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \longrightarrow 0 < 1$ miatt) a) konvergens, így pozitív tagú lévén abszolút konvergens és vele természetesen b) is az.

2. Legyen minden $n \in \mathbf{N}$ esetén

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{ha } -1 \le x \le 1/n \\ nx & \text{ha } -1/n < x < 1/n \\ 1 & \text{ha } 1/n \le x \le 1 \end{cases}$$

a) Igaz-e, hogy az $(f_n(x))$ sorozat egyenletesen konvergens a $[-1, 1]$ intervallumon?

b) Igaz-e, hogy minden $x \in \mathbf{R}$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx \quad ?$$

2. Mutassa meg, hogy az $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ függvénysorozat nem egyenletesen konvergens az egész valós számegyenesen! Mutasson példát olyan függvénysorozatra – ha létezik ilyen – mely az egész valós számegyenesen egyenletesen konvergens!

MO. a) Tetszőleges valós x–re $f_n(x) \longrightarrow 0$, így $|r_n(x)| = |f_n(x)|$ és $f_n(n) = \frac{n^n}{n!} \longrightarrow \infty$ ($\not\longrightarrow 0$).

b) Például $f_n(x) = x + e^{-n^2}$ esetén, tetszőleges valós x–re $f_n(x) \longrightarrow x$, így $|r_n(x)| = e^{-n^2}$, azaz tetszőleges $(x_n) \subseteq \mathbf{R}$ esetén $r_n(x_n) = e^{-n^2} \longrightarrow 0$.

3. Legyen $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & -8 \end{pmatrix}$. Adjon meg két különböző háromelemű oszlopvektort, $\underline{\underline{x}}$ és $\underline{\underline{y}}$–t, ha vannak ilyenek, hogy $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{y}}$ legyen!

MO. A $\underline{\underline{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$ jelöléssel megoldandó az $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{b}}$ egyenlet. Az egyenletrendszer mátrixa Gauss elimináció után: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, tehát $\underline{\underline{x}} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ és például a $\underline{\underline{z_0}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} \underline{\underline{A}}$ jelöléssel $\underline{\underline{y}} = \underline{\underline{x}} + \underline{\underline{z_0}} = \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ vagy $\underline{\underline{y}} = \underline{\underline{x}} - \underline{\underline{z_0}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Határozza meg $\mathbf{R}^3$–on a z tengely körüli $+90°$–os forgatás szokásos bázisbeli mátrixának 1999–edik hatványát!

MO. Legyen a pozitív $90°$–os forgatás operátora P, a negatív $90°$–os forgatás operátora N és az identitás I. Nyilván $P^4 = I$, így $P^{1999} = (P^4)^{499} \cdot P^3 = I^{499} \cdot P^3 = I \cdot P^3 = P^3 = N$, tehát $\underline{\underline{P}}_s^{1999} = \underline{\underline{P^{1999}}}_s = \underline{\underline{N}}_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ahol $s = (i, j, k)$ a szokásos bázis, hiszen $Ni = -j$, $Nj = i$, $Nk = k$.

5. Van-e lokális minimuma és lokális maximuma az $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ függvénynek a $K = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$ körlapon ? Ha igen, határozza meg ezek helyét és értékét!

MO. Lokális maximum az origóban, értéke $e^0 = 1$, lokális minimum nincs, mert a függény K–beli minimumát K határán veszi fel, hiszen polárkoordinátás helyettesítéssel: $f(r) = e^{-r^2}$ $(r > 0)$ r–ben szigorúan monoton csökkenő, azaz K–beli maximumát $r = 0$–ban, az origóban, tehát K belsejében veszi fel, ami így lokális maximum, míg K–beli minimumát ott, ahol K–ban r maximum, azaz bármely olyan pontban, ahol $r = x^2 + y^2 = 1$, vagyis K peremén.

6. Számítsa ki az $x^2 + y^2 = 4$ egyenletű henger azon darabjának térfogatát, mely az $x + y + z = 8$ és a $z = 0$ síkok közé esik!

MO. Legyen K a henger alapkörlapja. Hengerkoordinátákkal: $V = \int\int_K \left(\int_0^{8-x-y} dz\right) dx\, dy =$
$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{8-r\cos\varphi - r\sin\varphi} r\, dz\, dr\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (8 - r\cos\varphi - r\sin\varphi) r\, dr\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (8r - r^2\cos\varphi - r^2\sin\varphi)\, dr\, d\varphi =$
$= \int_0^{2\pi} 4r^2 - \left(\frac{r^3}{3}\cos\varphi + \frac{r^3}{3}\sin\varphi\right)\Big|_0^2 d\varphi = 16\varphi - \frac{8}{3}(\sin\varphi - \cos\varphi)\Big|_0^{2\pi} = 32\pi + \frac{8}{3}(1-1) = 32\pi$, ami egyebként persze a 8 magas henger térfogata, mert ennek ugyanakkora darabja van a $z = 8$ sík felett, mint alatt.
(Az ábrát lásd a túloldalon.)

6. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1998 nyár I. évf. 13.-18.tk.

1. Konvergensek-e az következő numerikus sorok sorok? a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}$

MO. a) Igen, gyökkritériummal $\sqrt[n]{a_n}=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n}\longrightarrow\dfrac{1}{e}<1$. b) Nem ${a_n}^n=\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}\longrightarrow e\ \leadsto$ $\leadsto$ végülis ${a_n}^n>2\ \leadsto\ a_n>\sqrt[n]{2}>1\ \leadsto\ a_n\not\to 0$.

2. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ hatványsor konvergenciasugarát és mutassa meg, hogy nem egyenletesen konvergens az egész konvergenciaintervallumán!

MO. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$ minden valós x–re, tehát a sor mindenütt konvergens, azaz konvergenciasugara: $R=\infty$, de az $f_n(x)=\dfrac{x^n}{n!}$ jelöléssel $f_n(n)=\dfrac{n^n}{n!}\longrightarrow\infty\,(\not\to 0)$, tehát (f_n) és vele $\sum f_n x)$ nem egyenletesen konvergens az egész számegyenesen.

3. Legyen $\underline{\underline{A}}=\begin{pmatrix}1&2&2\\-1&-1&1\\-1&-4&\mathbf{a}\end{pmatrix}$. Mely **a** értékekre lesz az $\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{x}}=\underline{\underline{b}}$ egyenletnek minden háromelemű $\underline{\underline{b}}$ oszlopvektor esetén megoldása!

MO. Gauss elimináció után: $\underline{\underline{A}}\sim\begin{pmatrix}1&2&2\\0&3&3\\0&0&a+4\end{pmatrix}$, tehát $a\neq-4$.

4. Határozza meg azt a vektort, mely az $a=(1,2,3)\in\mathbf{R}^3$ vektornak a z tengely körüli $+90°$-al való elforgatásával keletkezik!

MO. $\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$, mert ez a mátrix a forgatás operátorának mátrixa és ez az oszlopvektor az adott vektor oszlopvektora (a szokásos bázisban).

5 Legyen $f(x,y)=\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ az origón kívül, $f(0,0)=0$. Határozzuk meg f parciális deriváltjait az origóban!

MO. $f(x,0)=x$ *minden* x–re $\leadsto$ $f_x(0,0)=f'(x,0)=1$, $f(0,y)=-y$ *minden* y–ra $\leadsto$ $\leadsto$ $f_y(0,0)=f'(0,y)=-1$.

6. Az integrálási sorrend megcserélésével számítsuk ki az $\displaystyle\int_0^1\int_y^1\frac{\sin x}{x}\,dx\,dy$ értékét!

MO. $\displaystyle\int_0^1\int_y^1\frac{\sin x}{x}\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^x\frac{\sin x}{x}\,dy\,dx=\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,y\Big|_0^x\,dx=\int_0^1\sin x\,dx=1-\cos 1$.

1. Vizsgazárthelyi
1999 nyár I.évf. 13.-18.tk.

1. Konvergensek-e az alábbi numerikus sorok ? a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin \frac{1}{n^3}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \cos \frac{1}{n^3}$

MO. a) Konvergens mert $n \cdot \sin \dfrac{1}{n^3} \sim \dfrac{1}{n^2}$.

b) Divergens mert $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \cos \frac{1}{n^3} = 1$ miatt $n \cdot \cos \dfrac{1}{n^3} \geq n \cdot \dfrac{1}{2}$ elegendően nagy n–ekre.

---

2. Határozza meg az $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ értékét 0.01–nél kisebb hibával!

MO. e^x Taylor–sorából: $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \dfrac{(-x^2)^2}{2!} + \dfrac{(-x^2)^3}{3!} \mp \dots$, tehát $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = 1 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} \pm \dots \Big|_0^1$, azaz $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2!\cdot 5} - \frac{1}{3!\cdot 7} \pm \dots$. Az első 4 tag összege: $\frac{26}{35} = 0.7428\dots$, és a sor Leibniz lévén a hiba az első elhagyott tag abszolút értéke, azaz $|H| \leq \frac{1}{4!\cdot 9} = \frac{1}{24\cdot 9} < \frac{1}{100}$.

---

3. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x - y - z + w &= 1 \\ x + 2y + z - w &= -2 \\ 3x + z + 2w &= 1 \end{aligned}$$

MO. Gauss–elimináció után az egyenletrendszer mátrixa: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$, tehát a megolások ($c$ tetszőleges valós): $x = \dfrac{1}{2} + c \cdot \dfrac{1}{2}$, $y = -1 - c$, $z = -\dfrac{1}{2} + c \cdot \dfrac{1}{2}$, $w = -c$.

4. Legyen $e = (i, j)$ a sík szokásos bázisa, $f = (i + j, i - j)$. Határozza meg a síkon az e–ről f–re való áttérés mátrixát és az $y = -x$ egyenesre való tükrözés mátrixát f–ben kétféleképpen: a) közvetlenül f–ben és b) az operátor e–beli mátrixából az áttérés mátrixa segítségével!

MO. Legyen a tükrözés operátora $\mathbf{A}$. $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\text{e}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\text{fe}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\text{ef}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\text{fe}}^{-1} = \dfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\text{f}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\text{ef}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\text{e}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}_{\text{fe}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{-(i+j)}}_{\text{f}} & \underline{\underline{(i-j)}}_{\text{f}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{A}(i+j)}}_{\text{f}} & \underline{\underline{\mathbf{A}(i-j)}}_{\text{f}} \end{pmatrix}$.

---

5. Határozza meg az $f(x, y) = x^3 + y^2 - 3xy$ függvény maximumát és minimumát az N négyzeten, melynek csúcsai a (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) pontok!

MO. $\operatorname{grad} f = (3x^2 - 3y, 2y - 3x) = (0, 0) \rightsquigarrow x^2 = y, y = \frac{3}{2}x \rightsquigarrow \frac{3}{2}x = x^2 \rightsquigarrow x = 0$ vagy $x = \frac{3}{2} \rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow x = 0, y = 0$, vagy $x = \frac{3}{2}, y = \frac{9}{4}$, tehát $\operatorname{grad} f = (0, 0)$ a $P_1 = (0, 0), P_2 = (\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$ pontokban, P_1 határpont, P_2 nincs N–ben. A határokon: $f_1(x) = f(x, 0) = x^3 \rightsquigarrow f_1'(x) = 0$ ha $x = 0$, ez sarok, $f_2(x) = f(x, 1) = = x^3 - 3x + 1 \rightsquigarrow f_2'(x) = 0$ ha $x = 1$, szintén sarok, $f_3(y) = f(0, y) = y^2 \rightsquigarrow f_3'(y) = 0$ ha $y = 0$, megint sarok és végül $f_4(y) = f(1, y) = y^2 - 3y + 1 \rightsquigarrow f_4'(y) = 0$ ha $y = 3/2$, ez nincs a négyzeten. Tehát megnézendőek még a sarkok: $f(0, 0) = 0, f(0, 1) = 1, f(1, 0) = 1, f(1, 1) = -1$. Következésképp: $\max_{(x,y)\in N} f = 1$, $\min_{(x,y)\in N} f = -1$.

6.. Legyen K az egységsugarú origóközéppontú kör x tengely feletti fele. $\displaystyle\iint_K x^2 y\,dx\,dy = ?$

MO. Polárkoordinátákkal: $\displaystyle\int_0^\pi \int_0^1 r^2\cos^2\varphi\, r\sin\varphi\, r\,dr\,d\varphi = \int_0^\pi \int_0^1 r^4\cos^2\varphi\,\sin\varphi\,dr\,d\varphi =$

$\displaystyle = \frac{r^5}{5}\Big|_0^1 \cdot \int_0^\pi \cos^2\varphi\,\sin\varphi\,d\varphi = -\frac{1}{5}\frac{\cos^3\varphi}{3}\Big|_0^\pi = \frac{2}{15}.$

---

2. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1999 nyár I. évf. 13.-18.tk.

1. Konvergensek–e az alábbi improprius integrálok?
a) $\displaystyle\int_1^\infty x \sin\frac{1}{x^2}\, dx$ b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\, dx$

MO. a) Divergens mert $x\sin\dfrac{1}{x^2} \sim \dfrac{1}{x}$. b) Konvergens mert $\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right| \le \dfrac{1}{x^2}$.

---

2. $\displaystyle\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}\right)^{(100)}\Bigg|_{x=0} = ?$

MO. A sor hatványsor, konvergenciaintervallumának belseje a $(-1,1)$ intervallum ($\overline{\lim}\sqrt[n]{n^2} = \overline{\lim}(\sqrt[n]{n})^2 = 1$). Ezért a sor saját f összegfüggvényének (0 körüli) Taylor–sora, azaz $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{1}{n^2} \rightsquigarrow f^{(n)}(0) = \dfrac{n!}{n^2}$ minden n–re $\rightsquigarrow f^{(100)}(0) = \dfrac{100!}{100^2} = \dfrac{100!}{10^4}$.

---

3. Legyen az $\mathbf{A}$ operátor az $y = x$ egyenesre való tükrözés a síkon. Határozza meg az $\mathbf{A}^{100}$ és az $\mathbf{A}^{101}$ operátorok sajátértékeit és sajátvektorait!

MO. $\mathbf{A}$ definíciójából $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$, tehát minden páros hatványa az identitás, minden páratlan hatványa önmaga, így $\mathbf{A}^{100} = \mathbf{I}$, $\mathbf{A}^{101} = \mathbf{A}$. Következésképp $\mathbf{A}^{100}$ sajátvektora minden vektor az 1 sajátértékkel és $\mathbf{A}^{101}$ sajátvektorai a tükrözéséi, azaz az $y = x$ egyenesbe eső vektorok: $c\cdot(i+j)$, $c \in \mathbf{R}$ az 1 sajátértékkel és az egyenesre merőleges vektorok: $c\cdot(i-j)$, $c \in \mathbf{R}$ a –1 sajátértékkel.

---

4. Oldja meg az $y' + 3x^2 y = x^2$ differenciálegyenletet!

MO. A homogén: $y' + 3x^2y = 0 \rightsquigarrow \displaystyle\int\frac{dy}{y} = -\int 3x^2\,dx \rightsquigarrow \ln|y| = -x^3 + c \rightsquigarrow y = ce^{-x^3}$, vagyis a homogén általános megoldása: $y_{h\acute{a}} = ce^{-x^3}$. Az inhomogén az állandók variálásával: $y = c(x)e^{-x^3} \rightsquigarrow c'e^{-x^3} - 3x^2ce^{-x^3} + 3x^2ce^{-x^3} = x^2 \rightsquigarrow c'e^{-x^3} = x^2 \rightsquigarrow c' = x^2e^{x^3} \rightsquigarrow c(x) = \displaystyle\int x^2e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}e^{x^3} \rightsquigarrow y = \frac{1}{3}e^{x^3}e^{-x^3} = \frac{1}{3}$. Így az inhomogén egy partikuláris megoldása: $y_{ip} = \dfrac{1}{3}$, amivel az inhomogén általános megoldása: $y_{i\acute{a}} = y_{h\acute{a}} + y_{ip} = \dfrac{1}{3} + ce^{-x^3}$.

---

5. Hol deriválható a következő f függvény? Az origón kívül $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ és $f(0,0) = 0$.

MO. Mindenütt az origó kivételével, mert itt deriválható függvényekből van a deriválást megtartó módon összerakva, míg az origóban nem, mert $f(x,0) = f(0,y) = 0$ miatt nyilván $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ és az $\dfrac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - (0,0)\cdot(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \dfrac{h^2k}{(h^2+k^2)^{3/2}}$ függvénynek nincs az origóban határértéke: a tengelyek mentén: $f(h,0) = f(0,k) = 0$, míg pl. a $h = k$ egyenes mentén: $f(h,h) = \dfrac{1}{2^{3/2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \neq 0$.

---

6. Legyen T az $y = \dfrac{x}{2}$, $y = 2x$, $y = \dfrac{1}{x}$ egyenletű görbék által határolt síkidom. $\displaystyle\iint_T x\,dy\,dx = ?$

MO. $\displaystyle\iint_T x\,dy\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{1}{4}x}^{4x} x\,dy\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2}\int_{\frac{1}{4}x}^{\frac{1}{x}} x\,dy\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{15}{4}x^2\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1 - \frac{1}{4}x^2\right)dx = \frac{5}{32} + \frac{27}{32} = 1$

---

3. Vizsgazárthelyi megoldásokkal
1999 nyár I.évf. 13.-18.tk.

1. Konvergensek-e az alábbi numerikus sorok ?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\, e^{-n}$

MO. a) Nem: $\dfrac{e^n}{n} \longrightarrow \infty$, b) Igen: $n^3\, e^{-n} \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0 \rightsquigarrow n\, e^{-n} \le \dfrac{1}{n^2}$ elég nagy n–ekre.

---

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(e^{x^2}\right)^{(100)} = ?$

MO. e^x Taylor–sorából: $e^{x^2} = 1 + x^2 + \dfrac{(x^2)^2}{2!} + \dfrac{(x^2)^3}{3!} + \ldots + \dfrac{(x^2)^{50}}{50!} + \ldots$, tehát az $f(x) = e^{x^2}$ jelöléssel az x^{100} együtthatója: $\dfrac{f^{(100)}(0)}{100!} = \dfrac{1}{50!} \rightsquigarrow f^{(100)}(0) = \dfrac{100\,!}{50\,!}$. Mivel f mindenütt akárhányszor deriválható, tehát minden deriváltja is mindenütt folytonos, adódik, hogy $\displaystyle\lim_{x\to 0} f^{(100)}(x) = f^{(100)}(0) = \frac{100\,!}{50\,!}$.

---

3. Legyen $e_1 = (1, 2, 0)$, $e_2 = (-1, -2, -1)$, $v = (0, 1, 2)$. Keressen egy olyan $e_3 \in \mathbf{R}^3$ vektort, melyre az $e = (e_1, e_2, e_3)$ vektorrendszer bázisa $\mathbf{R}^3$ -nak és adja meg ebben a bázisban a v oszlopvektorát !

MO. Az $\begin{pmatrix} 1 & -1 & a & 0 \\ 2 & -2 & b & 1 \\ 0 & -1 & c & 2 \end{pmatrix}$ mátrix Gauss-elimináció után: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a-c & -2 \\ 0 & 1 & -c & -2 \\ 0 & 0 & b-2a & 1 \end{pmatrix}$ tehát ha $b - 2a \ne 0$, például $a = c = 0$ és $b = 1$, akkor az utolsó oszlop lin. fgtlen, azaz az $e_3 = (0, 1, 0)$ vektor megfelelő és a v oszlopvektora az $e = (e_1, e_2, e_3)$ bázisban: $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

---

4. Legyen az $\mathbf{A}$ operátor a síkon az x tengelyre, a $\mathbf{B}$ pedig az y tengelyre való vetítés. Határozza meg a következő operátorok magterét: $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{A}-\mathbf{B}$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$.

MO. Definíciójukból $\mathbf{A} = \mathbf{A}^2$ és $\mathrm{Ker}\,\mathbf{A}$ a j tengely. Nyilván $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{I}$ az identitás, tehát $\mathrm{Ker}\ \mathbf{A}+\mathbf{B} = \{0\}$ csak a 0–ból áll, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{0}$ a zérusoperátor, melynek magtere az egész sík. Végül, mivel az operátorok szokásos bázisbeli mátrixai: $\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ezekből

$\underline{\underline{\mathbf{A}-\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} - \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ami reguláris, tehát magtere megintcsak csupán a 0–ból áll.

---

5. Állapítsa meg, hogy létezik–e, és ha igen, akkor mennyi a $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y}{y-x}$.

MO. Nem létezik. Legyen $f(x, y) = \dfrac{x\,y}{y-x}$. Az x tengely mentén: $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x, 0) = 0$, míg az $y = x + x^2$ görbe mentén: $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x, x + x^2) = \frac{x\,(x + x^2)}{x^2} = \frac{x^2 + x^3}{x^2} = 1 + x \xrightarrow[x\longrightarrow 0]{} 1 \ne 0$.

---

6. Számítsa ki annak a véges síktartománynak a területét, melyet az $y = 1 - x^2$ és az $y = 1 - x^3$ görbék határolnak !

MO. $T = \displaystyle\int_0^1 \int_{1-x^2}^{1-x^3} dy\, dx = \int_0^1 \left(1 - x^3 - (1 - x^3)\right) dy\, dx = \int_0^1 (x^2 - x^3)\, dy\, dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{12}$.

---

1. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

2000 nyár I. évf. 13.-18.tk.

1. Konvergensek-e az alábbi numerikus sorok? Válaszát indokolja! a) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{1}{n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{arctg}\frac{1}{n})^2$

MO. a) $\sim \frac{1}{n} \rightsquigarrow$ divergens. b) $\sim \frac{1}{n^2} \rightsquigarrow$ konvergens,

---

2. Határozza meg az $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ függvénysorozatsorozat T konvergenciatartományát és mutassa meg, hogy (f_n) az egész T–n egyenletesen konvergens!

MO. $T = [-1, 1]$ hisz $|f_n(x)| = \left|\frac{x^n}{n}\right| \le \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ ha $|x| \le 1$ és $|f_n(x)| = \left|\frac{x^n}{n}\right| \longrightarrow \infty$ ha $|x| > 1$ mert ekkor $n \lhd x^n$. Másrészt, $|x| \le 1 \rightsquigarrow |r_n(x)| = |f_n(x)| = \left|\frac{x^n}{n}\right| \le \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ ha $|x| \le 1$.

---

3. Legyen $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Adja meg az $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{0}$ egyenlet összes megoldását!

MO. Gauss–eliminációval $\underline{\underline{A}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underline{x} = c_1 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(c_1,\ c_2 \in \mathbb{R})$

---

4. Oldja meg az $y' + 3x^2\,y = x^2$ differenciálegyenletet!

MO. A homogén: $y' + 3x^2 y = 0 \rightsquigarrow \int \frac{dy}{y} = -\int 3x^2\,dx \rightsquigarrow \ln|y| = -x^3 + c \rightsquigarrow y = ce^{-x^3}$, vagyis a homogén általános megoldása: $y_{há} = ce^{-x^3}$. Az inhomogén az állandók variálásával: $y = c(x)e^{-x^3} \rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow c'e^{-x^3} - 3x^2ce^{-x^3} + 3x^2ce^{-x^3} = x^2 \rightsquigarrow c'e^{-x^3} = x^2 \rightsquigarrow c' = x^2e^{x^3} \rightsquigarrow c = \int x^2e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}e^{x^3} \rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow y = \frac{1}{3}e^{x^3}e^{-x^3} = \frac{1}{3}$. Így az inhomogén egy partikuláris megoldása: $y_{ip} = \frac{1}{3}$, amivel az inhomogén általános megoldása: $y_{iá} = y_{há} + y_{ip} = \frac{1}{3} + ce^{-x^3}$.

---

5. Határozza meg az $f(x, y) = x^2 + y^3 - 6xy$ függvény lokális szélsőértékhelyeit !

MO. $\operatorname{grad} f(x, y) = (2x - 6y, 3y^2 - 6x) = (0, 0) \rightsquigarrow x = 3y$ és $y = 0$ vagy $y = 6 \rightsquigarrow P_1 = (0, 0),\ P_2 = (18, 6)$.
A második parciálisok mártixa: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 6y \end{pmatrix}$, ennek determinánsa a $P_1 = (0, 0)$–ban $-36 < 0$, így itt nincs szélsőértéke, míg a $P_2 = (18, 6)$–ban $36 > 0$, így itt van szélsőértéke és ez minimum, mert itt $f_{xx} = 2 > 0$.

---

6. Határozza meg az $\int_0^1 \int_x^{2-x} xy\,dy\,dx$ integrál értét az adott és a fordított integrálási sorrend esetén is!

MO. $T \doteq \{(x, y) : x \le y \le 2 - x,\ x \ge 0\}$:

$$\iint_T xy\,dx\,dy = \int_0^1 \int_x^{2-x} xy\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^y xy\,dx\,dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} xy\,dx\,dy.$$

1) $\int_0^1 \int_x^{2-x} xy\,dy\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x \cdot y^2\Big|_x^{2-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x\left((2-x)^2 - x^2\right)\,dx = \int_0^1 2x - 2x^2\,dx = x^2 - 2\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$.

2) a) $\int_0^1 \int_0^y xy\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y \cdot x^2\Big|_0^y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 y^3 dy = \frac{1}{8}$

b) $\int_1^2 \int_0^{2-y} xy\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_1^2 y \cdot x^2\Big|_0^{2-y}\,dy = \frac{1}{2}\int_1^2 y(2-y)^2\,dy = \frac{1}{2}\int_1^2 4y - 4y^2 + y^3\,dy =$

$= \frac{1}{2}\left(2y^2 - \frac{4}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\left(8 - \frac{32}{3} + 4 - (2 - \frac{4}{3} + \frac{1}{4})\right) = \frac{1}{2}\left(10 - (10 + \frac{2}{3}) + \frac{4}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{5}{24}$

És valóban: $\frac{1}{8} + \frac{5}{24} = \frac{1}{3}$.

2. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

2000 nyár I. évf. 13.-18.tk.

1. Konvergensek-e az alábbi improprius integrálok ? a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$

MO. Nem: $\displaystyle\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \begin{cases} \sim_{x=0} & \frac{1}{x} \\ \sim_{x=\infty} & \frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases} \qquad \left(\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^3}} \sim_{x=\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} \right)$

---

2. Határozza meg az $f_n(x) = n\,x^n$ függvénysorozatsorozat T konvergenciatartományát, mutassa meg, hogy az egész T–n (f_n) nem egyenletesen konvergens és adja meg T azon részhalmazait, melyeken egyenletesen konvergens!

MO. $T=(-1,1)$ hisz $n\,x^n \longrightarrow 0$ ha $|x|<1$ és $n\,x^n \longrightarrow \infty$ ha $|x|\geq 1$ ($|x|\geq 1$−re triviális, $|x|<1$−re pl. Serény Lemmával: $\displaystyle\left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n}\right| = \frac{n+1}{n}|x| \longrightarrow |x|<1$ vagy L'Hospital–al és átviteli elvvel.) Továbbá: ha $x_n \mathrel{\hat{=}} 1-\dfrac{1}{n}$, akkor $r_n(x_n) = f_n(x_n) = n(1-\dfrac{1}{n})^n \not\longrightarrow 0$ $\quad ((1-\dfrac{1}{n})^n \longrightarrow 1/e))$, azaz az egész $T-$n nem egyenletesen konvergens. Végül, $|r_n(x)| = |n\,x^n| \leq |n\,\delta^n| \longrightarrow 0$ ha $x\in T_\delta = [-\delta,\delta]$ bármely $0\leq\delta<1-$ra. Ezeken a $T_\delta-$kon tehát egyenletesen konvergens.

---

3. Legyen $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ és legyen $\mathbf{A}$ a négyelemű oszlopvektorok lineáris terén definiált lineáris transzformáció a következő: $\mathbf{A}\,\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{x}}$. Adja meg az $\mathbf{A}$ magterét!

MO. Gauss–eliminációval $\underline{\underline{A}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underline{\underline{x}} = c_1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c_1\,,\ c_2\in\mathbb{R})$

---

4. Oldja meg az $y''+4\,y'+4\,y=\sin x$ differenciálegyenletet!

MO. 1) A karakterisztikus polinomnak egyetlen kettős gyöke a $\lambda=-2$, igy a homogén egyenlet általános megoldása: $y_{há} = c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}$. 2) Az inhomogén egy partikuláris megoldását $y=A\sin x+B\cos x$ alakban keressük (az általános $x^m e^{ax}(p(x)\sin bx + q(x)\cos bx)$ alakban $a=0$, $b=1$, $p(x)=1$, $q(x)=0$, így, mivel az $a+bj=j$ nem gyöke a karakterisztikus polinomnak, $m=0$, azaz $x^m e^{ax}(P(x)\sin bx + +Q(x)\cos bx) = A\sin x + B\cos x)$. Ezzel tehát $y=A\sin x+B\cos x$, $y'=A\cos x - B\sin x$, $y'' = -A\sin x - B\cos x$, amit az erdeti egyenletbe visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy $(-A-4B+4A-1)\sin x + (-B+4A+4B)\cos x = 0$. Ebből $A=\frac{3}{25}$, $B=-\frac{4}{25}$ tehát az inhomogén egy partikuláris megoldása $y_{ip}=\frac{3}{25}\sin x - \frac{4}{25}\cos x$, amivel az inhomogén általános megoldása: $y_{iá} = y_{há}+y_{ip} = c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}+\dfrac{3}{25}\sin x - \dfrac{4}{25}\cos x$.

---

5. Határozza meg az $f(x,y)=2x^2+y^2+x$ függvény szélsőértékhelyeit a $T=\{(x,y)\ :\ x^2+y^2\leq 1\}$ körlapon!

MO. 1) A tartomány belsejében: $\operatorname{grad} f(x,y) = (4x+1, 2y) = (0,0) \rightsquigarrow x=-1/4$ és $y=0 \rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow P_1=(-1/4,0)$, $f(P_1)=-1/8$. 2) A tartomány határán: $g(x) = f(x,y)_{x^2+y^2=1} = x^2+x+1$ $(-1\leq x\leq 1)$. $g'(x)=2x+1$ az $x=-1/2$ helyen vált előjelet, $P_{2,3}=(-1/2,\pm\sqrt{3}/2)$, $f(P_{2,3})=3/4$. Végül a határ határa: $P_4=(-1,0)$, $P_5=(1,0)$, ahol $f(P_4)=1$, $f(P_5)=3$. Tehát a függvény $T-$beli minimumát P_1-ben, $T-$beli maximumát P_5-ben veszi fel.

---

6. Legyen $T=\{(x,y)\ :\ 0\leq x\leq 1\,,\ 0\leq y\leq\sqrt{x}\}$. $\displaystyle\iint_T y\sqrt{1+x^2}\,dx\,dy = ?$

MO. $\displaystyle\iint_T y\sqrt{1+x^2}\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^{\sqrt{x}} y\sqrt{1+x^2}\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{y^2}{2}\sqrt{1+x^2}\bigg|_{y=0}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}\,dx =$

$\displaystyle = \frac{1}{4}\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\,(1+x^2)^{3/2}\bigg|_0^1 = \frac{1}{6}(2^{3/2}-1) = \frac{1}{6}(\sqrt{8}-1)$

3. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

2000 nyár I. évf. 13.-18.tk.

1. Konvergensek-e az alábbi numerikus sorok? a) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n^2}$

MO.
a) $\ln \frac{n+1}{n} = \ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n} \rightsquigarrow$ divergens. b) $\frac{n+1}{n^2} \longrightarrow 0 \rightsquigarrow \ln \frac{n+1}{n^2} \longrightarrow -\infty \neq 0 \rightsquigarrow$ divergens.

---

2. Határozza meg az $f_n(x) = \frac{x^n}{n^n}$ függvénysorozatsorozat T konvergenciatartományát, mutassa meg, hogy az egész T–n (f_n) nem egyenletesen konvergens és adja meg T azon részhalmazait, melyeken egyenletesen konvergens!

MO. $T = \mathbb{R}$ hisz az $f_n(x) \longrightarrow 0$ minden valós $x-$re ($x^n \lhd n^n$ pl. Serény Lemmával: $\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{x^n}{n^n}} =$
$= \frac{x^{n+1}}{x^n} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = x \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} = x \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \cdot \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 < 1$ minden $x-$re).
Továbbá, $x_n \overset{\circ}{=} n \rightsquigarrow f_n(x_n) = r_n(x_n) = \frac{n^n}{n^n} \longrightarrow 1$ ($\not\longrightarrow 0$). Végül persze $|r_n(x)| = |f_n(x)| = |\frac{x^n}{n^n}| =$
$= \frac{|x|^n}{n^n} \le \frac{K^n}{n^n} = \left(\frac{K}{n}\right)^n \longrightarrow 0$ ha $x \in T_K = [-K, K]$ bármely $K-$ra. Ezeken a T_K-kon tehát egyenletesen konvergens.

---

3. Legyen $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Adja meg az $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ egyenlet összes megoldását $\underline{b} = \underline{b}_1$ ill. $\underline{b} = \underline{b}_2$ esetén.

MO. Gauss–eliminációval $(\underline{\underline{A}}, \underline{b}_1, \underline{b}_2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underline{b} = \underline{b}_1$ esetén nincs megoldás, $\underline{b} = \underline{b}_2$ esetén a megoldások $\underline{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(c_1, \ c_2 \in \mathbb{R})$

---

4. Határozza meg $\mathbf{R}^3$–on a z tengely körüli $-30°$–os forgatás szokásos bázisbeli mátrixának 1191–edik hatványát!
MO. Legyen a $-30°$–os forgatás operátora F, és az identitás I. $F^{12} = I \rightsquigarrow F^{1191} = F^{1200-9} =$
$= (F^{12})^{99} \cdot F^3 = I^{99} \cdot F^3 = I \cdot F^3 = F^3$, ami a $-90°$–os forgatás operátora, tehát $\underline{\underline{P}}_s{}^{1999} = \underline{\underline{P^{1999}}}_s =$
$= \underline{\underline{F^3}}_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, hiszen $F^3 i = -j$, $Nj = i$, $Nk = k$ (ahol $s = (i, j, k)$ a szokásos bázis).

---

5. Határozza meg az $f(x, y) = x\,y$ és a $g(x, y) = x^2\,y^2$ függvények lokális szélsőértékhelyeit !
MO. $\operatorname{grad} f(x, y) = (y, x)$, $\operatorname{grad} g(x, y) = (2xy^2, 2yx^2) \rightsquigarrow$ a) $f-$nek csak az origóban lehet lokális szélsőértékhelye, de itt nincs mert $f(0, 0) = 0$ és az origó bármely környezetében felvesz mind pozitív mind negatív értékeket b) $g-$nek a tengelyek mentén lehet és van is lokális minimuma, mert $g(x, 0) =$ $= g(0, y) = 0$ és $g(x, y) \ge 0$ minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2-$re.

---

6. Legyen $T = \{(x, y) \,:\, 0 \le y \le 1\,,\ y^2 \le x \le 1\}$. $\displaystyle\iint_T \frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\,dx\,dy = ?$

MO. $$\iint_T \frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{y}{\sqrt{1+x^2}}\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{y^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Big|_{y=0}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$
$$= \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} (1+x^2)^{1/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$$

4. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

2000 nyár I. évf. 13.-18.tk.

1. Konvergensek-e az alábbi numerikus sorok? a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{n}$

MO. a) konvergens mert $|\frac{1}{n} e^{-n}| \leq e^{-n}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ konvergens geometriai sor hiszen kvóciense: $0 < 1/e < 1$.
b) divergens: $\frac{1}{n^2} e^n \longrightarrow \infty\, (\not\longrightarrow\ 0)$ mert $n^2 \lhd e^n$ (pl. L'Hospital–lal $\left(\frac{e^x}{x^2} \sim \frac{e^x}{2x} \sim e^x \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty\right)$ és átviteli elvvel).

---

2. Határozza meg az $f_n(x) = \frac{n}{x^n}$ függvénysorozat T konvergenciatartományát, mutassa meg, hogy az egész T–n (f_n) nem egyenletesen konvergens és adja meg T azon részhalmazait, melyeken egyenletesen konvergens!

MO. $T = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ hisz $\frac{n}{x^n} \longrightarrow 0$ ha $|x| > 1$ és $\frac{n}{x^n} \longrightarrow \infty$ ha $|x| \leq 1$ $\Big(|x| \leq 1$–re triviális, $|x|>1$–re pl. Serény Lemmával: $\left|\frac{\frac{n+1}{x^{n+1}}}{\frac{n}{x^n}}\right| = \left|\frac{n+1}{n}\,\frac{1}{x}\right| \longrightarrow \left|\frac{1}{x}\right| < 1$ vagy L'Hospital–al és átviteli elvvel$\Big)$.
Továbbá: ha $x_n \stackrel{\circ}{=} 1 + \frac{1}{n}$, akkor $r_n(x_n) = f_n(x_n) = \frac{n}{(1+\frac{1}{n})^n} \longrightarrow \infty\ (\not\longrightarrow\ 0)$ $\quad ((1+\frac{1}{n})^n \longrightarrow e))$,
azaz az egész T–n nem egyenletesen konvergens. Végül, $|r_n(x)| = |\frac{n}{x^n}| \leq \frac{n}{q^n} \longrightarrow 0$ ha $x \geq q > 1$, azaz $x \in T_q = \mathbb{R} \setminus (-q, q)$ bármely $q > 1$–re. Ezeken a T_q–kon tehát egyenletesen konvergens.

---

3. Legyen L lineáris tér egy bázisa: $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Adja meg az $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(L \to L)$ lineáris transzformáció magterének egy báxisát, ha $\mathbf{A}e_1 = e_1 - e_2 - e_3$, $\mathbf{A}e_2 = 2e_1 - e_2 - 2e_3$, $\mathbf{A}e_3 = 2e_1 + e_2 - 2e_3$, $\mathbf{A}e_4 = e_1 + e_2 - e_3$.

MO. $\underline{\underline{A}}_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Megoldandó az $\underline{\underline{A}}_e\,\underline{\underline{x}}_e = \underline{\underline{0}}$ homogén egyenlet. Gauss–eliminációval $\underline{\underline{A}}_e \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ Ker$\mathbf{A}$ egy bázisa: $\big(-4\,e_1 + 3\,e_2 - e_3,\ -3\,e_1 + 2\,e_2 - e_4\big)$.

---

4. Oldja meg az $y'' - 4\,y' + 4\,y = \cos x$ differenciálegyenletet!

MO. 1) A karakterisztikus polinomnak egyetlen kettős gyöke a $\lambda = 2$, igy a homogén egyenlet általános megoldása: $y_{há} = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$. 2) Az inhomogén egy partikuláris megoldását $y = A \sin x + B \cos x$ alakban keressük (az általános $x^m e^{ax}(p(x) \sin bx + q(x) \cos bx)$ alakban $a = 0$, $b = 1$, $p(x) = 0$, $q(x) = 1$, így, mivel az $a + bj = j$ nem gyöke a karakterisztikus polinomnak, $m = 0$, azaz $x^m e^{ax}(P(x) \sin bx + Q(x) \cos bx) = A \sin x + B \cos x)$. Ezzel tehát $y = A \sin x + B \cos x$, $y' = A \cos x - B \sin x$, $y'' = -A \sin x - B \cos x$, amit az erdeti egyenletbe visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy $(-A + 4B + 4A) \sin x + (-B - 4A + 4B - 1) \cos x = 0$. Ebből $A = -\frac{4}{25}$, $B = \frac{3}{25}$, tehát az inhomogén egy partikuláris megoldása $y_{ip} = -\frac{4}{25} \sin x + \frac{3}{25} \cos x$, amivel az inhomogén általános megoldása: $y_{iá} = y_{há} + y_{ip} = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} - \frac{4}{25} \sin x + \frac{3}{25} \cos x$.

---

5. Határozza meg az alábbi függvények origóbeli határértékét, ha létezik! Az origón kívül $f(x, y) = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ és $g(x, y) = \frac{x\,y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ valamint $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$.

MO. 1) Nem létezik: már az $y = 0$ mentén sincs határértéke az origóban, hisz $f(x, 0) = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|} = \text{sign}\,(x)$.

2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = 0$ mert $|g(x, y)| \leq \frac{x\,y}{\sqrt{x^2}} = y\,\frac{x}{|x|} \leq y \xrightarrow[y\to 0]{} 0$

---

6. Legyen Legyen $T = \{(x,y) \,:\, 0 \leq y \leq 1\,,\ y \leq x \leq 1\}\,.$ $\displaystyle\iint_T y^2\sqrt{1+x^4}\,dx\,dy = \,?$

MO. $$\iint_T y^2\sqrt{1+x^4}\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^x y^2\sqrt{1+x^4}\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{y^3}{3}\sqrt{1+x^4}\,\bigg|_{y=0}^{x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^3}{3}\sqrt{1+x^4}\,dx =$$
$$= \frac{1}{12}\int_0^1 4x^3\sqrt{1+x^4}\,dx = \frac{1}{12}\cdot\frac{2}{3}\,(1+x^4)^{3/2}\bigg|_0^1 = \frac{1}{18}(2^{3/2}-1) = \frac{1}{18}(\sqrt{8}-1)$$

1. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

2001 nyár I. évf. 13.-18.tk.

1. Konvergensek-e az alábbi impropius integrálok? a) $\displaystyle\int_0^\infty \sin^3 x\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sin^3 x}\,dx$ c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}\,dx$

MO. a) nem: $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx = \int \sin x\cdot\sin^2 x\,dx = \int \sin x\cdot(1-\cos^2 x)\,dx = \int \sin x\,dx - \int \sin x\cdot\cos^2 x\,dx =$

$\displaystyle= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} \rightsquigarrow f(t) \doteq \int_0^t \sin^3 x\,dx = -\cos t + \frac{\cos^3 t}{3} + \tfrac{2}{3}$, aminek nincs határértéke a végtelenben.

(Valóban, átviteli elvvel és pl. $x_n \doteq 2\,n\,\pi,\ y_n \doteq (2\,n+1)\,\pi$ −el $f(x_n) \longrightarrow 0,\ f(y_n) \longrightarrow \tfrac{4}{3}$.)

b) nem: $\displaystyle\frac{1}{\sin^3 x} \sim_{x=0} \frac{1}{x^3}$ és $\exists \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}$ iff $p<1$. c) igen $\displaystyle\left|\frac{\sin^3 x}{x^3}\right| \le \frac{1}{x^3}$ és $\exists \displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^p}$ iff $p>1$.

---

2. a) $\displaystyle\left.\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)^{(100)}\right|_{x=0} = ?$ b) $\displaystyle\left.\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}\right)^{(100)}\right|_{x=0} = ?$

MO. a) 1, mert a sor mindenütt, így az origóban is az e^x −et állítja elő, aminek minden deriváltja, így a 100. is önmaga, tehát az origóban $e^0 = 1$. b) e^x Taylor–sorából ez a sor mindenütt az e^{x^2} −et állítja elő, így mindenütt konvergens hatványsor, tehát határfüggvényének, $f(x) = e^{x^2}$ −nek Taylor–sora:

$$\frac{f^{(100)}(0)}{100!}x^{100} = \frac{(x^2)^{50}}{50!} = \frac{x^{100}}{50!} \rightsquigarrow f^{(100)}(0) = \frac{100!}{50!}.$$

---

3. Legyen $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & \mathbf{c} \end{pmatrix}$. Határozza meg azt a $\mathbf{c}$ valós számot, melyre az $\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{x}} = \underline{0}$ egyenletnek több megoldása van és adja meg összes megoldást!

MO. Gauss–eliminációval $\underline{\underline{A}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{c} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{c} = 0$. Gauss–eliminációval ekkor $\underline{\underline{A}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \underline{\underline{x}} = c\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \quad c\in\mathbb{R} \rightsquigarrow \underline{\underline{x}} = c\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad c\in\mathbb{R}.$

---

4. Legyen $\mathbf{A}$ a síkon az $x=-y$ egyenesre való tükrözés operátora. Adja meg az $\mathbf{A}^{-1}$, $\mathbf{A}^{100}$ és az $\mathbf{A}^{101}$ operátorok mátrixát a sík szokásos bázisában!

MO. Legyen $e \doteq (i,j)$ a sík szokásos bázisa. $\mathbf{A}\,i = -j$, $\mathbf{A}j = -i \rightsquigarrow \underline{\underline{\mathbf{A}i}}_e = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{\mathbf{A}j}}_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \underline{\underline{\mathbf{A}}}_e = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}$ tükrözés így $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{2n+1} = \mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^{2n} = \mathbf{I}$ (az identitás) $\rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \underline{\underline{\mathbf{A}^{-1}}}_e = \underline{\underline{\mathbf{A}^{2n+1}}}_e = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ és $\underline{\underline{\mathbf{A}^{2n}}}_e = \underline{\underline{\mathbf{I}}}_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

---

5. Deriválható–e az $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ függvény az origóban?

MO.

Nem: $f(x,0) = \sqrt[3]{x^3} = x \rightsquigarrow f_x(x,0) = 1$, $f(0,y) = \sqrt[3]{y^3} = y \rightsquigarrow f_y(0,y) = 1$ minden x,y−ra

$\displaystyle\rightsquigarrow f_x(0,0) = f_y(0,0) = 1 \rightsquigarrow h(x,y) \doteq \frac{f(0+x,0+y) - f(0,0) - (1,1)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^3+y^3} - 0 - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

és persze ennek nem létezik határértéke az origóban, mert

$$h(x,0) = \frac{\sqrt[3]{x^3} - x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x-x}{\sqrt{x^2}} = 0,\quad x>0 \text{ és } h(x,x) = \frac{\sqrt[3]{2x^3} - 2x}{\sqrt{2x^2}} = \frac{\sqrt[3]{2} - 2}{\sqrt{2}} \ne 0$$

---

6. Legyen T az a háromszöglap a síkban, melynek csúcsai az origó, az $(1,1)$ és a $(0,2)$ pontok. $\displaystyle\int_T x^2\,y\,dx\,dy = ?$

MO.

$$\int\!\!\int_T x^2 y\,dx\,dy = \int_0^1\int_x^{2-x} x^2 y\,dy\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\left((2-x)^2 - x^2\right)dx = \int_0^1 2x^2 - 2x^3\,dx = \left.2\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

2. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

2001 nyár I. évf. 13.-18.tk.

1. Konvergens–e ill. abszolút konvergens–e a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{\cos\frac{10}{n}}{n}$.

MO. (a) Nem abszolút konvergens, mert $\dfrac{\cos\frac{10}{n}}{n} \sim \dfrac{1}{n}$ (b) Konvergens, mert 'végül' Leibniz: **(1)** (a)–val $|a_n| \longrightarrow 0$ **(2)** $n > 10$–re alternáló, hiszen ekkor $\cos\dfrac{10}{n} > 0$ **(3)** $n > 20$–ra monoton csökkenő, mert $\left(\dfrac{\cos\frac{10}{x}}{x}\right)' = 10\dfrac{\sin\frac{10}{x}}{x^3} - \dfrac{\cos\frac{10}{x}}{x^2} < 0$ ha $x > 20$ mert ekkor $\dfrac{10}{x^3} < \dfrac{0,5}{x^2} \rightsquigarrow 0 < 10\dfrac{\sin\frac{10}{x}}{x^3} < \dfrac{10}{x^3} < \dfrac{0,5}{x^2} < \dfrac{\cos\frac{10}{x}}{x^2}$.

---

2. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n$ összegfüggvényét!

MO. A sor hatványsor, konvergenciaintervalluma az $I = (-1,1)$ intervallum ($\overline{\lim}\sqrt[n]{n} = 1$ és a határokon nyilván már divergens). Tehát határfüggvénye az I–n van értelmezve. Minthogy a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ ugyanitt konvergens és persze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ továbbá hatványsor konvergenciaintervallumának belsejében deriválható, továbbá a deriválás és a határátmenet felcserélhető, ezért I minden pontjában

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n\,x\cdot x^{n-1} = x\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1} = x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)' = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

---

3. Legyen az **A** operátor az $y = x$ egyenesre való vetítés a síkon. Határozza meg az $\mathbf{A}^{100}$ operátor sajátértékeit és sajátvektorait!

MO. **A** definíciójából $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, tehát minden hatványa önmaga, így $\mathbf{A}^{100} = \mathbf{A}$. Következésképp $\mathbf{A}^{100}$ sajátvektora minden az egyenesbe eső vektor (az összes ilyen alakú vektor: $c\cdot(i+j),\ c \in \mathbf{R}$) az 1 sajátértékkel és az egyenesre merőleges vektorok (az összes ilyen alakú vektor: $c\cdot(i-j),\ c \in \mathbf{R}$) a 0 sajátértékkel.

---

4. Oldja meg az $y' + 2\,y = 4\,x$ differenciálegyenletet!

MO. A homogén: $y' + 2\,y = 0 \rightsquigarrow \displaystyle\int\frac{dy}{y} = -\int 2\,dx \rightsquigarrow \ln|y| = -2\,x + c \rightsquigarrow y = ce^{-2x}$, vagyis a homogén általános megoldása: $y_{h\acute{a}} = ce^{-2x}$. Az inhomogén az állandók variálásával: $y = c(x)e^{-2x} \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow c'e^{-2x} - 2ce^{-2x} + 2ce^{-2x} = 4x \rightsquigarrow c'e^{-2x} = 4x \rightsquigarrow c' = 4x\,e^{2x} \rightsquigarrow c(x) = 4\displaystyle\int xe^{2x}\,dx =$
$= 2xe^{2x} - 2\displaystyle\int e^{2x}\,dx = 2xe^{2x} - e^{2x} \rightsquigarrow y = (2xe^{2x} - e^{2x})e^{-2x} = 2x - 1$. Így az inhomogén egy partikuláris megoldása: $y_{ip} = 2x - 1$, amivel az inhomogén általános megoldása: $y_{i\acute{a}} = y_{h\acute{a}} + y_{ip} = 2x - 1 + ce^{-2x}$.

---

5. Hol deriválható a következő f függvény? Az origón kívül $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^2+y^2}$ és $f(0,0) = 0$.

MO. Mindenütt, az origón kívül deriválható függvényekből van a deriválást megtartó módon összerakva, míg az origóban: $f(x,0) = f(0,y) = 0$ miatt nyilván $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ és

$$\left|\frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - (0,0)\cdot(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| = \left|\frac{h^3k}{(h^2+k^2)^{3/2}}\right| \le \left|\frac{h^3k}{(h^2)^{3/2}}\right| = \frac{h^3k}{h^3} = k \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

---

6. Legyen T az $y = x,\quad y = 4x\,,\ y = \dfrac{1}{x}$ egyenletű görbék által határolt síkidom. $\displaystyle\iint_T y\,dy\,dx = ?$

MO. $\displaystyle\iint_T y\,dy\,dx = \int_0^{\frac12}\int_x^{4x} y\,dy\,dx + \int_{\frac12}^{1}\int_x^{\frac1x} y\,dy\,dx = \frac12\int_0^{\frac12}(16x^2 - x^2)\,dx + \frac12\int_{\frac12}^{1}\left(\frac{1}{x^2} - x^2\right)dx =$

$$= \frac12\,\frac{15x^3}{3}\bigg|_0^{\frac12} - \frac12\left(\frac1x + \frac{x^3}{3}\right)\bigg|_{\frac12}^{1} = \frac{5}{16} - \frac12\left(\left(1+\frac13\right) - \left(2 + \frac{1}{8\cdot 3}\right)\right) = \frac{5}{16} - \frac12\left(\frac43 - \frac{49}{24}\right) =$$

$$= \frac{5}{16} - \frac12\left(-\frac{17}{24}\right) = \frac{15}{48} + \frac{17}{48} = \frac{32}{48} = \frac23$$