Serény György

PREDIKÁTUM LOGIKA

Vázlat

1. A tárgyalási univerzum

1.1 Elsőrendű nyelv

$\mathcal{L} = \langle \mathsf{r}\,, \mathsf{f}\,, \mathsf{c}\,, \varrho \rangle$ *elsőrendű nyelv*, ahol $\mathsf{r} = \langle\, r_i : i \in I\,\rangle$ a *reláció*, $\mathsf{f} = \langle\, f_j : j \in J \rangle$ a *függvény*, $\mathsf{c} = \langle\, c_k : k \in K\,\rangle$ a *konstans szimbólumok (jelek)*, (együttesen *nem logikai szimbólumok*) és $\varrho : I \cup J \longrightarrow \omega \setminus 1$ az *argumentum*ok számát megadó függvény.
$\mathcal{L}$ az $\mathcal{L}' = \langle \mathsf{r}'\,, \mathsf{f}'\,, \mathsf{c}'\,, \varrho' \rangle$ *bővítése* és $\mathcal{L}'$ az $\mathcal{L}$ *reduktuma* ha $\mathsf{r}' \subseteq \mathsf{r}, \mathsf{f}' \subseteq \mathsf{f}, \mathsf{c}' \subseteq \mathsf{c}, \varrho' \subseteq \varrho$.
$\mathcal{L}$ *számossága*: $||\mathcal{L}|| \mathrel{\mathring{=}} |\mathsf{r}| \cup |\mathsf{f}| \cup |\mathsf{c}| \cup \omega$
A *változójelek* sorozata: $\mathsf{v} = \langle\, v_k : k \in \omega\,\rangle$ és $V \mathrel{\mathring{=}} \mathrm{Rg}\,\mathsf{v}$
$(\,\omega \mathrel{\mathring{=}} \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ a természetes számok halmaza$\,)$

Megjegyzés
Ha $\mathcal{L}$ elemei szokásos, gyakran használt relációk, műveletek és/vagy konstansok, előfordul, hogy nem adjuk meg a ϱ függvényt, például $\mathcal{L} = \langle <, + \rangle$.

1.2 Termek

(i) Minden változó és konstans szimbólum term
(ii) Ha $j \in J$ és $t_1\,, t_2, \dots\,, t_{\varrho(j)}$ termek, akkor $(f_j, t_1\,, t_2, \dots\,, t_{\varrho(j)})$ term
(iii) Szimbólumok egy véges sorozata csak akkor term, ha (i) ill. (ii) véges sok alkalmazásával áll elő.

Jelölés
$\mathcal{T}m \mathrel{\mathring{=}} \mathcal{T}m_{\mathcal{L}}$ az összes termek halmaza, $f_j(t_1\,, t_2, \dots\,, t_{\varrho(j)}) \mathrel{\mathring{=}} (f_j, t_1\,, t_2, \dots\,, t_{\varrho(j)})$

Definíció
$\mathfrak{T}m \mathrel{\mathring{=}} \big\langle\, \mathcal{T}m, \langle\, f_j : j \in J\,\rangle\,\big\rangle$ a *termalgebra*

Megjegyzés
$\mathcal{T}m$ a legszűkebb a változó– és konstansjeleket és minden $j \in J$ esetén minden $t_1, t_2, \dots t_{\varrho(j)}$ elemével együtt $f_j(t_1, t_2, \dots t_{\varrho(j)})$–t tartalmazó halmaz:
$\mathcal{T}m = \bigcap \{\, H : \mathrm{Rg}\,\mathsf{c} \cup \mathrm{Rg}\,\mathsf{v} \subseteq H, (\forall j \in J)(\forall t_1, t_2, \dots t_{\varrho(j)} \in H)(f_j(t_1, t_2, \dots t_{\varrho(j)}) \in H)\,\}$,
azaz $\mathfrak{T}m$ a $\langle\, f_j : j \in J\,\rangle$ típushoz tartozó $\mathrm{Rg}\,\mathsf{v} \cup \mathrm{Rg}\,\mathsf{c}$ feletti szabad algebra.

Állítás (TERMINDUKCIÓ ÉS –REKURZIÓ)
(i) Tegyük fel. hogy egy Φ állítás igaz $\mathrm{Rg}\,\mathsf{v}$ és $\mathrm{Rg}\,\mathsf{c}$ elemeire és igazsága öröklődik a termképzés során, azaz invariáns f_j–re minden $j \in J$ esetén (ha Φ igaz $t_1, t_2, \dots t_{\varrho(j)}$–re, akkor $f_j\left(t_1, t_2, \dots t_{\varrho(j)}\right)$–re is igaz). Ekkor Φ igaz $\mathcal{T}m$ minden elemére, fennáll az összes termre.
(ii) Minden $\mathfrak{C} = \big\langle\, C, \langle\, f_j : j \in J \rangle\,\big\rangle$ és $g : \mathrm{Rg}\,\mathsf{v} \cup \mathrm{Rg}\,\mathsf{c} \longrightarrow C$ esetén van egyetlen $h : \mathfrak{T}m \longrightarrow \mathfrak{C}$ homomorfizmus, hogy $h \,|\, (\mathrm{Rg}\,\mathsf{v} \cup \mathrm{Rg}\,\mathsf{c}) = g$.

1.3 Atomi formulák

(i) Ha t_1 és t_2 termek, akkor $t_1 = t_2$ atomi formula
(ii) Ha $i \in I$ és $t_1, t_2, \ldots, t_{\varrho(i)}$ termek, akkor $(r_i, t_1, t_2, \ldots, t_{\varrho(i)})$ atomi formula

1.4 Formulák

(i) Minden atomi formula formula
(ii) Ha φ és ψ formulák, akkor $(\neg\,\varphi)$ és $(\wedge\,, \varphi\,, \psi)$ formulák. (*és* ill. *nem*)
(iii) Ha $n \in \omega$ és φ formula, akkor $((\forall v_n)\,, \varphi)$ formula (*minden* (*tetszőleges*))
(iii) Szimbólumok egy véges sorozata csak akkor formula, ha (i), (ii) ill. (iii) véges sok alkalmazásával áll elő.

Az $\wedge$ és a $\neg$ a *logikai konnektívumok*, a $\forall$ az *univerzális kvantor*, ezek együttesen a *logikai szimbólumok*

Jelölés

$\mathcal{A}t \mathrel{\mathring{=}} \mathcal{A}t_{\mathcal{L}}$ az összes atomi formulák halmaza, $\mathcal{F}m \mathrel{\mathring{=}} \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ az összes formulák halmaza,
$r_i(t_1, t_2 \ldots, t_{\varrho(i)}) \mathrel{\mathring{=}} (r_i, t_1, t_2 \ldots, t_{\varrho(i)})$, $\neg\,\varphi \mathrel{\mathring{=}} (\neg, \varphi), \varphi \wedge \psi \mathrel{\mathring{=}} (\wedge, \varphi, \psi)$, $(\forall v_n)\varphi \mathrel{\mathring{=}} ((\forall v_n), \varphi)$

Megjegyzés

$\mathcal{F}m$ a legszűkebb $\mathcal{A}t$–t és minden φ, ψ elemével együtt $\neg\,\varphi$–t, $\varphi \wedge \psi$–t és minden $n \in \omega$–ra $(\forall v_n)\varphi$–t tartalmazó halmaz:

$$\mathcal{F}m = \bigcap \{\, H : \mathcal{A}t \subseteq H, (\forall \varphi, \psi \in H)(\forall n \in \omega)(\neg\,\varphi\,,\ \varphi \wedge \psi\,,\ (\forall v_n)\,\varphi \in H)\,\}\,,$$

azaz $\mathfrak{F}m$ a $\big\langle \neg\,, \wedge\,, \langle\, (\forall v_n) \,:\, n \in \omega \,\rangle \big\rangle$ tíipushoz tartozó $\mathcal{A}t$ feletti szabad algebra.

Definíció

$\mathfrak{F}m \mathrel{\mathring{=}} \big\langle \mathcal{F}m, \neg\,, \wedge\,, (\forall v_n) \big\rangle_{n \in \omega}$ a *prédikátum formulaalgebra*

Állítás (FORMULAINDUKCIÓ ÉS –REKURZIÓ)

(i) Tegyük fel. hogy egy Φ állítás igaz $\mathcal{A}t$ elemeire és igazsága öröklődik a formulaképzés során, azaz invariáns az $\neg$–re és $\wedge$–re (ha Φ igaz φ és ψ–re, akkor $\neg\,\varphi$–re és $\varphi \wedge \psi$–re is igaz). Ekkor Φ igaz $\mathcal{F}m$ minden elemére, fennáll az összes formulára.
(ii) Minden $\mathfrak{C} = \big\langle C, \neg, , \wedge, \langle\, (\forall v_n) \,:\, n \in \omega \,\rangle \big\rangle$ és $g : \mathcal{A}t \longrightarrow C$ esetén van egyetlen $h : \mathfrak{F}m \longrightarrow \mathfrak{C}$ homomorfizmus, hogy $h \,|\, \mathcal{A}t = g$.

Megjegyzés

Ha mást nem mondunk és másra már nincsenek lefoglalva, mint pl. az ω, a kis görög betük (φ, ψ, η stb.) formulákat jelölnek, a változók feletti metaváltozók x, y és z, a konstansok feletti metaváltozók c és d, míg a termeket t–vel ill. s–el jelöljük, természetesen beleértve ebbe mindenütt az indexelt változatokat is. Mindig egyértelműen kiderül a szövegösszefüggésből ha nagyritkán – az adott konkrét esetben megszokott jelölést követve – változók jelölésére más betűket (pl. a, b, c, e) használunk.

Definíció (SZÁRMAZTATOTT KONNEKTÍVUMOK)

$\varphi \Rightarrow \psi \mathrel{\mathring{=}} \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$	*ha ... akkor (implikáció)* (φ: *előtag* ψ: *utótag*)
$\varphi \vee \psi \mathrel{\mathring{=}} \neg\varphi \Rightarrow \psi$	*vagy*
$\mathbb{F} \mathrel{\mathring{=}} v_1 \neq v_1$	*hamis*
$\varphi \Longleftrightarrow \psi \mathrel{\mathring{=}} (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$	*iff (akkor és csakis akkor)*
$(\exists x)\,\varphi \mathrel{\mathring{=}} \neg\,(\forall x)\neg\varphi$	*létezik* (*van olyan ... , hogy*) (*egzisztenciális kvantor*)

Megjegyzés

1) Ahogy már eddig is használtuk, a $\doteq$ szimbólum jelentése: 'definíciószerűen egyenlő'.
2) Azt mondjuk, hogy egy formulális objektum (pl. formula) *szándékolt jelentése* egy informális objektum (pl. köznyelvi állítás), ha az előbbi az utóbbi formalizált változata.
3) A szimbólumok szándékolt jelentése természetesen a szokásos.
4) $\Longrightarrow$ és $\Rightarrow$ ugyanazt jelentik. Néha elhagyjuk a felesleges zárójeleket.
5) $\mathbb{N}$ a pozitív természetes számok halmaza. Ha mást nem mondunk: $n \in \mathbb{N}$.
6) Ahogy általában szokás, mind a metanyelvi, mind a formális szimbólumok esetén a tagadást gyakran a megfelelő szimbólum áthúzásával jelöljük, pl. a $\neq$ jelentése: 'nem egyenlő' és $v_1 \not< v_2 \doteq \neg\, v_1 < v_2$, továbbá kétargumentumos függvények és relációk jeleit általában az argumentumok közé (és nem elé) írjuk, pl. nyilván $x + y \doteq +(x, y)$.
7) A metanyelvi 'ha ... akkor' (sokszor 'mivel ... tehát' értelemben) jelölése: $\leadsto$, míg a meta–ellentmondásé: $\lightning$. A $\forall$ és $\exists$ rövidítéseket is a szokásos értelemben használjuk a metanyelvben.

Definíció (VÁLTOZÓK TÍPUSAI)

1.a A $\operatorname{var} : \mathcal{T}m \longrightarrow \mathcal{P}(V)$ függvényt definiáló feltételek:

(i) $\operatorname{var}(x) \doteq \{x\}$, $\operatorname{var}(c) \doteq \emptyset$

(ii) $\operatorname{var}(f_j(t_1, t_2, \dots t_{\varrho(j)})) \doteq \bigcup_{k=1}^{\varrho(j)} \operatorname{var}(t_k)$ (tetsz. $j \in J$–re)

1.b A $\operatorname{var} : \mathcal{F}m \longrightarrow \mathcal{P}(V)$ függvényt definiáló feltételek:

(i) $\operatorname{var}(t = s) \doteq \operatorname{var}(t) \cup \operatorname{var}(s)$

(ii) $\operatorname{var}(r_i(t_1, t_2, \dots t_{\varrho(i)})) \doteq \bigcup_{k=1}^{\varrho(i)} \operatorname{var}(t_k)$ (tetsz. $i \in I$–re)

(iii) $\operatorname{var}(\neg\, \varphi) \doteq \operatorname{var}(\varphi)$, $\operatorname{var}(\varphi \wedge \psi) \doteq \operatorname{var}(\varphi) \cup \operatorname{var}(\psi)$

(vi) $\operatorname{var}((\forall x)\, \varphi) \doteq \operatorname{var}(\varphi) \setminus \{x\}$

x *szabad* változója φ–nek ha $x \in \operatorname{var}(\varphi)$

φ *mondat* ha nincs szabad változója. Tetszőleges mondathalmazt *elmélet*nek nevezünk.

2. Legyen $t \in \mathcal{T}m$. A $\operatorname{bnd}_t : \mathcal{F}m \longrightarrow \mathcal{P}(V)$ függvényt definiáló feltételek:

(i) $\operatorname{bnd}_t(x) \doteq \operatorname{bnd}_t(c) \doteq \operatorname{bnd}_t(f_j(t_1, t_2, \dots t_{\varrho(j)})) \doteq$
$\doteq \operatorname{bnd}_t(t_1 = t_2) \doteq \operatorname{bnd}_t(r_i(t_1, t_2, \dots t_{\varrho(i)})) \doteq \emptyset$ (tetsz. $j \in J$, $i \in I$–re)

(ii) $\operatorname{bnd}_t(\neg\, \varphi) \doteq \operatorname{bnd}_t(\varphi)$, $\operatorname{bnd}_t(\varphi \wedge \psi) \doteq \operatorname{bnd}_t(\varphi) \cup \operatorname{bnd}_t(\psi)$

(iii) $\operatorname{bnd}_t((\forall x)\, \varphi) \doteq \begin{cases} \operatorname{var}(\varphi) \setminus \{x\} & \text{ha } x \in \operatorname{var}(t) \\ \operatorname{bnd}_t(\varphi) & \text{ha } x \notin \operatorname{var}(t) \end{cases}$

x *t–re nézve kötött* változója φ–nek ha $x \in \operatorname{bnd}_t(\varphi)$

Példa

Ha $\varphi = x \geq y \wedge x + y \neq y - x \Longrightarrow (\forall x)(x < y \vee y < x + x) \wedge \neg\,(\exists z)(x + z = 0 \wedge z \neq 0)$, és $t = x + y$, akkor $\operatorname{var}(\varphi) = \{x, y\}$, $\operatorname{bnd}_t(\varphi) = \{y\}$

Jelölés

(i) (a) $V_t \doteq \{n \in \omega : v_n \in \operatorname{var}(t)\}$ (b) $V_\varphi \doteq \{n \in \omega : v_n \in \operatorname{var}(\varphi)\}$

(ii) $\mathcal{S}n \doteq \mathcal{S}n_{\mathcal{L}}$ az összes mondatok halmaza.

Megjegyzés

A továbbiakban – ha mást nem mondunk – σ, τ és indexelt változataik mindig mondatokat, a nagy görög betük pedig $(\Sigma, \Gamma, \Delta$ stb.) elméleteket jelölnek.

Definíció (HELYETTESÍTÉS)

Legyen $a \in \mathrm{Rg}\,\mathsf{c} \cup \mathrm{Rg}\,\mathsf{v}$, $t \in \mathcal{T}m$. A $\mathrm{sbs}^a_t : \mathcal{T}m \cup \mathcal{F}m \longrightarrow \mathcal{T}m \cup \mathcal{F}m$ függvényt definiáló feltételek:

(i) $\mathrm{sbs}^a_t(z) \circeq \begin{cases} t & \text{ha } z = a \\ z & \text{ha } z \neq a \end{cases}$

(ii) $\mathrm{sbs}^a_t(f_j(t_1, t_2, \ldots t_{\varrho(j)})) \circeq f_j(\mathrm{sbs}^a_t(t_1), \mathrm{sbs}^a_t(t_2), \ldots \mathrm{sbs}^a_t(t_{\varrho(j)}))$ (tetsz. $j \in J$–re)

(iii) $\mathrm{sbs}^a_t(s_1 = s_2) \circeq \mathrm{sbs}^a_t(s_1) = \mathrm{sbs}^a_t(s_2)$

(iv) $\mathrm{sbs}^a_t(r_i(t_1, t_2, \ldots t_{\varrho(i)})) \circeq r_i(\mathrm{sbs}^a_t(t_1), \mathrm{sbs}^a_t(t_2), \ldots \mathrm{sbs}^a_t(t_{\varrho(i)}))$ (tetsz. $i \in I$–re)

(v) $\mathrm{sbs}^a_t(\neg\varphi) \circeq \neg\,\mathrm{sbs}^a_t(\varphi)$, $\mathrm{sbs}^a_t(\varphi \wedge \psi) \circeq \mathrm{sbs}^a_t(\varphi) \wedge \mathrm{sbs}^a_t(\psi)$

(vi) $\mathrm{sbs}^a_t((\forall z)\,\varphi) \circeq \begin{cases} (\forall z)\,\varphi & \text{ha } z = a \\ (\forall z)\,\mathrm{sbs}^a_t(\varphi) & \text{ha } z \neq a \end{cases}$

Jelölés

(i) (a) $s\,^a_t \circeq \mathrm{sbs}^a_t(s)$ (b) $\varphi\,^a_t \circeq \mathrm{sbs}^a_t(\varphi)$

(ii) $t = t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ill. $\varphi = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ azt jelenti, hogy t ill. φ összes szabad változója szerepel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ között.

Megjegyzés

Ha t–t ill. φ–t fenti formában adjuk meg és $a \in \mathrm{Rg}\,\mathsf{v} \cup \mathrm{Rg}\,\mathsf{c}$, gyakran a
$t\,(x_1, x_2, \ldots, s, \ldots, x_n) \circeq t\,(x_1, x_2, \ldots, a, \ldots, x_n)^a_s$ ill.
$\varphi(x_1, x_2, \ldots, s, \ldots, x_n) \circeq \varphi(x_1, x_2, \ldots, a, \ldots, x_n)^a_s$ jelölést használjuk.

Feladat

Adjuk meg azoknak a függvényeknek a definícióját, melyek minden formulához ill. formulahalmazhoz az abban előforduló változók ill. konstansok halmazát rendeli!

Feladat

Ha egy formulában nem szerepel egyenlőségjel (kvantor), akkor *egyenlőségmentes* (*kvantormentes*) formulának nevezzük. Adjuk meg ezek formális definiícióját!

Feladat

Bizonyítsuk be, hogy

(i) ha $a \in \mathrm{Rg}\,\mathsf{c} \cup \mathrm{Rg}\,\mathsf{v}$ nem szerepel φ–ben, akkor $(\varphi^x_a)^a_y = \varphi^x_y$

(ii) ha $x \neq y$, akkor $(\varphi^x_t)^c_y = (\varphi^c_y)^x_{t^c_y}$

(iii) ha $x \notin \mathrm{var}\,(\varphi)$ és $a \in \mathrm{Rg}\,\mathsf{c} \cup \mathrm{Rg}\,\mathsf{v}$, akkor $\varphi^x_a = \varphi$.

2. Igazság

2.1 Modell

Definíció

$\mathfrak{A} = \big\langle A\,, \mathsf{R}\,, \mathsf{F}\,, \mathsf{C}\big\rangle$ az $\mathcal{L} = \big\langle \mathsf{r}\,, \mathsf{f}\,, \mathsf{c}\,, \varrho\big\rangle$ elsőrendű nyelv *lehetséges modell*je és $\mathcal{L}$ az $\mathfrak{A}$ *modell nyelve* ha $A \neq \emptyset$, $\mathsf{R} = \langle R_i : i \in I\rangle$, $\mathsf{F} = \langle F_j : j \in J\rangle$, $\mathsf{C} = \langle C_k : k \in K\rangle$ és minden $i \in I$–re $R_i \subseteq A^{\varrho(i)}$, minden $j \in J$–re $F_j : A^{\varrho(j)} \longrightarrow A$, minden $k \in K$–ra $C_k \in A$. A az $\mathfrak{A}$ *univerzuma*, az $\mathsf{R} = \langle R_i : i \in I\rangle$, $\mathsf{F} = \langle F_j : j \in J\rangle$, $\mathsf{C} = \langle C_k : k \in K\rangle$ elemei $\mathcal{L}$ reláció–, függvény– és konstansszimbólumainak $\mathfrak{A}$–beli *interpretációi*, $\mathfrak{A}$ *relációi, műveletei* ill. *konstansai* (*kitüntetett elemei*).

Az interpretációk jelölése: $r_i^{\mathfrak{A}} \mathrel{\mathring{=}} R_i$, $f_j^{\mathfrak{A}} \mathrel{\mathring{=}} F_j$, $c_k^{\mathfrak{A}} \mathrel{\mathring{=}} C_k$ minden $j \in J, i \in I, k \in K$–ra.

Legyen $\mathcal{L}\,'$ az $\mathcal{L}$ reduktuma. $\mathfrak{A}' \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}'}$ az $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}$ modell ($\mathcal{L}\,'$–re vonatkozó) *reduktuma* (jelölése $\mathfrak{A}\,|\,\mathcal{L}\,'$) ha $A' = A$ és $\mathfrak{A}\,'$ relációi, függvényei és konstansai az $\mathfrak{A}$–éiből kerülnek ki.

Megjegyzés

(i) Az általános szokásnak megfelelően a modellek jelölésére gót betüket $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ és indexelt változataikat használjuk (ezek tehát mindig modelleket jelölnek), de az aláhúzást ill. a vastag betüt is alkalmazhatjuk, azaz használatos az $\mathfrak{A}$ jelölés helyett az $\underline{A}$ ill. $\mathbf{A}$ jelölés is. Az univerzumokat a megfelelő latin betük jelölik.

(ii) A nevezetes modellek relációit, műveleteit és konstansait külön nem definiáljuk, így például ha $\underline{\omega} = \langle \omega, 0, s, +, \cdot, < \rangle$ akkor nyilván itt a természetes számok szokásos nullája, rákövetkezése, összeadása, szorzása és rendezése szerepel.

Jelölés

$\mathrm{Mod}_{\,\mathcal{L}} = \{\, \mathfrak{A} : \mathfrak{A}$ modellje $\mathcal{L}$ – nek $\}$

2.2 Modell és igazság

Definíció

Az $\mathcal{L}$ nyelv bármely $\mathfrak{A}$ modellje esetén minden $a = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\rangle \in {}^{\mathbb{N}}A$ sorozatot $\mathfrak{A}$ egy *értékelés*ének nevezünk.

Jelölés

Bármely $k \in \mathbb{N}$, $a = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots\rangle \in {}^{\mathbb{N}}A$ és $b \in A$ esetén

$$a_b^k \mathrel{\mathring{=}} a \setminus \{(k, a_k)\} \cup \{(k, b)\} \ \big(= \langle a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, \overset{k}{\breve{b}}, a_{k+1}, \ldots\rangle\ \big)$$

Definíció

Legyen $\mathfrak{A}$ az $\mathcal{L}$ nyelv tetszőleges modellje, és a $\mathfrak{A}$ tetszőleges értékelése.

1. A $\mathrm{val}_a \mathrel{\mathring{=}} \mathrm{val}_a^{\mathfrak{A}} : \mathcal{T}m \longrightarrow A$ függvényt definiáló feltételek:

(i) $\mathrm{val}_a(v_k) \mathrel{\mathring{=}} a_k$ (tetsz. $k \in \mathbb{N}$–re), $\mathrm{val}_a(c_k) \mathrel{\mathring{=}} C_k$ (tetsz. $k \in K$–ra)

(ii) $\mathrm{val}_a\left(f_j(t_1, t_2, \ldots t_{\varrho(j)})\right) \mathrel{\mathring{=}} F_j(\mathrm{val}_a(t_1), \mathrm{val}_a(t_2), \ldots \mathrm{val}_a(t_{\varrho(j)}))$ (tetsz. $j \in J$–re)

$\mathrm{val}_a(t) = \mathrm{val}_a^{\mathfrak{A}}(t)$ a t term *értéke* ($\mathfrak{A}$–ban az a értékelés esetén).

2. A $\mathrm{sat}_a \doteq \mathrm{sat}_a^{\mathfrak{A}} : \mathcal{F}m \longrightarrow 2$ függvényt definiáló feltételek:

(i) $\mathrm{sat}_a(t = s) \doteq 1$ iff $\mathrm{val}_a(t) = \mathrm{val}_a(s)$

(ii) $\mathrm{sat}_a\left(r_i(t_1, t_2, \dots t_{\varrho(i)})\right) \doteq 1$ iff $\langle\, \mathrm{val}_a(t_1), \mathrm{val}_a(t_2), \dots \mathrm{val}_a(t_{\varrho(i)})\,\rangle \in R_i$ (tetsz. $i \in I$–re)

(iii) $\mathrm{sat}_a(\neg\,\varphi) = 1$ iff $\mathrm{sat}_a(\varphi) = 0$, $\mathrm{sat}_a(\varphi \wedge \psi) = 1$ iff $\mathrm{sat}_a(\varphi) = 1$ és $\mathrm{sat}_a(\psi) = 1$

(iv) $\mathrm{sat}_a((\forall v_k)\,\varphi) = 1$ iff minden $b \in A$–ra $\mathrm{sat}_{a_b^k}(\varphi) = 1$ (tetsz. $k \in \mathbb{N}$–re)

Ha $\mathrm{sat}_a(\varphi) = \mathrm{sat}_a^{\mathfrak{A}}(\varphi) = 1$, akkor azt mondjuk, hogy a *kielégíti* φ–t vagy φ *igaz* a–ra $\mathfrak{A}$–ban ($\mathfrak{A}$–n).

Jelölés

(a) $t[a] \doteq \mathrm{val}_a(t)$, $t^{\mathfrak{A}}[a] \doteq \mathrm{val}_a^{\mathfrak{A}}(t)$, $c^{\mathfrak{A}} \doteq c^{\mathfrak{A}}[a]$ (a tetsz.) (b) $\mathfrak{A} \models \varphi[a] \doteq \mathrm{sat}_a^{\mathfrak{A}}(\varphi) = 1$

Definíció

(i) φ *igaz* $\mathfrak{A}$–ban ill. $\mathfrak{A}$ *modellje* φ–nek ha $\mathfrak{A}$ minden a értékelésére: $\mathfrak{A} \models \varphi[a]$. Jelölése: $\mathfrak{A} \models \varphi$.

(ii) φ *érvényes* ha φ igaz $\mathcal{L}$ minden $\mathfrak{A}$ modelljében, azaz $\mathfrak{A} \models \varphi$ $\mathcal{L}$ minden $\mathfrak{A}$ modellje esetén. Jelölése: $\models \varphi$.

(iii) φ *kielégíthető* ha van olyan $\mathfrak{A}$ modell és ennek olyan a értékelése, hogy $\mathfrak{A} \models \varphi[a]$.

Definíció

Legyen $\mathfrak{A}$ az $\mathcal{L}$ nyelv tetszőleges modellje $\varphi \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ és $\Sigma \subseteq \mathcal{S}n_{\mathcal{L}}$.

(i) $\mathfrak{A}$ *modellje* Σ–nak ha Σ minden eleme igaz $\mathfrak{A}$–ban, azaz $\mathfrak{A} \models \sigma$ minden $\sigma \in \Sigma$ esetén. Jelölése: $\mathfrak{A} \models \Sigma$.

(ii) φ *szemantikai következménye* Σ*–nak* ha φ igaz Σ minden modelljében, azaz minden $\mathfrak{A}$–ra: $\mathfrak{A} \models \Sigma \rightsquigarrow \mathfrak{A} \models \varphi$. Jelölése: $\Sigma \models \varphi$.

Jelölés

$\mathrm{Mod}_{\mathcal{L}}\Sigma \doteq \mathrm{Mod}\,\Sigma \doteq \{\, \mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{L}} : \mathfrak{A} \models \Sigma \}$

Definíció

Legyen $t = t(v_1, v_2, \dots, v_n)$, $\varphi = \varphi(v_1, v_2, \dots, v_n)$, $b \in A$, $a \in A^n$. t *értéke* b az $a_1, a_2, \dots, a_n$–re ($\mathfrak{A}$–ban) ill. φ *igaz* $a_1, a_2, \dots, a_n$–re ($\mathfrak{A}$–ban) $\big(a_1, a_2, \dots, a_n$ *kielégítik* φ–t ($\mathfrak{A}$–ban)$\big)$ ha bármely olyan $a' \in {}^{\mathbb{N}}A$ esetén, melyre $a = a' \restriction \{1, 2, \dots, n\}$ fennáll, hogy $t[a'] = b$ ill. $\mathfrak{A} \models \varphi[a']$. Jelölés: $t[a_1, a_2, \dots, a_n]$ ill. $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, a_2, \dots, a_n]$.

Példa

Legyen $\underline{\omega} = \langle \omega, 0, s, +, \cdot, < \rangle$. Ekkor

$\underline{\omega} \models \neg(v_3 < v_4)[\,\langle\, 2, 1, 4, 3, 6, 5, \dots \rangle\,]$, $\underline{\omega} \models (v_3 \cdot v_2 < v_4 + v_5)[2, 1, 4, 3, 6, 5]$

$\underline{\omega} \models (\forall x)(\exists y)(x < y) \wedge \neg(\forall x)(\exists y)(y < x)$

Példa

(i) $\models (\exists x)(\varphi \wedge \psi) \implies (\exists x)\varphi \wedge (\exists x)\psi$

(ii) $\not\models (\exists x)\varphi \wedge (\exists x)\psi \implies (\exists x)(\varphi \wedge \psi)$

[(i) Informálisan: ha két formulát ugyanaz az értékelés kielégít, akkor persze ez az értékelés külön–külön is kielégíti őket:
$\mathfrak{A} \models (\exists v_k)(\varphi \wedge \psi) \rightsquigarrow$ minden $a \in {}^{\mathbb{N}}A$–ra van $b \in A$, hogy $\mathfrak{A} \models (\varphi \wedge \psi)[a^k_b] \rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow$ minden $a \in {}^{\mathbb{N}}A$–ra van $b \in A$, hogy $\mathfrak{A} \models \varphi[a^k_b]$ és $\mathfrak{A} \models \psi[a^k_b] \rightsquigarrow$ minden $a \in {}^{\mathbb{N}}A$–ra van $b \in A$, hogy $\mathfrak{A} \models \varphi[a^k_b]$ és minden $a \in {}^{\mathbb{N}}A$–ra van $b' \in A$, hogy $\mathfrak{A} \models \psi[a^k_{b'}] \rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow \mathfrak{A} \models (\exists v_k)\varphi$ és $\mathfrak{A} \models (\exists v_k)\psi$

(ii) Informálisan: két formula külön–külön való kielégíthetőségéből nem következik, hogy *ugyanaz* az értékelés elégíti ki őket:
$\mathcal{L} \doteq \langle r_1, r_2 \rangle$, r_1, r_2 egyargumentumos relációszimbólumok, $\mathfrak{A} \doteq \langle 2, \{0\}, \{1\} \rangle$, $\varphi \doteq r_1(v_1)$, $\psi \doteq r_2(v_1)$. Így $\mathfrak{A} \models \varphi[0]$ és $\mathfrak{A} \models \psi[1] \rightsquigarrow \mathfrak{A} \models (\exists v_1)\varphi$ és $\mathfrak{A} \models (\exists v_1)\psi \rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow \mathfrak{A} \models (\exists v_1)\varphi \wedge (\exists v_1)\psi$. De persze nincsen $a \in A$, hogy $\mathfrak{A} \models (\varphi \wedge \psi)[a] \rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow \mathfrak{A} \not\models (\exists v_1)(\varphi \wedge \psi)$.
VAGY egy már ismert modellen: $\underline{\omega} \doteq \langle \omega, 0, 1, < \rangle$, $\varphi \doteq 0 < v_1$, $\psi \doteq v_1 < 1$ esetén $\underline{\omega} \models (\exists v_1)\varphi \wedge (\exists v_1)\psi$, hiszen $\underline{\omega} \models \varphi[1]$ és $\underline{\omega} \models \psi[0]$. Másrészt, mivel 0 és 1 között nincs természetes szám, nyilván $\underline{\omega} \not\models (\exists v_1)(\varphi \wedge \psi)$]

Példa

(i) Legyen Σ az az elmélet, melynek modelljei a végtelen dimenziós kocka (${}^{\omega}2$) egyszeri feldobásának eredményei (a modellek elemei a lehetséges eredmények): $\mathcal{L} = \langle e \rangle$, e egyargumentumos relációszimbólum, szándékolt jelentése: 'a dobás eredménye',

$$\Sigma = \{(\exists x)e(x),\ (\forall x)(e(x) \Longrightarrow (\forall y)(y \neq x \Rightarrow \neg\, e(y)))\}.$$

Ekkor $\Sigma \models (\forall x)(\neg\, e(x) \Longrightarrow (\exists y)(y \neq x \wedge e(y)))$

(ii) Legyen Σ az az elmélet, melynek modelljei egy halmaz (részleges) szigorú rendezései: $\mathcal{L} = \{<\}$, $<$ szándékolt jelentése persze a szokásos: 'kisebb',

$$\Sigma = \{(\forall x)(x \not< x),\ (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x < y \wedge y < z \Longrightarrow x < z)\}$$

Ekkor $\Sigma \models (\forall x)(\forall y)(x < y \Longrightarrow y \not< x)$

[(i) Legyen $\mathfrak{S} \doteq \langle S, E \rangle$, $\mathfrak{S} \models \Sigma$ és $s \in S$. Ekkor $t \in E$ valamely $t \in S$–re és ha $s \notin E$, akkor persze $t \neq s$, azaz: ha $s \notin E$, akkor van $t \neq s$, hogy $t \in E$.
(ii) Legyen $\mathfrak{A} \doteq \langle A, < \rangle$, $\mathfrak{A} \models \Sigma$ és $a, b \in A$. Ekkor
$a \not< a \rightsquigarrow$ nem ($a < b$ és $b < a$) $\rightsquigarrow$ (ha $a < b$, akkor $b \not< a$)]

Kérdés

Van–e az előző példa (ii)–ben $\mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$–nek olyan lehetséges modellje, mely
(a) valamely olyan relációt leíró elmélet modellje, mely *nem* rendezés
(b) egy lineáris rendezést leíró elmélet modellje?

Adjunk példát a fenti modellekre, ha van(nak) ilyen(ek)!

2.3 Igazság elemi tulajdonságai

Állítás

Legyen $\mathfrak{A} \in \mathrm{Mod}\,\mathcal{L}$ tetszőleges.

(i) (FORMULA IGAZSÁGA)

$\mathfrak{A} \models \varphi$ iff $\mathfrak{A} \models (\forall x)\varphi$

(ii) (CSAK A SZABAD VÁLTOZÓK VALÓDI VÁLTOZÓK)

Ha $a, b \in {}^{\mathbb{N}}A$, akkor

(a) $a \mid V_t = b \mid V_t \rightsquigarrow t[a] = t[b]$ $\big(\mathrm{var}\,(t) = \emptyset \rightsquigarrow t[a] = t[b] \mathrel{\mathring{=}} t^{\mathfrak{A}}\big)$

(b) $a \mid V_\varphi = b \mid V_\varphi \rightsquigarrow \mathfrak{A} \models \varphi[a]$ iff $\mathfrak{A} \models \varphi[b]$ $\big(\mathrm{var}\,(t) = \emptyset \rightsquigarrow \mathfrak{A} \models \varphi[a]$ iff $\mathfrak{A} \models \varphi[b]\big)$

(iii) (HELYETTESÍTÉSI LEMMA)

Ha $a \in {}^{\mathbb{N}}A$ és $k \in \mathbb{N}$, akkor

(a) $s_t^{v_k}[a] = s[a^k_{t[a]}]$

(b) $\mathfrak{A} \models \varphi_t^{v_k}[a]$ iff $\mathfrak{A} \models \varphi[a^k_{t[a]}]$ amennyiben $v_k \notin \mathrm{bnd}_t(\varphi)$.

(iv) (SZÁRMAZTATOTT KONNEKTÍVUMOK INTERPRETÁCIÓJA)

Legyen $a \in {}^{\mathbb{N}}A$.

(a) $\mathfrak{A} \models (\varphi \vee \psi)[a]$ iff $\mathfrak{A} \models \varphi[a]$ vagy $\mathfrak{A} \models \psi[a]$

(b) $\mathfrak{A} \models (\varphi \implies \psi)[a]$ iff ha $\mathfrak{A} \models \varphi[a]$, akkor $\mathfrak{A} \models \psi[a]$

(c) $\mathfrak{A} \models (\exists v_k)\varphi[a]$ iff van olyan $b \in A$, hogy $\mathfrak{A} \models \varphi[a^k_b]$

(v) (MONDATOK IGAZSÁGA)

$\mathfrak{A} \models \sigma$ iff van $a \in {}^{\mathbb{N}}A$, hogy $\mathfrak{A} \models \sigma[a]$

(vi) (ÖSSZETETT MONDATOK IGAZSÁGA)

(a) $\mathfrak{A} \models \sigma \wedge \tau$ iff $\mathfrak{A} \models \sigma$ és $\mathfrak{A} \models \tau$

(b) $\mathfrak{A} \models \sigma \vee \tau$ iff $\mathfrak{A} \models \sigma$ vagy $\mathfrak{A} \models \tau$

(c) $\mathfrak{A} \models \neg\sigma$ iff nem $\mathfrak{A} \models \sigma$

(d) $\mathfrak{A} \models \sigma \implies \tau$ iff ha $\mathfrak{A} \models \sigma$, akkor $\mathfrak{A} \models \tau$

(e) $\mathfrak{A} \models (\forall v_1)\varphi(v_1)$ iff minden $b \in A$–ra $\mathfrak{A} \models \sigma[b]$

(f) $\mathfrak{A} \models (\exists v_1)\varphi(v_1)$ iff van olyan $b \in A$, hogy $\mathfrak{A} \models \sigma[b]$

(vii) (TERM– ÉS FORMULAÉRTÉKELÉS REDUKTUMON)

Legyen $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$, $a \in {}^{\mathbb{N}}A$, $t \in \mathcal{T}m_{\mathcal{L}'}$, $\varphi \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}'}$. Ekkor

(a) $t^{\mathfrak{A}}[a] = t^{\mathfrak{A} \mid \mathcal{L}'}[a]$

(b) $\mathfrak{A} \models \varphi[a]$ iff $\mathfrak{A} \mid \mathcal{L}' \models \varphi[a]$

(viii)

Legyen $\varphi = \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Ekkor $\mathfrak{A} \models \varphi(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ iff $\mathfrak{A} \models \varphi[c_1^{\mathfrak{A}}, c_2^{\mathfrak{A}}, \ldots, c_n^{\mathfrak{A}}]$

[(ii), (iii), (vii) és (viii): Term– és formulaindukció, (v): (ii)]

Kérdés

(i) $\mathfrak{A} \models \neg\varphi \quad \overset{?}{\text{iff}} \quad \mathfrak{A} \not\models \varphi$

(ii) $\mathfrak{A} \models \varphi \wedge \psi \quad \overset{?}{\text{iff}} \quad \mathfrak{A} \models \varphi$ és $\mathfrak{A} \models \psi$

(iii) $\mathfrak{A} \models \varphi \vee \psi \quad \overset{?}{\text{iff}} \quad \mathfrak{A} \models \varphi$ vagy $\mathfrak{A} \models \psi$

Feladat

Bizonyítsuk be, hogy

(i) (a) $\models t_1 = t_2 \implies (s^x_{t_1} \Rightarrow s^x_{t_2})$

(b) $\models t_1 = t_2 \implies (\varphi^x_{t_1} \Rightarrow \varphi^x_{t_2})$ ha $x \notin \mathrm{bnd}_{t_1}(\varphi) \cup \mathrm{bnd}_{t_2}(\varphi)$ (LEIBNIZ ELV)

(ii) $\models (\forall x)\varphi \Leftrightarrow \varphi$ ha $x \notin \mathrm{var}(\varphi)$

(iii) $\models \varphi^x_t \implies (\exists x)\varphi$ ha $x \notin \mathrm{bnd}_t(\varphi)$

(iv) $\models \varphi^x_t \iff (\exists x)(x = t \wedge \varphi)$ ha $x \notin \mathrm{var}(t) \cup \mathrm{bnd}_t(\varphi)$ (HELYETTESÍTÉS)

(v) $\models (\exists x)(x = t)$ ha $x \notin \mathrm{var}(t)$

(vi) $\Sigma \cup \{\sigma\} \models \varphi \rightsquigarrow \Sigma \models \sigma \Rightarrow \varphi$ (SZEMANTIKAI DEDUKCIÓS TÉTEL)

(vii) $\Sigma \cup \{\sigma\} \models \varphi$ és $\Sigma \cup \{\neg\sigma\} \models \varphi \rightsquigarrow \Sigma \models \varphi$ (ESETSZÉTVÁLASZTÁS)

(viii) $\Sigma \models \varphi \implies \psi \rightsquigarrow \Sigma \models (\forall x)\varphi \implies (\forall x)\psi\,,\ \ \Sigma \models (\exists x)\varphi \implies (\exists x)\psi$

(ix) a helyettesítési lemmában és a fenti állításokban a feltételek nem hagyhatóak el!

[(i)(b) : $\mathfrak{A} \models (t_1 = t_2)[a] \rightsquigarrow t_1[a] = t_2[a] \rightsquigarrow a^k_{t_1[a]} = a^k_{t_2[a]} \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow \big(\mathfrak{A} \models \varphi[a^k_{t_1[a]}] \rightsquigarrow \mathfrak{A} \models \varphi[a^k_{t_2[a]}]\big) \rightsquigarrow \big(\mathfrak{A} \models (\varphi^{v_k}_{t_1} \implies \varphi^{v_k}_{t_2})[a]$

(iii) : $\mathfrak{A} \models \varphi^{v_k}_t[a] \rightsquigarrow \mathfrak{A} \models \varphi[a^k_{t[a]}] \rightsquigarrow$ van $b \in A$: $\mathfrak{A} \models \varphi[a^k_b] \rightsquigarrow \mathfrak{A} \models (\exists x)\varphi[a]$

(v) : $\mathfrak{A} \models (\exists v_k)(v_k = t)[a]$ iff $\mathfrak{A} \models (v_k = t)[a^k_b]$ valamely $b \in A$–ra iff
iff $v_k[a^k_b] = t[a^k_b]$ valamely $b \in A$–ra iff $b = t[a^k_b] = t[a]$ valamely $b \in A$–ra iff
iff $t[a] \in A$, ami viszont a definíció szerint mindig fennáll.]

Feladat

Válogassuk ki az alábbi formulák közül az érvényeseket! Vizsgáljuk meg a fordított irányú implikációkat is!

(i)

$(\exists x)(\forall y)\varphi \implies (\forall y)(\exists x)\varphi$
$(\forall x)(\exists y)\varphi \implies (\exists y)(\forall x)\varphi$

$(\forall x)\neg\varphi \implies \neg(\exists x)\varphi$
$(\exists x)\neg\varphi \implies \neg(\forall x)\varphi$

$(\forall x)\varphi \implies (\exists x)\varphi$
$(\exists x)\varphi \implies (\forall x)\varphi$

$(\forall x)(\varphi \wedge \psi) \implies (\forall x)\varphi \wedge (\forall x)\psi$
$(\exists x)(\varphi \wedge \psi) \implies (\exists x)\varphi \wedge (\exists x)\psi$

$(\exists x)(\varphi \vee \psi) \implies (\exists x)\varphi \vee (\exists x)\psi$
$(\forall x)(\varphi \vee \psi) \implies (\forall x)\varphi \vee (\forall x)\psi$

$(\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Longrightarrow ((\forall x)\varphi \Rightarrow (\forall x)\psi)$
$(\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Longrightarrow ((\exists x)\varphi \Rightarrow (\forall x)\psi)$
$(\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Longrightarrow ((\forall x)\varphi \Rightarrow (\exists x)\psi)$
$(\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Longrightarrow ((\exists x)\varphi \Rightarrow (\exists x)\psi)$
$(\exists x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Longrightarrow ((\forall x)\varphi \Rightarrow (\exists x)\psi)$
$(\exists x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Longrightarrow ((\exists x)\varphi \Rightarrow (\exists x)\psi)$

$(\forall x)(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Longrightarrow ((\forall x)\varphi \Leftrightarrow (\forall x)\psi)$
$(\forall x)(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Longrightarrow ((\exists x)\varphi \Leftrightarrow (\exists x)\psi)$

(ii) Tegyük fel, hogy $x \notin \mathrm{var}(\psi)$.

$(\forall x)(\varphi \wedge \psi) \Longrightarrow (\forall x)\varphi \wedge \psi$
$(\exists x)(\varphi \wedge \psi) \Longrightarrow (\exists x)\varphi \wedge \psi$

$(\forall x)(\varphi \vee \psi) \Longrightarrow (\forall x)\varphi \vee \psi$
$(\exists x)(\varphi \vee \psi) \Longrightarrow (\exists x)\varphi \vee \psi$

$(\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Longrightarrow (\varphi \Rightarrow (\forall x)\psi)$
$(\exists x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Longrightarrow (\varphi \Rightarrow (\exists x)\psi)$

$(\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Longrightarrow ((\exists x)\varphi \Rightarrow \psi)$
$(\exists x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Longrightarrow ((\forall x)\varphi \Rightarrow \psi)$
$(\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Longrightarrow ((\forall x)\varphi \Rightarrow \psi)$
$(\exists x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Longrightarrow ((\exists x)\varphi \Rightarrow \psi)$

Feladat

(i) Formalizáljuk a következő mondatokat és állapítsuk meg, hogy melyik igaz, melyik nem:

(a) ‘Semmi sem azonos semmivel.’
(b) ‘Valami azonos valamivel.’
(c) ‘Minden semmivel sem azonos.’
(d) ‘Semmi sem azonos mindennel.’

(ii) Formalizáljuk az alábbi következtetéseket és állapítsuk meg, hogy melyik érvényes, melyik nem! Válaszunkat indokoljuk meg! (Az ilyen alakú következtetéseket *kategórikus szillogizmus*oknak nevezzük, a feltételek neve: *premissza*, a következményeké *konklúzió*.)

(1) Minden ember halandó. Szokratész ember. Tehát Szokratész halandó.

(2) Minden holló fekete. Ez a kréta nem fekete. Tehát ez a kréta nem holló.

(3) Nincs tökéletes ember. Minden görög ember. Tehát nincsen olyan görög, aki tökéletes.

(4) Van olyan férfi, akinek minden nő tetszik. Tehát minden nő tetszik valakinek.

(5) Nincs olyan férfi, aki legalább egy nőnek ne tetszene. Tehát minden nőnek tetszik valaki.

(6) Nincs olyan férfi, aki legalább egy nőnek ne tetszene. Tehát minden férfi tetszik valakinek.

(7) Minden férfinek tetszik egy nő. Tehát van olyan nő, aki minden férfinek tetszik.
(8) Van olyan nő, aki minden férfinek tetszik. Tehát minden férfinek tetszik egy nő.
(9) Van olyan filozófus, aki minden filozófusnak ellentmond. Tehát van olyan filozófus, aki ellentmond önmagának.
(10) Bármelyik bolond meg tudja csinálni. Én nem tudom megcsinálni. Tehát nem vagyok bolond.
(11) Bármelyik bolond meg tudja csinálni. Én nem vagyok bolond. Tehát nem tudom megcsinálni.
(12) Bármelyik bolond meg tudja csinálni. Én nem vagyok bolond megcsinálni. Tehát nem tudom megcsinálni.
(13) Bolond aki megcsinálja. Én nem vagyok bolond. Tehát nem csinálom meg.
(14) Bolond aki megcsinálja. Én nem csinálom meg. Tehát nem vagyok bolond.
(15) Nincs olyan férfi, aki okos is és becsületes is. Tehát mindenki, aki okos és becsületes az nő.
(16) Nincs olyan férfi, aki okos is és becsületes is. Tehát mindenki, aki okos az vagy nő vagy becstelen.
(17) Minden becsületes férfi buta. Tehát minden okos férfi gazember.
(18) Minden gazdag nő csúnya. Tehát minden szegény nő szép.

(iii) Formalizáljuk a teljes indukció elvét, azaz azt az állítást, mely szerint ha egy állítás igaz 0 – ra és bármely számról öröklődik annak rákövetkezőjére, akkor ez az állítás igaz minden számra!

(iv) Formalizáljuk következő állítást és vizsgáljuk meg érvényességét! Milyen függvénytani tulajdonságról szól az állítás?

Nem igaz, hogy akármilyen kis pozitív különbség esetén van olyan távolság, hogy minden ennél egymáshoz közelebb eső pontok esetén a függvénynek ezen pontokban felvett értékei kevesebbet térnek el az adott különbségnél *akkor és csakis akkor ha* van olyan pozitív különbség, hogy minden távolság esetén vannak olyan egymáshoz ennél közelebb eső pontok, melyekhez tartozó függvényértékek egymástól a különbségnél többet térnek el.

(v) Legyen $\mathcal{L}$ tetszőleges és $\varphi \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ olyan formula, melynek egy szabad változója van. Adjuk meg $\mathcal{L}$ azon mondatait, melyek modelljeiben
(a) nincs olyan elem, melyre φ igaz lenne
(b) van olyan elem, melyre φ igaz
(c) legalább egy(kettő)(három) olyan elem van, melyre φ igaz
(d) legfeljebb egy(kettő)(három) olyan elem van, melyre φ igaz
(e) pontosan egy(kettő)(három) olyan elem van, melyre φ igaz
(f) φ igaz minden elemre

(vi) Legyen $n > 1$ természetes szám, $\mathcal{L}$ tetszőleges és $\varphi \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ olyan formula, melynek egy szabad változója van. Adjuk meg $\mathcal{L}$ azon mondatait vagy elméleteit (ha lehet), melyek modelljeiben

(a) legalább n olyan elem van, melyre φ igaz
(b) legfeljebb n olyan elem van, melyre φ igaz
(c) pontosan n elem van, melyre φ igaz
(d) csak véges sok elem van, melyre φ igaz
(e) végtelen sok elem van, melyre φ igaz

(vii) Legyen $\mathcal{L} \mathrel{\hat{=}} \langle \cdot \rangle$, $\Sigma \mathrel{\hat{=}} \{(\forall a)(\forall b)(a \cdot b = b \cdot a)\}$. Adjuk meg $\mathcal{L}$ azon mondatait, melyek modelljei közül azokban, melyek Σ – nak is modelljei fennáll, hogy
(a) az egységelem egyértelmű
(b) van olyan elem, melynek nincs inverze
(c) nem egységelem négyzete sohasem egyenlő önmagával
(d) elem inverzének inverze önmaga
(e) inverzek szorzata a szorzat inverze

(viii) Legyen $\mathcal{L} \mathrel{\hat{=}} \langle < \rangle$. Adjuk meg $\mathcal{L}$ azon mondatait, melyek modelljeiben
(a) Van olyan elem, melynél nincs nagyobb
(b) Van olyan elem, mely minden más elemnél nagyobb
(c) Minden elemnek van közvetlen megelőzője
(d) Van olyan elem, melynek nincs közvetlen rákövetkezője
(e) Van olyan elem, mellyel minden elem összehasonlítható
(f) Minden két elemnek van infimuma
(e) Van két olyan elem, melynek nincs supremuma

(ix) Adjunk meg egy–egy olyan elméletet, melyek modelljei éppen
(a) a páros gráfok
(b) a helyesen színezett egyszerű gráfok
(c) azon egyszerű nem irányított gráfok, melyeknek van lefedő körrendszere, ahol egy gráf lefedő körrendszere a gráf olyan köreiből álló halmaz, melyek közül a gráf minden pontján pontosan egy megy át.
(d) a Hamilton–körökkel rendelkező $n > 1$ csúcsú egyszerű gráfok

(x) Legyen $\mathcal{L} \mathrel{\hat{=}} \langle 0\,, s\,, +\,, \cdot \rangle$ az $\underline{\omega} = \langle \omega, 0\,, s\,, +\,, \cdot \rangle$ nyelve.
(a) Adjunk meg egy–egy olyan formulát, melyet $\underline{\omega}$ – n pontosan
(1) a négyzetszámok elégítenek ki
(2) a négyzetgyökszámok elégítenek ki
(3) a prímszámok elégítenek ki
(4) azok a 2 – nél nagyobb páros számok elégítenek ki, melyek előállnak két prím összegeként!
(5) az egymással relatív prím számok elégítenek ki
(b) Fogalmazzuk meg az ikerprímszámsejtést $\mathcal{L}$ – ben!

(xi) Adjunk meg egy–egy olyan elméletet, melyek modelljei éppen
(a) a csoportok
(b) az ekvivalenciarelációk
(c) a rendezett testek
(d) egy adott F test feletti lineáris terek

(xii) Legyen $\mathcal{L} = \langle \in \rangle$.

(a) Adjunk meg egy olyan formulát, melyet $\mathcal{L}$ modelljeiben pontosan azok a halmazok elégítenek ki, melyek közül egyik része a másiknak!

(b) Adjunk meg egy olyan formulát, mely $\mathcal{L}$ modelljeiben pontosan azok a halmazok–hármasok elégítenek ki, melyek közül az egyik a másik kettő uniója!

(c) Írjuk fel $\mathcal{L}$–ben a halmazokra vonatkozó de Morgan azonosságokat!

(xiii) Milyen a formulákra vonatkozó metaállítás felel meg az alábbi informális kijelentésnek:

‘Ha egy csoport minden eleme másodrendű, akkor a csoport kommutatív.’

[(ii)

(1) $\mathcal{L} \doteq \langle e, h, S \rangle$, e és h egyargumentumos relációszimbólumok, S konstansszimbólum, szándékolt jelentésük ‘ember’, ‘halandó’ ill. ‘Szokrátesz’.

$$\sigma \doteq (\forall x)(e(x) \Rightarrow h(x)) \wedge e(S) \Longrightarrow h(S) \rightsquigarrow \models \sigma$$

(3) Előzővel analóg módon: $\mathcal{L} = \langle e, t, g \rangle$,

$$\sigma \doteq \neg(\exists x)(e(x) \wedge t(x)) \wedge (\forall x)(g(x) \Rightarrow e(x)) \Longrightarrow \neg(\exists x)(g(x) \wedge t(x)) \rightsquigarrow \models \sigma$$

(18) $\mathcal{L} \doteq \langle g, s \rangle$, g és s egyargumentumos relációszimbólumok, szándékolt jelentésük ‘gazdag’ ill. ‘szép’.

$$\sigma \doteq (\forall x)(g(x) \Rightarrow \neg s(x)) \Longrightarrow (\forall x)(\neg g(x) \Rightarrow s(x)) \rightsquigarrow \not\models \sigma$$

mert pl.

$$A \doteq \{E, K, J\}, G \doteq \{E\},\ S \doteq \{J\},\ \mathfrak{A} \doteq \langle A, G, S \rangle \rightsquigarrow \mathfrak{A} \not\models \sigma$$

hisz

$$\mathfrak{A} \models (\forall x)(g(x) \Rightarrow \neg s(x)) \wedge \neg g(K) \wedge \neg s(K)$$

(iv) $\mathcal{L} \doteq \langle f, d, 0, < \rangle$, f és d egyargumentumú függvényszimbólumok, p egyargumentumú relációszimbólum és $<$ kétargumentumú relációszimbólum, szándékolt jelentésük: f a szóbanforgó függvény, d a távolság ill. különbség, 0 és $<$ a szokásos 0 ill. ‘kisebb’.

$$\sigma \doteq \neg (\forall \varepsilon)\big(\varepsilon > 0 \Rightarrow (\exists \delta)[\delta > 0 \wedge (\forall x)(\forall y)(d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon)]\big) \iff$$
$$\iff (\exists \varepsilon)\big(\varepsilon > 0 \wedge (\forall \delta)[\delta > 0 \Rightarrow (\exists x)(\exists y)(d(x,y) < \delta \wedge d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon)]\big)$$

Ekkor $\models \sigma$. Az állítás annak a szükséges és elégséges feltételét fogalmazza meg, hogy a szóbanforgó függvény ne legyen egyenletesen folytonos az egész valós számegyenesen.

(vi)

(a) $$\Theta(n) \doteq (\exists x_1)(\exists x_2) \ldots (\exists x_n)\vartheta(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,,$$

ahol $\vartheta(x_1, x_2, \ldots, x_n) \doteq x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge \ldots \wedge x_1 \neq x_n \wedge x_2 \neq x_3 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} \neq x_n$

(b) $\neg\,\Theta(n+1)$

(c) $\mathcal{S}ize\,(n) \doteq \Theta(n) \wedge \neg\,\Theta(n+1)$,

$\models \mathcal{S}ize\,(n) \iff (\exists x_1)(\exists x_2) \ldots (\exists x_n)(\vartheta(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge (\forall x)(x = x_1 \vee x = x_2 \vee \ldots \vee x = x_n)$

(d) Nincs ilyen elmélet

(e) $\Phi\,(n) \doteq (\exists x_1)(\exists x_2) \ldots (\exists x_n)\big(\vartheta(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge \varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2) \wedge \ldots \wedge \varphi(x_n)\big)$,

$\Sigma \doteq \{\Phi\,(n) : n \in \mathbb{N}\}$

(viii)

(d) $(\exists x)(\forall y)(x < y \Rightarrow (\exists z)(x < z < y))$

(f) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)\big((z \leq x \wedge z \leq y) \wedge (\forall w)(w \leq x \wedge w \leq y \Rightarrow w \leq z)\big)$,

$(x \leq y \doteq x < y \vee x = y)$

(ix)

(a) Páros gráf: $\mathcal{L} \doteq \langle e, a \rangle$, a egy–, e pedig kétargumentumos relációszimbólum, szándékolt jelentésük 'él' ill. 'A – ba tartozik'. $\Sigma \doteq \sigma$, ahol

$$\sigma \doteq (\forall x)(\forall y)\big((a(x) \iff a(y)) \implies \neg\, e(x,y)\big)$$

(b) Színezés: $\mathcal{L} \doteq \langle e, s_i \rangle_{i \in I}$, e kétargumentumos relációszimbólum és s_i minden $i \in I$ – re egyargumentumos függvényszimbólum, szándékolt jelentésük 'él' ill. 'i. színű'. $\Sigma \doteq \{\sigma, \tau_{ij}, \tau_i : i, j \in I, i \neq j\}$, ahol

$\sigma \doteq (\forall x)(\neg\, e(x,x)) \wedge (\forall x)(\forall y)(e(x,y) \implies e(y,x))$ (a gráf egyszerű, nem irányított)
$\tau_{ij} \doteq (\forall x)\big((s_i(x) \Rightarrow \neg s_j(x))\big)$ $i, j \in I$, $i \neq j$ (minden csúcsnak csak egy színe van)
$\tau_i \doteq (\forall x)(\forall y)\big(e(x,y) \implies (s_i(x) \Rightarrow \neg s_i(y))\big)$ $i \in I$ (szomszédos csúcsok különböző színűek)

(c) Lefedő körrendszer: $\mathcal{L} \doteq \langle e, l \rangle$. e és l is kétargumentumos relációszimbólum, szándékolt jelentésük 'él' ill. 'lefedő körrendszer elemének éle'. $\Sigma \doteq \{\sigma_i : i = 1, \ldots, 5\}$, ahol

$\sigma_1 \doteq (\forall x)(\neg\, e(x,x)) \wedge (\forall x)(\forall y)(e(x,y) \implies e(y,x))$ (a gráf egyszerű, nem irányított)
$\sigma_2 \doteq (\forall x)(\forall y)(l(x,y) \implies l(y,x))$ (a lefedő körrendszer elemei nem irányítottak)
$\sigma_3 \doteq (\forall x)(\forall y)(l(x,y) \implies e(x,y))$ (a lefedő körök a gráf éleiből állnak)
$\sigma_4 \doteq (\forall x)(\exists y)(\exists z)(y \neq z \wedge l(y,x) \wedge l(x,z))$
(minden csúcsból a lefedő körök legalább két éle indul ki)
$\sigma_5 \doteq \neg\, (\exists x)(\exists y)(\exists z)(\exists w)(y \neq z \wedge y \neq w \wedge z \neq w \wedge l(x,y) \wedge l(x,z) \wedge l(x,w))$
(minden csúcsból a lefedő körök legfeljebb két éle indul ki)

(d) Hamilton kör; $\mathcal{L} \doteq \langle e \rangle$. e kétargumentumos relációszimbólum, szándékolt jelentése 'él'. $\Sigma \doteq \{\sigma\}$, ahol

$\sigma \doteq \mathcal{S}ize\,(n) \wedge (\exists x_1)(\exists x_2)\ldots(\exists x_n)(\vartheta(x_1, x_2, \ldots, x_n) \wedge e(x_1,x_2) \wedge e(x_2,x_3) \wedge \ldots \wedge$
$\wedge\, e(x_{n-1},x_n) \wedge e(x_n,x_1))$
(van n – hosszú kör; ϑ és $\mathcal{S}ize\,(n)$ – hez lásd (vi))

(x)

(a) (1) $\mathcal{S}quare\,(x) \doteq (\exists y)(x = y \cdot y)$ (2) $\mathcal{S}quareroot\,(x) \doteq (\exists y)(y = x \cdot x)$

(b) $x < y \doteq (\exists z)(z \neq 0 \wedge x + z = y)$, $1 \doteq s\,0$, $2 \doteq s1$, $x|y \doteq y \neq 0 \wedge (\exists z)(y = z \cdot x)$, $\mathcal{P}rime(x) \doteq (\forall y)(1 < y < x \implies y \not| x)$, $\mathcal{T}winprime(x,y) \doteq Prime(x) \wedge Prime(y) \wedge$ $\wedge\, y = x + 2$, $Twinprimeconjecture \doteq (\forall z)(\exists x)(\exists y)(x > z \wedge \mathcal{T}winprime(x,y)$.

(xi)(a) $a \subseteq b \doteq (\forall x)(x \in a \implies x \in b)$ (b) $c = a \cup b \doteq (\forall x)(x \in c \iff x \in a \vee x \in b)$

(xiii) Ha $\mathcal{L} = \langle \cdot, e, {}^{-1} \rangle$ és Σ a csoportelmélet:

$$\Sigma \doteq \{(\forall a)(\forall b)(\forall c)(a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c,\ (\forall a)(e \cdot a = a),\ (\forall a)(a^{-1} \cdot a = e)\},$$

akkor az adott mondatnak megfelelő $\mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$–re vonatkozó metaállítás a következő:

$$\Sigma \models (\forall a)(a^2 = e) \implies (\forall a)(\forall b)(a \cdot b = b \cdot a)$$

]

Feladat

Legyen $X_{\mathcal{L}} \doteq \mathcal{A}t_{\mathcal{L}} \cup \{(\forall x)\,\varphi : \varphi \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}},\ x \in V\}$. Bizonyítsuk be, hogy

(i) $\mathcal{F}m_{X_{\mathcal{L}}} = \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$

(ii) Ha $\varphi \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ $\mathcal{P}rop_{X_{\mathcal{L}}}$ tautológiája, akkor érvényes.

Azt mondjuk, hogy $\varphi \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ *tautológia* ha $\mathcal{P}rop_{X_{\mathcal{L}}}$ tautológiája.

[(i) Formulaindukció
(ii) $\mathrm{sat}_a^{\mathfrak{A}}$ $\mathcal{F}m_{X_{\mathcal{L}}}$ egy értékelése.]

Kérdés
Igaz–e az előző feladat második pontjában megfogalmazott állítás megfordítása?

[Nem: $\varphi \triangleq v_1 = v_1$.]

***Megjegyzés**
Mivel már láttuk, hogy tautológia homomorf képe is tautológia, tetszőleges $\varphi \in \mathcal{F}m_X$ tautológia és $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ esetén $\varphi_{\mathfrak{F}m_{X_{\mathcal{L}}}}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{P}rop_{X_{\mathcal{L}}}$ tautológiája, tehát a feladat szerint érvényes formula.

Feladat
Bizonyítsuk be, hogy az univerzális kvantor a konjunkció, az egzisztenciális kvantor pedig a diszjunkció 'folytonosított' (vagy 'végtelenített') változata, azaz ha $n \geq 1$, $\varphi = \varphi(x)$ tetszőleges és $\Sigma \triangleq \{(\forall x)(x = c_1 \vee x = c_2 \vee \ldots \vee x = c_n)\}$, akkor

$$\Sigma \models (\forall x)\varphi(x) \iff \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi(c_i)$$
$$\Sigma \models (\exists x)\varphi(x) \iff \bigvee_{i=1}^{n} \varphi(c_i)$$

[Legyen $\mathfrak{A} \models (\forall x)(x = c_1 \vee x = c_2 \vee \ldots \vee x = c_n)$ tetszőleges. Ekkor bármely $a \in A$ esetén
$$a = c_i^{\mathfrak{A}} \text{ valamely } i = 1, 2, \ldots n\text{–re}$$
és (helyettesítési lemmával) minden $i = 1, 2, \ldots$ esetén
$$\mathfrak{A} \models \varphi(c_i)[a] \quad \text{iff} \quad \mathfrak{A} \models \varphi[c_i^{\mathfrak{A}}] ,$$
így $\mathfrak{A} \models (\forall x)\varphi(x)$ iff $(\forall\, a \in A)(\,\mathfrak{A} \models \varphi[a]\,)$ iff $(\forall\, i)(\,\mathfrak{A} \models \varphi[c_i^{\mathfrak{A}}]\,)$ iff
iff $(\forall\, a \in A)(\forall\, i)(\,\mathfrak{A} \models \varphi(c_i)[a]\,)$ iff $(\forall\, a \in A)(\,\mathfrak{A} \models \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi(c_i)\,[a]\,)$ iff $\mathfrak{A} \models \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi(c_i)$
A másik álítás analóg módon, vagy de Morgannal adódik.]

***Feladat**
Legyen $n \geq 1$ tetszőleges, $\mathcal{L}$ pedig olyan nyelv, melyre fennáll, hogy konstansainak halmaza $C \triangleq \{c_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$, nincsenek benne függvényszimbólumok és minden r relációszimbólumra $\varrho(r) \leq n$. Legyen $\mathcal{L}$ egyenlőségmentes mondatainak halmaza $\mathcal{E}$ és $X_{\mathcal{E}} \triangleq \mathcal{A}t_{\mathcal{L}} \cap \mathcal{E}$. Legyenek továbbá a $* : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}m_{X_{\mathcal{E}}}$ függvényt definiáló feltételek a következők:

(i) $\sigma^* \triangleq \sigma$ ha $\sigma \in X_{\mathcal{E}}$
(ii) $(\sigma \wedge \tau)^* \triangleq \sigma^* \wedge \tau^*$
(iii) $(\neg\, \sigma)^* \triangleq \neg\, \sigma^*$
(iv) $((\forall x)\varphi(x))^* \triangleq \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi(c_i)^*$

Például: $\vdash \big((\exists x)(\forall y)(x \leq y)\big)^* \iff \bigvee_{j=1}^{n} \bigwedge_{i=1}^{n} (c_j \leq c_i)\,,$
azaz pl. $n = 2$–re
$\vdash \big((\exists x)(\forall y)(x \leq y)\big)^* \iff (c_1 \leq c_1 \wedge c_1 \leq c_2) \vee (c_2 \leq c_1 \wedge c_2 \leq c_2)$

(a) Mutassuk meg, hogy ha σ érvényes, akkor σ^* az $\mathcal{F}m_{X_{\mathcal{E}}}$ tautológiája!

(b) Adjunk meg a fenti második feladatban szereplő σ mondatok közül az érvényesekhez tartózó σ^* tautológiákat!

(c) Igaz–e az (a)–beli állítás megfordítása?

(d) Igaz–e az (a)–beli állítás általánosítása az egész $\mathcal{S}n_{\mathcal{L}}$–re, azaz elhagyva az egyenlőségmentesség feltételét?

[(a) Legyen $\sigma \in \mathcal{E}$ és u $\mathcal{F}m_{X_{\mathcal{E}}}$ tetszőleges modellje. Legyen $A \doteq \{1, 2, \ldots, n\}$ és $\mathfrak{A}$ $\mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ – nek az a modellje, melyben $c_i^{\mathfrak{A}} \doteq i$ minden $i = 1, 2, \ldots, n$ – re és $r^{\mathfrak{A}} \doteq \{\langle i_1, i_2, \ldots, i_{\varrho(r)}\rangle \in A^{\mathbb{N}} : u(r(c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_{\varrho(r)}})) = 1\}$ minden r relációszimbólum esetén. Formulaindukcióval megmutatjuk, hogy minden $a \in A$, $\sigma \in \mathcal{E}$ esetén

$$(*) \qquad \mathrm{sat}_a^{\mathfrak{A}}(\sigma) = v_u(\sigma^*)$$

(i) $\sigma \in X_{\mathcal{E}} \rightsquigarrow \sigma = r(c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_{\varrho(r)}}) \rightsquigarrow$

$\mathrm{sat}_a^{\mathfrak{A}}(\sigma) = 1$ iff $\mathrm{sat}_a^{\mathfrak{A}}(r(c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_{\varrho(r)}})) = 1$ iff $\langle c_{i_1}^{\mathfrak{A}}, c_{i_2}^{\mathfrak{A}}, \ldots, c_{i_{\varrho(r)}}^{\mathfrak{A}} \rangle \in r^{\mathfrak{A}}$ iff iff $\langle i_1, i_2, \ldots, i_{\varrho(r)} \rangle \in r^{\mathfrak{A}}$ iff $u(r(c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_{\varrho(r)}})) = 1$ iff $u(\sigma) = 1$ iff iff $u(\sigma^*) = 1$ iff $v_u(\sigma^*) = 1$

(ii) $\mathrm{sat}_a^{\mathfrak{A}}(\sigma \wedge \tau) = 1$ iff $\mathrm{sat}_a^{\mathfrak{A}}(\sigma) = 1$ és $\mathrm{sat}_a^{\mathfrak{A}}(\tau) = 1$ iff $v_u(\sigma^*) = 1$ és $v_u(\tau^*) = 1$ iff iff $v_u((\sigma \wedge \tau)^*) = 1$

(iii) $\mathrm{sat}_a^{\mathfrak{A}}(\neg\sigma) = 1$ iff $\mathrm{sat}_a^{\mathfrak{A}}(\sigma) = 0$ iff $v_u(\sigma^*) = 0$ iff $v_u(\neg\sigma^*) = 1$ iff $v_u((\neg\sigma)^*) = 1$

(iv) Definíciója alapján $\mathfrak{A} \models \{(\forall x)(x = c_1 \vee x = c_2 \vee \ldots \vee x = c_n)\}$, így az előző feladatból: $\mathrm{sat}_a^{\mathfrak{A}}((\forall x)\varphi(x)) = \mathrm{sat}_a^{\mathfrak{A}}(\bigwedge_{i=1}^n \varphi(c_i))$. Ez felhasználva:

$\mathrm{sat}_a^{\mathfrak{A}}((\forall x)\varphi(x)) = 1$ iff $\mathrm{sat}_a^{\mathfrak{A}}(\bigwedge_{i=1}^n \varphi(c_i)) = 1$ iff $(\forall\, i)\,(\mathrm{sat}_a^{\mathfrak{A}}(\varphi(c_i)) = 1)$ iff iff $(\forall\, i)\,(v_u(\varphi(c_i)^*) = 1)$ iff $v_u(\bigwedge_{i=1}^n \varphi(c_i)^*) = 1$ iff $v_u(((\forall x)\varphi(x))^*) = 1$

Ezzel $(*)$ – ot beláttuk és így:

$$\sigma \text{ érvényes } \rightsquigarrow \mathrm{sat}_a^{\mathfrak{A}}(\sigma) = 1 \rightsquigarrow v_u(\sigma^*) = 1\,.$$

(b) Az érvényes formulasémákat φ, $\psi \in \mathcal{A}t_{\mathcal{L}}$ – re alkalmazva például:

1. $\sigma \doteq (\exists x)(\forall y)\varphi \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\varphi \rightsquigarrow \sigma^* = \bigvee_{i=1}^n \bigwedge_{j=1}^n x_{ij} \Rightarrow \bigwedge_{j=1}^n \bigvee_{i=1}^n x_{ij} \quad (x_{ij} \in X_{\mathcal{E}})$. Ebből speciálisan $n = 2$ – re a $h(x_{11}) = \varphi_1$, $h(x_{12}) = \varphi_2$, $h(x_{21}) = \psi_1$, $h(x_{22}) = \psi_2$ helyettesítésekkel:

$$\models (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\psi_1 \wedge \psi_2) \Longrightarrow (\varphi_1 \vee \psi_1) \wedge (\varphi_2 \vee \psi_2)$$

(De fordítva nem (!!): $\not\models (\varphi_1 \vee \psi_1) \wedge (\varphi_2 \vee \psi_2) \Longrightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \vee (\psi_1 \wedge \psi_2)$)

2. $\sigma \doteq (\forall x)\neg\varphi \Longleftrightarrow \neg(\exists x)\varphi \rightsquigarrow \sigma^* = \bigwedge_{i=1}^n \neg x_i \Longleftrightarrow \neg \bigvee_{i=1}^n x_i \quad (x_i \in X_{\mathcal{E}})$. Ebből speciálisan $n = 2$ – re a $h(x_1) = \varphi$, $h(x_2) = \psi$, helyettesítésekkel:

$$\models \neg(\varphi \wedge \psi) \iff \neg\varphi \vee \neg\psi$$

(Vagyis a $(\forall x)\neg\varphi \Longleftrightarrow \neg(\exists x)\varphi$ érvényes formula az egyik de Morgan szabály predikátumkalkulusra való általánosítása. Melyik formula a másik szabály általánosítása ?)

3. $\sigma \doteq (\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Longrightarrow ((\exists x)\varphi \Rightarrow (\exists x)\psi)$

$$\rightsquigarrow \sigma^* = \bigwedge_{i=1}^n (x_i \Rightarrow y_i) \Longleftrightarrow (\bigvee_{i=1}^n x_i \Rightarrow \bigvee_{i=1}^n y_i) \qquad (x_i,\ y_i \in X_{\mathcal{E}})\,.$$

Ebből speciálisan $n = 2$ – re a $h(x_1) = \varphi_1$, $h(x_2) = \varphi_2$, $h(y_1) = \psi_1$, $h(y_2) = \psi_2$ helyettesítésekkel:

$$\models (\varphi_1 \Rightarrow \psi_1) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \psi_2) \Longrightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2 \Rightarrow \psi_1 \vee \psi_2)\,,$$

amiből a $\psi \doteq \psi_1 = \psi_2$ helyettesítéssel

$$\models (\varphi_1 \Rightarrow \psi) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \psi) \Longrightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2 \Rightarrow \psi)\,,$$

amiből látható, hogy az eredeti mondat az esetszétválasztás általánosítása.

Az utolsó tautológiát a $\psi \doteq \mathbb{F}$ – re alkalmazva:

$$\models (\varphi_1 \Rightarrow \mathbb{F}) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \mathbb{F}) \Longrightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2 \Rightarrow \mathbb{F}),$$

ami az egyik de Morgan szabály egyik iránya, tehát az esetszétválasztás maga is a(z egyik) de Morgan (egyik irányának) általánosítása.

Másrészt, ha az eredeti mondatból az $x \notin \mathrm{var}(\psi)$ feltevéssel kapott mondatot vizsgáljuk, akkor

$$\sigma \doteq (\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Longrightarrow ((\exists x)\varphi \Rightarrow \psi) \rightsquigarrow \sigma^* = \bigwedge_{i=1}^n (x_i \Rightarrow y) \Longrightarrow (\bigvee_{i=1}^n x_i \Rightarrow y), \qquad (x_i\,,\ y \in X_{\mathcal{E}})$$

tehát speciálisan $n = 2$ – re a $h(x_1) = \varphi$, $h(x_2) = \varphi_2$, $h(y) = \psi$ helyettesítésekkel közvetlenül az esetszétválasztást kapjuk:

$$\models (\varphi_1 \Rightarrow \psi) \wedge (\varphi_2 \Rightarrow \psi) \Longrightarrow (\varphi_1 \vee \varphi_2 \Rightarrow \psi)$$

(c) Nem, mert van olyan mondat, mely minden véges modellen igaz, tehát 'végesített változata' tautológia, de nem érvényes mert van (végtelen) modell, melyen nem igaz. Pl. minden véges lineáris rendezésnek van legnagyobb eleme, de persze ez végtelen esetben nem igaz. Sőt csak a linearitás is elég: $\underline{\omega} \doteq \langle \omega, \leq \rangle$ esetén ha

$$\sigma \doteq (\forall x)(\forall y)(x \leq y \vee y \leq x) \Longrightarrow (\exists x)(\forall y)(y \leq x),$$

akkor nyilván

$$\underline{\omega} \not\models \sigma$$

de $n = 2$ – re

$$\models \sigma^*$$

Valóban, $x_{ij} \doteq c_i \leq c_j$ $(i, j = 1, 2)$ – vel:

$$\sigma^* = (x_{11} \vee x_{11}) \wedge (x_{12} \vee x_{21}) \wedge (x_{21} \vee x_{12}) \wedge (x_{22} \vee x_{22}) \Longrightarrow (x_{11} \wedge x_{21}) \vee (x_{12} \wedge x_{22})$$

Nomármost, $a \doteq v(x_{11})$, $b \doteq v(x_{12})$, $c \doteq v(x_{21})$, $d \doteq v(x_{22})$ – vel

$$v((x_{11} \vee x_{11}) \wedge (x_{12} \vee x_{21}) \wedge (x_{21} \vee x_{12}) \wedge (x_{22} \vee x_{22})) = (a+a)(b+c)(c+b)(d+d) =$$
$$= a(b+c)(b+c)d = ad(b+c) = adb + adc \leq db + ac = ac + bd =$$
$$= v((x_{11} \wedge x_{21}) \vee (x_{12} \wedge x_{22})) \rightsquigarrow v(\sigma^*) = 1 \rightsquigarrow \sigma^* \text{ tautológia.}$$

(d) Nem: pl. $\sigma \doteq (\forall x)(x = x) \rightsquigarrow \sigma^* = \bigwedge_{i=1}^n c_i = c_i \rightsquigarrow \sigma^* = x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$, $x_i \in X_{\mathcal{E}}$, ami nyilvánvalóan nem tautológia: $(\exists\, i)(u(x_i) \doteq 0) \rightsquigarrow v_u(\sigma^*) = 0$, pedig persze σ érvényes. (A bizonyítás rögtön az első lépésben elromlik, nem tudjuk $\mathcal{F}m_{\mathcal{X}_{\mathcal{E}}}$ minden modelljéhez $\mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ egy megfelelő modelljét megadni, hiszen az egyenlőség interpretációját nem választhatjuk meg szabadon: a példaként megadott mondat és modell esetén nem lesz igaz (amit használni szeretnénk), hogy $u(c_i = c_i) = 1$ iff $i = i$.)]

3. Bizonyíthatóság

3.1 Alapfogalmak

Definíció (LOGIKAI AXIÓMÁK)

1. *Propozicionális kalkulus axiómái*:

Implikációaxiómák:

$\mathrm{ax}_{i1}: \ \varphi \Longrightarrow (\psi \Longrightarrow \varphi)$

$\mathrm{ax}_{i2}: \ \big(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \eta)\big) \Longrightarrow \big((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \eta)\big)$

$\mathrm{ax}_{i3}: \ (\neg\,\varphi \Rightarrow \neg\,\psi) \Longrightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$

Konjunkcióaxiómák:

$\mathrm{ax}_{c1}: \ \varphi \wedge \psi \Longrightarrow \varphi$

$\mathrm{ax}_{c2}: \ \varphi \wedge \psi \Longrightarrow \psi$

$\mathrm{ax}_{c3}: \ \varphi \Longrightarrow (\psi \Longrightarrow \varphi \wedge \psi)$

2. *Kvantoraxiómáik*:

$\mathrm{ax}_{k1}: \ (\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Longrightarrow (\varphi \Rightarrow (\forall x)\psi)$ ha $x \notin \mathrm{var}(\varphi)$

$\mathrm{ax}_{k2}: \ (\forall x)\varphi \Longrightarrow \varphi^x_t$ ha $x \notin \mathrm{bnd}_t(\varphi)$ (*Univerzális specifikáció*)

3. *Identitás axiómák*:

$\mathrm{ax}_{e1}: \ x = x$

$\mathrm{ax}_{e2}: \ x=y \Longrightarrow f_j(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_{\varrho(j)}) = f_j(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \ldots, x_{\varrho(j)})$
tetszőleges $j \in J$ és $1 \le k \le \varrho(j)$–re

$\mathrm{ax}_{e3}: \ x=y \Longrightarrow \big(r_i(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \ldots, x_n) \Rightarrow r_i(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \ldots, x_n)\big)$
tetszőleges $i \in I$ és $1 \le k \le \varrho(j)$–re

$x=y \Longrightarrow (x=z \Rightarrow y=z)$

$x=y \Longrightarrow (z=x \Rightarrow z=y)$

Megjegyzés

Az ax_{k2}–ban szereplő feltételre szükség van: tetszőleges egynél több elemű $\mathfrak{A}$ modell esetén, $\varphi \mathrel{\hat{=}} (\exists y)(x \neq y)$ és $t \mathrel{\hat{=}} y \leadsto \mathfrak{A} \not\models (\forall x)\varphi \Rightarrow \varphi^x_t$ mert persze $\mathfrak{A} \models (\forall x)\varphi$, de nyilván $\mathfrak{A} \not\models \varphi^x_t$, hiszen $\varphi^x_t = (\exists y)(y \neq y)$.

Feladat

Mutassuk meg, hogy az ax_{k1}–ban szereplő feltételre szükség van!

[$\mathfrak{A} \mathrel{\hat{=}} \langle 2, 0\rangle, \varphi \mathrel{\hat{=}} \psi \mathrel{\hat{=}} v_1 = 0$. Ekkor $\mathfrak{A} \models \varphi[0]$, de $\mathfrak{A} \not\models (\forall v_1)\psi\,[0]$, hisz $\mathfrak{A} \not\models \psi[1]$]

Definíció

φ–nek Σ–ból való n hosszú *bizonyítása* egy olyan φ_1, φ_2 …, φ_n formulasorozat, melyre fennáll, hogy $\varphi_n = \varphi$ és minden $1 \le k \le n$ esetén az alábbi feltételek valamelyike teljesül:

(i) φ_k logikai axióma

(ii) $\varphi_k \in \Sigma$

(iii) van olyan $i, j < k$, hogy $\varphi_i = \varphi_j \Longrightarrow \varphi_k$ (*Modus ponens* (MP))

(iv) van olyan $i < k$, hogy $\varphi_k = (\forall x)\varphi_i$ (*Generalizáció* (G))

Definíció

(i) φ a Σ *tétele* (*bizonyítható, levezethető* Σ*–ből,* Σ *szintaktikai következménye*) ha φ–nek van Σ–ből bizonyítása; ennek jelölése $\Sigma \vdash \varphi$

(ii) φ *logikai tétel* ha az üres elmélet tétele, azaz $\emptyset \vdash \varphi$. Ezt így jelöljük: $\vdash \varphi$

(iii) $\mathrm{Ded}\,\Sigma \mathrel{\hat{=}} \{\, \varphi : \Sigma \vdash \varphi \,\}$

(iv) Σ–t a Γ *(nem logikai) axiómái*nak nevezzük, ha $\mathrm{Ded}\ \Sigma = \Gamma$

(v) Σ a Δ *(valódi) bővítése (kiterjesztése)* ha $\Sigma \supseteq \Delta$ $(\Sigma \supset \Delta)$

Példa $\vdash (\forall x)(\forall y)(x = y \Rightarrow y = x)$

$$
\left[\begin{array}{lr}
x = x \implies (x = y \Rightarrow x = x) & [\mathrm{ax}_{i1}]\ \ (1) \\
x = x & [\mathrm{ax}_{e1}]\ \ (2) \\
x = y \Rightarrow x = x & [\mathrm{MP}:(1)+(2)]\ \ (3) \\
\big(x = y \implies (x = x \Rightarrow y = x)\big) \implies \big((x = y \Rightarrow x = x) \implies (x = y \Rightarrow y = x)\big) & [\mathrm{ax}_{i2}]\ \ (4) \\
x = y \implies (x = z \Rightarrow y = z) & [\mathrm{ax}_{e3}]\ \ (5) \\
(\forall z)\big(x = y \implies (x = z \Rightarrow y = z)\big) & [\mathrm{G}:(5)]\ \ (6) \\
(\forall z)\big(x = y \implies (x = z \Rightarrow y = z)\big) \implies \big(x = y \implies (x = x \Rightarrow y = x)\big) & [\mathrm{ax}_{k2}\ : t = x\,]\ \ (7) \\
x = y \implies (x = x \Rightarrow y = x) & [\mathrm{MP}:(6)+(7)]\ \ (8) \\
(x = y \Rightarrow x = x) \implies (x = y \Rightarrow y = x) & [\mathrm{MP}:(4)+(8)]\ \ (9) \\
(x = y \Rightarrow y = x) & [\mathrm{MP}:(3)+(9)]\ (10) \\
(\forall y)(x = y \Rightarrow y = x) & [\mathrm{G}:(10)]\ (11) \\
(\forall x)(\forall y)(x = y \Rightarrow y = x) & [\mathrm{G}:(11)]\ (12)
\end{array}\right]
$$

Feladat

Mutassuk meg, hogy $\{\, (\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi)\,,\ (\forall x)\varphi \,\} \vdash (\forall x)\psi$

Definíció

(i) φ a Σ *tétele a propozicionális kalkulusra szorítkozva* (*bizonyítható, levezethető* Σ*–ből a propozicionális kalkulusra szorítkozva*) ha φ–nek van Σ–ből olyan bizonyítása, melyben logikai axiómaként csak a propozicionlis kalkulus axiómái szerepelnek és amelyben nem fordul elő generalizáció; ennek jelölése $\Sigma \underset{p}{\vdash} \varphi$

(ii) φ *propozicionális logikai tétel* ha az üres elmélet tétele a propozicionális kalkulusra szoritkozva, azaz $\emptyset \underset{p}{\vdash} \varphi$ Ezt így jelöljük: $\underset{p}{\vdash} \varphi$

(iii) $\mathrm{Ded}_p\,\Sigma \mathrel{\hat{=}} \{\, \varphi : \Sigma \underset{p}{\vdash} \varphi \,\}$

Példa $\underset{p}{\vdash} \varphi \implies \varphi$

$$
\left[\begin{array}{lr}
\varphi \Rightarrow \big((\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi\big) & [\mathrm{ax}_{i1}]\ \ (1) \\
[\varphi \Rightarrow \big((\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi\big)] \implies [(\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)] & [\mathrm{ax}_{i2}]\ \ (2) \\
(\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi) & [\mathrm{MP}:(1)+(2)]\ \ (3) \\
\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi) & [\mathrm{ax}_{i1}]\ \ (4) \\
\varphi \Rightarrow \varphi & [\mathrm{MP}:(3)+(4)]\ \ (5)
\end{array}\right]
$$

Állítás

$\Sigma \underset{p}{\vdash} \varphi \ \rightsquigarrow\ \Sigma \vdash \varphi$

Feladat

Legyen $X_{\mathcal{L}} \stackrel{\circ}{=} \mathcal{A}t_{\mathcal{L}} \cup \{(\forall x)\,\varphi : \varphi \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}\,,\ x \in V\}$. Ekkor $\mathcal{F}m_{X_{\mathcal{L}}} = \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ (lásd az előző fejezet utolsó feladatát). Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $\varphi \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ és $\Sigma \subseteq \mathcal{S}n_{\mathcal{L}}$ esetén,

$$\Sigma \underset{p}{\vdash} \varphi \qquad \text{iff} \qquad \mathcal{P}rop_{X_{\mathcal{L}}}\text{–en}:\ \Sigma \vdash \varphi$$

[$\mathcal{P}rop_{X_{\mathcal{L}}}$ –en φ –nek Σ –ból való bizonyítása nem más mint φ –nek Σ –ból való bizonyítása a propozicionális kalkulusra szorítkozva.]

***Megjegyzés**

Mivel már láttuk, hogy a propozicionális kalkulusban logikai tétel homomorf képe is logikai tétel, tetszőleges $\varphi \in \mathcal{F}m_X$ és $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ esetén $\mathcal{P}rop_{X_{\mathcal{L}}}$ –nek logikai tétele a $\varphi_{\mathfrak{F}m_{X_{\mathcal{L}}}}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$, mely a feladat szerint propozicionális logikai tétel és így logikai tétel.

Következmény

$\vdash \varphi \vee \neg\,\varphi$ (HARMADIK KIZÁRÁSÁNAK TÖRVÉNYE)

$\vdash \neg\,(\varphi \wedge \neg\,\varphi)$ (ELLENTMONDÁS TÖRVÉNYE)

Példák

(i) (a) $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$ (b) $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$ (c) $\{\varphi\,,\,\psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$

(ii) $\{\varphi\,, \neg\,\varphi\} \vdash \psi$ (ELLENTMONDÁSBÓL MINDEN LEVEZETHETŐ)

(iii) $\{\neg\,\neg\,\varphi\} \vdash \varphi$

3.2 Bizonyításelmélet elemei

Jelölés

$\Sigma \vdash \Delta \stackrel{\circ}{=} \Sigma \vdash \varphi$ minden $\varphi \in \Delta$

Állítás

(i) $\Delta \subseteq \Sigma \leadsto (\Delta \vdash \varphi \leadsto \Sigma \vdash \varphi)$

(ii) $\Sigma \vdash \varphi \leadsto \exists\,\Gamma \subseteq \Sigma$ véges, hogy $\Gamma \vdash \varphi$

(iii) $\Sigma \vdash \varphi$ és $\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \psi \leadsto \Sigma \vdash \psi$

(iv) $\Sigma \vdash \varphi \leadsto \Sigma \vdash (\forall x)\varphi$

(v) $\Sigma \vdash \Delta$ és $\Sigma \cup \Delta \vdash \varphi \leadsto \Sigma \vdash \varphi$

(vi) $\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \psi \leadsto \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$

[(v): A φ–nek Δ–ból való bizonyításának hosszára való indukció]

Jelölés

$\Sigma_1 \vdash \Sigma_2 \vdash \ldots \vdash \Sigma_n \stackrel{\circ}{=} \Sigma_1 \vdash \Sigma_2$ és $\Sigma_2 \vdash \Sigma_3$ és $\ldots$ és $\Sigma_{n-1} \vdash \Sigma_n$

A jelölésnek véges elméletekre való alkalmazásakor sok esetben az elméletek helyett – különösen egyelemű elméletek esetén – csak azok elemeit tüntetjük fel.

Következmény

(i) $\Sigma_1 \vdash \Sigma_2 \vdash \ldots \Sigma_n \rightsquigarrow \Sigma_1 \vdash \Sigma_n$ ('$\vdash$' TRANZITÍV)

(ii) $\Sigma \vdash \varphi$ és $\Sigma \vdash \psi$ iff $\Sigma \vdash \varphi \wedge \psi$ ($\wedge \approx$ 'ÉS')

Következmény (Ded lezárási operátor)

(i) $\Sigma \subseteq \mathrm{Ded}\,\Sigma$

(ii) $\Delta \subseteq \Sigma \rightsquigarrow \mathrm{Ded}\,\Delta \subseteq \mathrm{Ded}\,\Sigma$

(iii) $\mathrm{Ded}\,\mathrm{Ded}\,\Sigma = \mathrm{Ded}\,\Sigma$

[(iii): előző állítás (iii) $\Delta = \mathrm{Ded}\,\Sigma$–val]

Tétel (dedukciós tétel)

Ha $\Sigma \cup \{\psi\} \vdash \varphi$ és φ–nek $\Sigma \cup \{\psi\}$–ből való bizonyításában nem szerepel ψ szabad változójára való generalizáció, akkor $\Sigma \vdash \psi \Rightarrow \varphi$. Speciálisan $\Sigma \cup \{\sigma\} \vdash \varphi \rightsquigarrow \Sigma \vdash \sigma \Rightarrow \varphi$.

[Bizonyítás hosszára való indukció]

Megjegyzés

A feltétel szükséges: legyen $\underline{\omega} = \langle \omega, 0 \rangle$ és $\psi \stackrel{\circ}{=} (v_1 = 0)$. Ekkor $\{\psi\} \vdash (\forall v_1)\psi$, de $\underline{\omega} \not\models \psi \Rightarrow (\forall v_1)\psi$, hiszen $\underline{\omega} \models \psi[0]$ és persze $\underline{\omega} \not\models (\forall v_1)\psi$.

Feladat

A dedukciós tétel felhasználásával mutassuk meg, hogy

(i) $\vdash (\forall x)(\forall y)(x = y \Longrightarrow y = x)$

(ii) $\vdash (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \wedge y = z \Longrightarrow x = z)$

[(i): ax_{e3} $z = x$–el: $\vdash x = y \Rightarrow (x = x \Rightarrow y = x) \rightsquigarrow \{x = y\} \vdash x = x \Longrightarrow y = x \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow \{x = y\} \vdash y = x \rightsquigarrow \vdash x = y \Longrightarrow y = x \rightsquigarrow \vdash (\forall x)(\forall y)(x = y \Longrightarrow y = x)$
(ii) ax_{e3}: $\vdash y = z \Longrightarrow (x = y \Longrightarrow x = z) \rightsquigarrow \{x = y \wedge y = z\} \vdash x = z \ \ldots$]

Következmény

(i) $\vdash (\varphi \Rightarrow \psi) \Longrightarrow (\neg\,\psi \Rightarrow \neg\,\varphi)$

(ii) $\vdash \varphi \Rightarrow \neg\,\neg\varphi$

Következmény

(i) $\vdash \mathbb{F} \Rightarrow \varphi$ (hamisból minden következik)

(ii) $\vdash \neg\,\mathbb{F}$

(iii) $\vdash (\varphi \Rightarrow \mathbb{F}) \iff \neg\,\varphi$

[(i) $\{\mathbb{F}\} = \{v_1 \neq v_1\} \vdash \{v_1 \neq v_1, v_1 = v_1\} \vdash \varphi \rightsquigarrow \vdash \mathbb{F} \Rightarrow \varphi$
(ii) $\vdash \{v_1 = v_1\} \vdash \{\neg\,\neg v_1 = v_1\} = \{\neg\, v_1 \neq v_1\} \vdash \neg\mathbb{F}$]

Következmény (indirekt bizonyítás)

$\Gamma \cup \{\neg\,\varphi\} \vdash \mathbb{F} \rightsquigarrow \Gamma \vdash \varphi$

[$\Gamma \cup \{\neg\,\varphi\} \vdash \mathbb{F} \rightsquigarrow \Gamma \vdash \{\neg\,\varphi \Rightarrow \mathbb{F}\} \vdash \{\neg\,\neg\,\varphi\} \vdash \varphi$]

Példák

(i) $\vdash (\varphi \Rightarrow \psi) \iff (\neg\,\psi \Rightarrow \neg\,\varphi)$ (kontrapozició)

(ii) $\vdash \varphi \iff \neg\,\neg\varphi$ (kettős tagadás)

(iii) $\vdash (\varphi \Rightarrow \psi) \iff (\neg\,\varphi \vee \psi)$

(iv) $\vdash (\varphi \Rightarrow \neg\,\psi) \iff \neg\,(\varphi \wedge \psi)$

(v) $\vdash \big(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \eta)\big) \iff (\varphi \wedge \psi \Rightarrow \eta)$

(vi) (a) $\vdash \varphi \Rightarrow \varphi \vee \psi$ (b) $\vdash \varphi \Rightarrow \psi \vee \varphi$ (c) $\vdash \varphi \vee \psi \Rightarrow \psi \vee \varphi$

(vii) (a) $\vdash \varphi \vee \psi \iff \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ (b) $\vdash \varphi \wedge \psi \iff \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ (DE MORGAN)

(viii) $\vdash \varphi \iff \psi \rightsquigarrow \vdash \big(\neg\,\varphi \iff \neg\,\psi\big) \wedge \big(\varphi \wedge \eta \iff \psi \wedge \eta\big) \wedge \big(\varphi \vee \eta \iff \psi \vee \eta\big)$
(EKVIVALENSEK HELYETTESÍTÉSE)

(ix) (a) $\vdash (\varphi \wedge \psi \Rightarrow \eta) \iff (\varphi \Rightarrow \eta) \vee (\psi \Rightarrow \eta)$ (b) $\vdash (\varphi \vee \psi \Rightarrow \eta) \iff (\varphi \Rightarrow \eta) \wedge (\psi \Rightarrow \eta)$
(DE MORGAN ÁLTALÁNOSÍTÁSA)

[(vii)(a) $\Rightarrow$: $\{\varphi \vee \psi, \neg\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)\} = \{\neg\varphi \Rightarrow \psi, \neg\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)\} \vdash \{\neg\varphi \Rightarrow \psi, \neg\varphi, \neg\psi\} \vdash \mathbb{F} \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow \{\varphi \vee \psi\} \vdash \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \rightsquigarrow \vdash \varphi \vee \psi \Longrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
$\Leftarrow$: $\neg(\varphi \vee \psi) = \neg(\neg\varphi \Rightarrow \psi) = \neg\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \vdash \neg\varphi \wedge \neg\psi \rightsquigarrow \vdash \neg(\varphi \vee \psi) \Longrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi \vdash$
$\vdash \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \Longrightarrow \neg\neg(\varphi \vee \psi) \rightsquigarrow \vdash \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \Longrightarrow \varphi \vee \psi$]

Következmény

$\Sigma \vdash \varphi$ vagy $\Sigma \vdash \psi \rightsquigarrow \Sigma \vdash \varphi \vee \psi$

Kérdés

(i) $\Sigma \vdash \varphi \vee \psi \overset{?}{\rightsquigarrow} \Sigma \vdash \varphi$ vagy $\Sigma \vdash \psi$

(ii) $\Sigma \vdash \neg\varphi \overset{?}{\rightsquigarrow} \Sigma \nvdash \varphi$ (És fordítva ?)

Állítás (KÖTÖTT VÁLTOZÓK CSERÉJE)

Tegyük fel, hogy $\varphi = \varphi(\ldots, x, \ldots)$ és y nem fordul elő φ–ben. Ekkor

$$\vdash (\forall x)\varphi(\ldots, x, \ldots) \iff (\forall y)\varphi(\ldots, y, \ldots)$$

[$\{(\forall x)\varphi(\ldots, x, \ldots)\} \vdash \{\varphi(\ldots, y, \ldots)\} \vdash (\forall y)\varphi(\ldots, y, \ldots) \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow \vdash (\forall x)\varphi(\ldots, x, \ldots) \Longrightarrow (\forall y)\varphi(\ldots, y, \ldots)$]

Megjegyzés

Az állítás igazolja a kvantorokhoz tartozó változók esetén a metaváltozók elterjedt használatát.

Példák

(i) $\Sigma \vdash \varphi \Longrightarrow \psi \rightsquigarrow \Sigma \vdash (\forall x)\varphi \Longrightarrow (\forall x)\psi$, $\Sigma \vdash (\exists x)\varphi \Longrightarrow (\exists x)\psi$

(ii) $\vdash (\forall x)\varphi \iff \neg\,(\exists x)\neg\,\psi$

(iii) $\vdash (\exists x)\varphi \wedge (\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Longrightarrow (\exists x)\psi$

(iv) $\vdash \big((\forall x)\varphi \Rightarrow (\exists x)\psi\big) \iff (\exists x)(\varphi \Rightarrow \psi)$

(v) $\vdash (\exists x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Longrightarrow (\varphi \Rightarrow (\exists x)\psi)$ ha $x \notin \mathrm{var}(\varphi)$

[(i)(b) : $\Sigma \cup \{\,(\exists x)\varphi, \neg\,(\exists x)\psi\,\} \vdash \{\,(\exists x)\varphi, (\forall x)\neg\,\psi\,\} \vdash \{\,(\exists x)\varphi, \neg\,\psi, \varphi \Rightarrow \psi\,\} \vdash$
$\vdash \{\,(\exists x)\varphi, \neg\,\varphi\,\} \vdash \{\,(\exists x)\varphi, (\forall x)\neg\,\varphi\,\} \vdash \mathbb{F}$
(iv) $\Longleftarrow$: $\{\,\varphi \Rightarrow \psi,\ \neg((\forall x)\varphi \Rightarrow (\exists x)\psi)\,\} \vdash \{\,\varphi \Rightarrow \psi,\ (\forall x)\varphi \wedge \neg(\exists x)\psi\,\} \vdash$
$\vdash \{\varphi \Rightarrow \psi,\ \varphi,\ (\forall x)\neg\psi \vdash \{\psi, \neg\psi\} \vdash \mathbb{F} \rightsquigarrow \{\varphi \Rightarrow \psi\} \vdash (\forall x)\varphi \Rightarrow (\exists x)\psi \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow \vdash (\varphi \Rightarrow \psi) \Longrightarrow ((\forall x)\varphi \Rightarrow (\exists x)\psi) \rightsquigarrow \vdash (\exists x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Longrightarrow ((\forall x)\varphi \Rightarrow (\exists x)\psi)$
az utolsó lépésben (i) – et és azt használva, hogy $x \notin \mathrm{var}((\forall x)\varphi \Rightarrow (\exists x)\psi))$.
(v) $\neg(\varphi \Rightarrow (\exists x)\psi) \vdash \varphi \wedge \neg(\exists x)\psi \vdash \varphi \wedge (\forall x)\neg\psi \vdash \varphi \wedge \neg\psi \vdash \neg(\varphi \Rightarrow \psi) \vdash$
$\vdash (\forall x)\neg(\varphi \Rightarrow \psi) \vdash \neg(\exists x)(\varphi \Rightarrow \psi)$]

Példa

(i) Legyen Σ az az elmélet, melynek modelljei a végtelen dimenziós kocka $({}^{\omega}2)$ egyszeri feldobásának eredményei: $\mathcal{L} = \langle e \rangle$, e egyargumentumos relációszimbólum, szándékolt jelentése: 'a dobás eredménye',

$$\Sigma = \{(\exists x)e(x)\,,\ (\forall x)(e(x) \Longrightarrow (\forall y)(y \neq x \Rightarrow \neg\, e(y))\}\,.$$

Ekkor $\Sigma \vdash (\forall x)(\neg\, e(x) \Longrightarrow (\exists y)(y \neq x \wedge e(y))$

(ii) Legyen Σ az az elmélet, melynek modelljei egy halmaz (részleges) szigorú rendezései: $\mathcal{L} = \{<\}$, $<$ szándékolt jelentése persze a szokásos: 'kisebb',

$$\Sigma = \{(\forall x)(x \not< x)\,,\ (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x < y\ \wedge\ y < z \Longrightarrow x < z)\}$$

Ekkor $\Sigma \vdash (\forall x)(\forall y)(x < y \Longrightarrow y \not< x)$

[(i)

$e(y) \vdash (y = x \wedge e(y)) \vee (y \neq x \wedge e(y)) \vdash e(x) \vee y \neq x \wedge e(y) \vdash \neg e(x) \Rightarrow y \neq x \wedge e(y) \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow\ \vdash e(y) \Longrightarrow (\neg e(x) \Rightarrow y \neq x \wedge e(y)) \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow\ \vdash (\exists y)e(y) \Longrightarrow (\exists y)(\neg e(x) \Rightarrow y \neq x \wedge e(y)) \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow\ (\exists x)e(x) \vdash (\exists y)e(y) \vdash (\exists y)(\neg e(x) \Rightarrow y \neq x \wedge e(y)) \vdash \neg e(x) \Rightarrow (\exists y)(y \neq x \wedge e(y)) \vdash$

$\vdash (\forall x)(\neg e(x) \Rightarrow (\exists y)(y \neq x \wedge e(y))$

(ii)

$\Sigma \cup \{x < y\,, y < x\} \vdash \Sigma \cup \{x \not< x\} \cup \{x < y \wedge y < x\} \vdash x \not< x \wedge x < x \vdash \mathbb{F} \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow\ \Sigma \cup \{x < y\} \vdash y \not< x \rightsquigarrow \Sigma \vdash x < y \Rightarrow y \not< x \rightsquigarrow \Sigma \vdash (\forall x)(\forall y)(x < y \Rightarrow y \not< x)$]

Feladat

Mutassuk meg, hogy a 2. fejezetben szereplő érvényes kategórikus szillogizmusok premisszáiból *levezethető* a konklúzió!

[(a) $\mathcal{L} \doteq \langle e, h, S \rangle$, $\Sigma \doteq \{(\forall x)(e(x) \Rightarrow h(x))\,,\ e(S)\}$. Belátandó $\Sigma \vdash h(S)$.

$$\Sigma \vdash \{(e(S) \Rightarrow h(S))\,,\ e(S)\} \vdash h(S) \rightsquigarrow \Sigma \vdash h(S)$$

(c) $\mathcal{L} = \langle e, t, g \rangle$, $\Sigma \doteq \{\neg(\exists x)(e(x)\ \wedge\ t(x))\,,\ (\forall x)(g(x) \Rightarrow e(x))\}$. Belátandó

$$\Sigma \vdash \neg(\exists x)(g(x)\ \wedge\ t(x))\,.$$

$\Sigma \vdash \{(\forall x)(g(x)\ \Rightarrow\ e(x))\,,\ (\forall x)\neg(e(x)\ \wedge\ t(x))\} \vdash \{g(x)\ \Rightarrow\ e(x)\,,\ e(x)\ \Rightarrow \neg\, t(x)\} \vdash$

$\vdash g(x) \Rightarrow \neg\, t(x) \vdash \neg(g(x) \wedge t(x)) \vdash (\forall x)\neg(g(x) \wedge t(x)) \vdash \neg(\exists x)(g(x) \wedge t(x))$]

Feladat

Bizonyítsuk be, hogy

(i) (a) $\vdash t_1 = t_2 \implies (s^x_{t_1} \Rightarrow s^x_{t_2})$

(b) $\vdash t_1 = t_2 \implies (\varphi^x_{t_1} \Rightarrow \varphi^x_{t_2})$ ha $x \notin \mathrm{bnd}_{t_1}(\varphi) \cup \mathrm{bnd}_{t_2}(\varphi)$ (LEIBNIZ ELV)

(ii) $\vdash (\forall x)\varphi \Leftrightarrow \varphi$ ha $x \notin \mathrm{var}(\varphi)$

(iii) $\vdash \varphi^x_t \Longrightarrow (\exists x)\,\varphi$ ha $x \notin \mathrm{bnd}_t(\varphi)$

(iv) $\vdash \varphi^x_t \iff (\exists x)(\,x = t\ \wedge\ \varphi\,)$ ha $x \notin \mathrm{var}(t)\ \cup\ \mathrm{bnd}_t(\varphi)$ (HELYETTESÍTÉS)

(v) $\vdash (\exists x)(x = t)$ ha $x \notin \mathrm{var}(t)$

(vi) $\Sigma \cup \{\sigma\} \vdash \varphi$ és $\Sigma \cup \{\neg\,\sigma\} \vdash \varphi \rightsquigarrow \Sigma \vdash \varphi$ (ESETSZÉTVÁLASZTÁS)

[(iii): $\vdash (\forall x)\neg\,\varphi \Rightarrow \neg\,\varphi^x_t \rightsquigarrow\ \vdash \varphi^x_t \Rightarrow (\exists x)\varphi$

(iv): $\Longrightarrow$: (iii) – al $\vdash \psi^x_t \Rightarrow (\exists x)\psi$, $\psi \doteq \varphi\ \wedge\ x = t$, $\vdash t = t$

$\Longleftarrow$: (i)(b) – vel $\vdash \varphi \wedge x = t \Longrightarrow \varphi^x_t \rightsquigarrow\ \vdash (\exists x)(\varphi \wedge x = t) \Longrightarrow (\exists x)\varphi^x_t \Longrightarrow \varphi^x_t$

(v) : (iii) $\varphi \doteq x = t$ – vel

(vi) : $\Sigma \vdash \{(\sigma \Rightarrow \varphi) \wedge (\neg\,\sigma \Longrightarrow \varphi)\} \vdash (\sigma \vee \neg\,\sigma \Rightarrow \varphi) \vdash \varphi$]

Megjegyzés

A fenti állításokban szereplő feltételek nem hagyhatóak el.

[(i) : lásd az ax_{k2}–re vonatkozó megjegyzést (iv) : $\underline{\omega} \doteq \langle\, \omega, +, 1\,\rangle$, $\underline{\omega} \not\models (\exists x)(x = x + 1)$]

Feladat

Bizonyítsuk be, hogy az univerzális kvantor szintaktikus értelemben is a konjunkció, az egzisztenciális kvantor pedig a diszjunkció ‘folytonosított’ (vagy ‘végtelenített’) változata, azaz ha $n \geq 1$, $\varphi = \varphi(x)$ tetszőleges és $\Sigma \doteq \{(\forall x)(x = c_1 \vee x = c_2 \vee \ldots \vee x = c_n)\}$, akkor

$$\Sigma \vdash (\forall x)\varphi(x) \iff \textstyle\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi(c_i)$$

$$\Sigma \vdash (\exists x)\varphi(x) \iff \textstyle\bigvee_{i=1}^{n} \varphi(c_i)$$

[(i) Univerzális kvantor : (a) $\Longrightarrow$: univerzális specifikációval triviális (b) $\Longleftarrow$:
$\vdash \varphi(c_i) \wedge x = c_i \Longrightarrow \varphi(x) \rightsquigarrow \{\varphi(c_i)\} \vdash x = c_i \Longrightarrow \varphi(x) \rightsquigarrow \{\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi(c_i)\} \vdash$
$\vdash \bigwedge_{i=1}^{n}(x = c_i \Rightarrow \varphi(x)) \vdash \bigvee_{i=1}^{n}(x = c_i) \Rightarrow \varphi(x) \vdash (\forall x)\big(\bigvee_{i=1}^{n}(x = c_i) \Rightarrow \varphi(x)\big) \vdash$
$\vdash (\forall x) \bigvee_{i=1}^{n}(x = c_i) \Rightarrow (\forall x)\varphi(x) \rightsquigarrow \{(\forall x) \bigvee_{i=1}^{n}(x = c_i)\} \vdash \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi(c_i) \Rightarrow (\forall x)\varphi(x)$
Az egzisztenciális kvantorra vonatkozó álítás analóg módon, vagy de Morgannal adódik.]

Feladat

(i) Bizonyítsuk be, hogy ha c nem fordul elő sem Σ–ban sem φ–ben, akkor

$$\Sigma \vdash \varphi^x_c \rightsquigarrow \Sigma \vdash \varphi$$

(ii) Bizonyítsuk be, hogy lineáris rendezés minden eleme nagyobb vagy egyenlő, mint az az eleme, melynél nincsen kisebb elem a rendezésben! (Igaz ez tetszőleges rendezésre ?)

(iii) Legyen $\mathcal{L} \doteq \langle 0\,, s\,, +\,, \cdot\rangle$ és $\Pi \subseteq \mathcal{S}n_{\mathcal{L}}$ álljon a *Peano axiómák*ból, azaz legyen az az elmélet, melynek elemei az alábbi mondatok (ahol $x \neq y$ tetszőleges rögzített változók) :

$\sigma_1 \doteq (\forall x)(sx \neq 0)$

$\sigma_2 \doteq (\forall x)(\forall y)(sx = sy \Rightarrow x = y)$

$\sigma_3 \doteq (\forall x)(x + 0 = x)$

$\sigma_4 \doteq (\forall x)(\forall y)(x + sy = s(x + y))$

$\sigma_5 \doteq (\forall x)(x \cdot 0 = 0)$

$\sigma_6 \doteq (\forall x)(\forall y)(x \cdot sy = x \cdot y + x))$

továbbá az *indukciós formulaséma*, azaz tetszőleges $\varphi \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ esetén :

$\eta_\varphi \doteq \varphi^x_0 \wedge (\forall x)(\varphi \Rightarrow \varphi^x_{sx}) \Longrightarrow (\forall x)\varphi\,.$

(a) Bizonyítsuk be, hogy $\Pi \vdash (\forall x)\big(x \neq 0 \Longrightarrow (\exists y)(x = sy)\big)$

(b) Bizonyítsuk be, hogy $\Pi \vdash (\forall x)(0 + x = x)$

[(ii) $\Sigma \doteq \{(\forall x)(x \not< x)\,, (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z)\,, (\forall x)(\forall y)(x \not< y \Rightarrow y \leq x)\}\,.$
$\Sigma \cup \{\neg(\exists y)(y < x)\} \vdash (\forall y)(y \not< x) \vdash y \not< x \vdash x \leq y \vdash (\forall y)(x \leq y) \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow \Sigma \vdash (\forall x)(\neg(\exists y)(y < x) \Longrightarrow (\forall y)(x \leq y))\,.$$

$\big($ A linearitás kell : $A \doteq \{a, b, c\}$, $R \doteq \{(a, c), (b, c)\}$, $\mathfrak{A} \doteq \langle A, R\rangle$, $<^{\mathfrak{A}} \doteq R \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow \mathfrak{A} \models \Sigma$, $\mathfrak{A} \not\models \neg(\exists y)(y < x) \Rightarrow (\forall y)(x \leq y)$ mert $\mathfrak{A} \models \neg(\exists v_2)(v_2 < v_1) \wedge (v_1 \not\leq v_2)\,[a, b]\,\big)$

[(iii) (b) $\Pi \underset{\sigma_4}{\vdash} 0+sx=s(0+x)$ és $\vdash 0+x=x \Rightarrow s(0+x)=sx \rightsquigarrow \Pi \cup \{0+x=x\} \vdash$ $\vdash \{0+sx = s(0+x),\, s(0+x) = sx\} \vdash \{0+sx = s(0+x) \wedge s(0+x) = sx\} \vdash$ $\vdash \{0+sx=sx\} \rightsquigarrow \Pi \vdash \{0+x=x \Longrightarrow 0+sx=sx\} \vdash (\forall x)(0+x=x \Longrightarrow 0+sx=sx)$. Másrészt $\Pi \underset{\sigma_3}{\vdash} 0+0=0$, tehát a $\varphi \doteq 0+x=x$ jelöléssel $\Pi \vdash \varphi_0^x \wedge (\forall x)(\varphi \Rightarrow \varphi_{sx}^x)$, vagyis az indukciós formulasémával: $\Pi \vdash (\forall x)\varphi$.]

Feladat

Bizonyítsuk be, hogy a logikai axiómák érvényes formulák!

[ax_{k1}: Legyen $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod}\Sigma$, $a \in {}^{\mathbb{N}}A$, $k \in \mathbb{N}$ és φ tetszőleges olyan, hogy $v_k \notin \operatorname{var}\varphi$. $v_k \notin \operatorname{var}\varphi$ miatt v_k "nem valódi változó", így $\mathfrak{A} \models \varphi[a] \rightsquigarrow \mathfrak{A} \models \varphi[a_b^k]$ minden $b \in A$–ra. Így $\mathfrak{A} \models \big((\forall v_k)(\varphi \Rightarrow \psi)\big)[a] \rightsquigarrow \Big(\mathfrak{A} \models \varphi[a_b^k] \rightsquigarrow \mathfrak{A} \models \psi[a_b^k] \Big)$ minden $b \in A$–ra $\rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow \Big(\mathfrak{A} \models \varphi[a_b^k]$ minden $b \in A$–ra $\rightsquigarrow \mathfrak{A} \models \psi[a_b^k]$ minden $b \in A$–ra$\Big) \rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow \Big(\mathfrak{A} \models \varphi[a] \rightsquigarrow \mathfrak{A} \models \psi[a_b^k]$ minden $b \in A$–ra $\Big) \rightsquigarrow \big(\mathfrak{A} \models \varphi[a] \rightsquigarrow \mathfrak{A} \models \psi[a_b^k]$ minden $b \in A$–ra $\big) \rightsquigarrow \mathfrak{A} \models \big(\varphi \Rightarrow (\forall v_k)\psi\big)[a]$]

4. Elméletek jellemzői

4.1 Konzisztencia

Definíció

(i) Σ *inkonzisztens* ha minden formula levezethető belőle, egyébként *konzisztens*

(ii) Σ *maximális konzisztens* ha konzisztens és nincs konzisztens valódi bővítése

Állítás

Bármely Σ elmélet esetén az alábbi állítások ekvivalensek:

(a) Σ inkonzisztens

(b) $\Sigma \vdash \mathbb{F}$

(c) $\Sigma \vdash \varphi$ és $\Sigma \vdash \neg\varphi$ valamely φ formula esetén

(d) $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$ valamely φ formula esetén

[(i) (a) $\rightsquigarrow$ (b): def.; (b) $\rightsquigarrow$ (c): hamisból minden; (c) $\rightsquigarrow$ (d): $\wedge \approx$ 'és'; (d) $\rightsquigarrow$ (a): $\wedge \approx$ 'és' + ellentmondásból minden.]

Állítás (SZINTAKTIKAI KOMPAKTSÁGI TÉTEL)

Σ konzisztens iff minden véges részhalmaza konzisztens

Állítás

Tetszőleges Σ elmélet és σ mondat esetén $\Sigma \cup \{\sigma\}$ inkonzisztens iff $\Sigma \vdash \neg\sigma$

[$\Sigma \cup \{\sigma\}$ inkonzisztens $\rightsquigarrow \Sigma \cup \{\sigma\} \vdash \mathbb{F} \rightsquigarrow \Sigma \vdash \neg\sigma \rightsquigarrow \Sigma \cup \{\sigma\} \vdash \{\sigma, \neg\sigma\} \vdash \mathbb{F} \rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow \Sigma \cup \{\sigma\}$ inkonzisztens]

Állítás

Ha Σ maximálisan konzisztens, akkor tetszőleges σ mondat esetén:

(i) $\sigma \in \Sigma$ iff $\Sigma \vdash \sigma$

(ii) $\neg\sigma \in \Sigma$ iff $\sigma \notin \Sigma$

(iii) $\sigma \wedge \tau \in \Sigma$ iff $\sigma \in \Sigma$ és $\tau \in \Sigma$

[Először is: Σ max. konzisztens és $\sigma \notin \Sigma \rightsquigarrow \Sigma \cup \{\sigma\}$ inkonzisztens $\rightsquigarrow \Sigma \vdash \neg\sigma$ (*)
Ezzel:

(i) Nyilván $\sigma \in \Sigma \rightsquigarrow \Sigma \vdash \sigma$. Másrészt $\Sigma \vdash \sigma, \sigma \notin \Sigma \rightsquigarrow \Sigma \vdash \mathbb{F} \rightsquigarrow \lightning$.

(ii) Nyilván $\sigma, \neg\sigma \in \Sigma \rightsquigarrow \Sigma \vdash \mathbb{F} \rightsquigarrow \lightning$. Másrészt (*)–gal: $\sigma, \neg\sigma \notin \Sigma \rightsquigarrow \Sigma \vdash \mathbb{F} \rightsquigarrow \lightning$.

(iii) (i)–ből adódik azzal, hogy: $\wedge \approx$ 'és']

Következmény

Legyen Σ maximális konzisztens. Ekkor

(i) $\Sigma = \mathrm{Ded}\,\Sigma$

(ii) $\Sigma \nvdash \sigma$ iff $\Sigma \vdash \neg\sigma$

4.2 Teljesség

Definíció

Σ *teljes* ha minden σ esetén $\Sigma \nvdash \sigma \rightsquigarrow \Sigma \vdash \neg\sigma$

Állítás

Σ teljes konzisztens iff tetszőleges σ esetén $\Sigma \nvdash \sigma$ IFF $\Sigma \vdash \neg\sigma$

[$\Rightarrow$: teljesség, $\Leftarrow$: konzisztencia]

Következmény

Maximális konzisztens elmélet teljes

Állítás

Tetszőleges Σ konzisztens elmélet akkor és csak akkor teljes ha $\mathrm{Ded}\,\Sigma$ maximális konzisztens

[T. fel Σ teljes. $\sigma \notin \mathrm{Ded}\,\Sigma \rightsquigarrow \Sigma \vdash \neg\sigma \rightsquigarrow \Sigma \cup \{\sigma\}$ inkonzisztens
T. fel Σ max. konzisztens. $\sigma \notin \mathrm{Ded}\,\Sigma = \Sigma \rightsquigarrow \Sigma \cup \{\sigma\}$ inkonzisztens $\rightsquigarrow \Sigma \vdash \neg\sigma$]

Definíció

σ *független* Σ–tól ha $\Sigma \nvdash \sigma$ és $\Sigma \nvdash \neg\sigma$

Következmény

Σ teljes iff nincs tőle független formula

Állítás

Σ, Δ teljes konzisztens és $\Sigma \subseteq \Delta \rightsquigarrow \mathrm{Ded}\,\Sigma = \mathrm{Ded}\,\Delta$

Kérdés

Konzisztens ill. teljes–e a 2. fejezetben vizsgált elméletek közül az, melynek modelljei a végtelen dimenziós kocka egyszeri feldobásának eredményei ill. egy halmaz (részleges) szigorú rendezései?

Megjegyzés
A konzisztencia és teljesség egymás duálisai: a $\operatorname{Ded}'\Sigma \doteq \{\sigma : \neg\,\sigma \in \operatorname{Ded}\Sigma\}$ jelöléssel:

$$\begin{array}{lll} \Sigma \text{ konzisztens} & \text{iff} & \operatorname{Ded}\Sigma \cap \operatorname{Ded}'\Sigma = \emptyset \\ \Sigma \text{ teljes} & \text{iff} & \operatorname{Ded}\Sigma \cup \operatorname{Ded}'\Sigma = \mathcal{S}n \end{array}$$

Feladat (VÉGES TELJES BŐVÍTÉS = VÉGES ESETSZÉTVÁLASZTÁS)

Tegyük fel, hogy $n \geq 2$ és

(a) $\Sigma \vdash \sigma_1 \vee \sigma_2 \vee \ldots \vee \sigma_n$

(b) σ_i független Σ – tól minden $1 \leq i \leq n$ esetén

(c) $\Sigma \cup \{\sigma_i\}$ teljes minden $1 \leq i \leq n$ esetén.

Bizonyítsuk be, hogy

τ független Σ – tól iff van $1 \leq i, j \leq n,\ i \neq j$, hogy $\Sigma \cup \{\sigma_i\} \vdash \tau$ és $\Sigma \cup \{\sigma_j\} \vdash \neg\,\tau$.

[$\Longrightarrow$: $(\forall\ i)\,\big(\Sigma \cup \{\sigma_i\} \vdash \tau\big) \rightsquigarrow \Sigma \vdash \bigwedge_{i=1}^{n}\big(\sigma_i \Rightarrow \tau\big) \vdash \big(\bigvee_{i=1}^{n}\sigma_i\big) \Rightarrow \tau \vdash \tau \rightsquigarrow \Sigma \vdash \tau$

$\Longleftarrow$: $\Sigma \cup \{\sigma_i\} \vdash \tau,\ \Sigma \vdash \neg\,\tau \rightsquigarrow \Sigma \cup \{\sigma_i\} \vdash \tau \wedge \neg\,\tau \vdash \mathbb{F} \rightsquigarrow \Sigma \vdash \neg\,\sigma_i \rightsquigarrow \lightning$.

Tehát $\Sigma \cup \{\sigma_i\} \vdash \tau \rightsquigarrow \Sigma \nvdash \neg\,\tau$.]

5. Az igazság és bizonyíthatóság kapcsolata

5.1 A teljességi tétel

Definíció

$\mathcal{P}red_{\mathcal{L}} \doteq \big\langle\, \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}\,,\, \models\,,\, \vdash\, \big\rangle$

Tétel ($\mathcal{P}red_X$ HELYES)

$\Sigma \vdash \varphi \rightsquigarrow \Sigma \models \varphi$

Bizonyítás
Mivel a logikai axiómák közvetlenül ellenőrizhetően érvényes formulák (lásd a 3.2 utolsó feladatát), a bizonyítás hosszára való indukció alkalmazásához csak annyit kell belátni, hogy a modellen való igazság invariáns a modus ponensre és a generalizációra, ami azonban közvetlenül adódik a definíciókból.
Valóban:

(a) $\Sigma \models \varphi$ és $\Sigma \models \varphi \Rightarrow \psi \rightsquigarrow \Sigma \models \psi$.

Ugyanis egyrészt $\Sigma \models \varphi \rightsquigarrow \mathfrak{A} \models \varphi[a]$ minden $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod}\Sigma$ és $a \in {}^{\mathbb{N}}A$ esetén, másrészt $\Sigma \models \varphi \Rightarrow \psi \rightsquigarrow \big(\, \mathfrak{A} \models \varphi[a] \rightsquigarrow \mathfrak{A} \models \psi[a]\,\big)$ minden $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod}\Sigma$ és $a \in {}^{\mathbb{N}}A$ esetén. Következésképpen a két feltételből adódóan: $\mathfrak{A} \models \psi[a]$ minden $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod}\Sigma$ és $a \in {}^{\mathbb{N}}A$ esetén, azaz $\Sigma \models \psi$.

(b) $\Sigma \models \varphi \rightsquigarrow \Sigma \models (\forall v_k)\varphi$.

$\Sigma \models \varphi \rightsquigarrow \mathfrak{A} \models \varphi[a]$ minden $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod}\Sigma$ és $a \in {}^{\mathbb{N}}A$ esetén $\rightsquigarrow \mathfrak{A} \models \varphi[a^k_b]$ minden $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod}\Sigma$, $b \in A$ és $a \in {}^{\mathbb{N}}A$ esetén $\rightsquigarrow \mathfrak{A} \models \big((\forall v_k)\varphi\big)[a]$ minden $\mathfrak{A} \in \operatorname{Mod}\Sigma$ és $a \in {}^{\mathbb{N}}A$ esetén $\rightsquigarrow \Sigma \models (\forall v_k)\varphi$.

QED

Következmény

Ha Σ–nak van modellje, akkor konzisztens

Bizonyítás.

Legyen $\mathfrak{A}$ modellje Σ–nak. Ekkor $A \neq 0$. Legyen $a \in A$ tetszőleges. Ekkor indirekte: $\Sigma \vdash \mathbb{F} \rightsquigarrow \Sigma \models \mathbb{F} \rightsquigarrow \mathfrak{A} \models \mathbb{F} \rightsquigarrow \mathfrak{A} \models v_1 \neq v_1 \rightsquigarrow \mathfrak{A} \models (v_1 \neq v_1)[a] \rightsquigarrow a \neq a \rightsquigarrow ↯$

QED

Következmény

$\mathcal{P}red_X$ konzisztens: $\nvdash \mathbb{F}$

Bizonyítás.

$\emptyset$–nek mindig van modellje, pl. bármely $A \neq \emptyset$ univerzumon valmely $a \in A$–ra: $f_j^{\mathfrak{A}} \doteq A^{\rho(j)} \times \{a\}$ minden $j \in J$, $r_i^{\mathfrak{A}} \doteq A^{\rho(i)}$ minden $i \in I$, $c_k^{\mathfrak{A}} \doteq a$ minden $k \in K$–ra.

QED

Tétel (Lindenbaum tétel)

Bármely konzisztens elmélet kiterjeszthető maximális konzisztens elméletté.

* *Bizonyítás.*

Legyen Σ konzisztens és $\mathcal{M} \doteq \{\, \Delta : \Delta$ konzisztens és $\Delta \supseteq \Sigma \,\}$. A $\subseteq$ relációval $\mathcal{M}$ olyan parciálisan rendezett halmaz, melyben minden láncnak van felső korlátja.

Valóban, legyen $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$ lánc és $\Gamma \doteq \cup\mathcal{C}$. Ekkor Γ felső korlátja $\mathcal{C}$–nek és ezért $\Sigma \subseteq \Gamma$ is fennáll, így csak azt kell megmutatnunk, hogy Γ konzisztens. Indirekte, szintaktikai kompaktsági tétel miatt: ha $\Gamma \vdash \mathbb{F}$, akkor van véges $\Gamma' = \{\, \gamma_1, \ldots \gamma_n \,\} \subseteq \Gamma$, hogy $\Gamma' \vdash \mathbb{F}$. Ekkor tehát minden $1 \leq i \leq n$–re $\gamma_i \in \Delta_i \in \mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ lánc, így a Δ_i–k között van legbővebb (azaz az összes többit tartalmazó) halmaz, mondjuk legyen ez Δ_m. Tehát $\gamma_i \in \Delta_m$ minden $1 \leq i \leq n$–re, így $\Gamma' \subseteq \Delta_m$ amiből $\Delta_m \vdash \mathbb{F}$ ellentmondásban azzal, hogy Δ_m (lévén $\mathcal{M}$ eleme) konzisztens.

Zorn lemmával alapján $\mathcal{M}$–nek van maximális eleme, ami pedig nem más, mint Σ egy maximális konzisztens bővítése.

QED

Tétel ($\mathcal{P}red_X$ teljes (teljességi tétel első alakja), Gödel, 1930)

Ha egy elmélet konzisztens, akkor van modellje, speciálisan olyan modellje is, melynek számossága nem nagyobb a nyelv számosságánál.

* *Bizonyításvázlat.*

1. Definíció $\mathcal{L}$ konstansainak egy C halmaza Σ $\mathcal{L}$–beli *tanúhalmaza* ha minden $\varphi(x) \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ legfeljebb egy szabad változós formula esetén van olyan $c \in C$, hogy $\Sigma \vdash (\exists x)\varphi(x) \Rightarrow \varphi(c)$.

2. A Lemma Ha Σ az $\mathcal{L}$ nyelv egy konzisztens elmélete, C új konstansoknak egy olyan halmaza, melyre $|C| = ||\mathcal{L}|| = \alpha$, akkor Σ kiterjeszthető az $\mathcal{L}$–ből C elemeinek hozzávételével kapott α számosságú $\mathcal{L}'$ nyelv egy olyan konzisztens Σ' elméletévé, melynek C $\mathcal{L}'$–beli tanúhalmaza.

Valóban, könnyen ellenőrizhető, hogy ha minden $\varphi(x) \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}'}$ legfeljebb egy szabad változós formula esetén Σ–hoz hozzáveszünk egy $(\exists x)\varphi(x) \Rightarrow \varphi(c)$ mondatot (különböző formulák esetén különböző c–vel) és az így kapott elméleteket össze úniózzuk, akkor a kívánt tulajdonságú elméletet kapjuk.

3. B Lemma Ha C a Σ maximális konzisztens elmélet $\mathcal{L}$–beli tanúhalmaza, akkor Σ–nak van olyan $\mathfrak{A}$ modellje, melynek minden eleme valamely $c \in C$ interpretációja.

Ezt a következőképpen láthatjuk be.

(a) Először is definiáljuk C–n a $\approx$ relációt a következőképpen: bármely $c, d \in C$ esetén legyen $c \approx d$ iff $c = d \in \Sigma$. Az identitásaxiómák miatt ez ekvivalenciareláció. $\mathbf{c} \doteq c/\approx$ minden $c \in C$–re, $A \doteq \{\mathbf{c} : c \in C\}$.

(b) A következőekben az A univerzumon definiáljuk Σ egy $\mathfrak{A}$ modelljét. Mivel C Σ tanúhalmaza, minden d konstanszimbólum esetén van $c \in C$, hogy $d = c \in \Sigma$ hiszen $\vdash (\exists x)(d = x)$. Az identitásaxiómák következményeként a reprezentáns elemek választásától függetlenül egyértelműen definiálható d interpretációja $\mathfrak{A}$–n $\mathbf{c}$–ként: $d^{\mathfrak{A}} \doteq \mathbf{c}$. A függvényszimbólumok hasonlóképpen kezelhetőek. C tanúhalmaz mivoltából következően az identitásaxiómák felhasználásával könnyen adódik, hogy minden f_j függvényszimbólum esetén az $F_j \doteq \{\langle \mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}, \ldots, \mathbf{c_n}, \mathbf{c}\rangle \in A^{n+1} : f_j(c_1, c_2, \ldots, c_n) = c \in \Sigma\}$ $(n \doteq \varrho(j))$ a reprezentáns elemek választásától függetlenül egyértelműen definiál egy n argumentumú függvényt A–n, tehát tekinthető mint f_j $\mathfrak{A}$–beli interpretáltja. A relációszimbólumok interpretációit teljesen analóg módon definiáljuk, vagyis a feltételekből következően jogos minden r_i relációszimbólum interpretáltjaként a következő relációt definiálni $(m \doteq \varrho(i))$: $R_i \doteq \{\langle \mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}, \ldots, \mathbf{c_m}\rangle \in A^m : r_i(c_1, c_2, \ldots, c_m) \in \Sigma\}$. Ezzel $\mathfrak{A}$ definíciója teljes.

(c) A $d^{\mathfrak{A}}$ definíciójából következő összefüggés, mely szerint $\mathcal{L}$ tetszőleges d konstansa és bármely $c \in C$ esetén $\mathfrak{A} \models d = c$ iff $d^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{A}}$ iff $d^{\mathfrak{A}} = \mathbf{c}$ iff $d = c \in \Sigma$ termindukcióval direkte kiterjeszthető: minden olyan t term esetén, melynek nincs változója bármely $c \in C$–re fennáll, hogy $\mathfrak{A} \models t = c$ iff $t = c \in \Sigma$ és ez az állítás öröklődik atomi formulákra is: minden olyan σ atomi formulára, melynek nincs szabad változója fennáll, hogy $\mathfrak{A} \models \sigma$ iff $\sigma \in \Sigma$.

(d) Most már csak a fenti állításnak a mondatokban szereplő logikai szimbólumok számára való indukcióval való direkt kiterjesztése van hátra: minden σ mondatra $\mathfrak{A} \models \sigma$ iff $\sigma \in \Sigma$. A propozicionális konnektívumok esetén az indukciós lépés pofonegyszerű (analóg azzal, amit a tétel propozicionális kalkulusbeli megfelelőjének bizonyításában csináltunk). Felhasználva, hogy Σ maximális konzisztens és C tanúhalmaz mivoltából következően: $(\forall v_k)\varphi(v_k) \notin \Sigma \leadsto \neg(\forall v_k)\varphi(v_k) \in \Sigma \leadsto (\exists v_k)\neg\varphi(v_k) \in \Sigma \leadsto \neg\varphi_c^{v_k} \in \Sigma$ vmely $c \in \Sigma \leadsto$ $\leadsto \varphi_c^{v_k} \notin \Sigma$ valamely $c \in \Sigma$–ra $\leadsto (\forall v_k)\varphi(v_k) \notin \Sigma$, tehát

$$(\forall v_k)\varphi(v_k) \in \Sigma \;\text{ iff }\; \varphi_c^{v_k} \in \Sigma \;\text{ minden } c \in \Sigma\text{–ra},$$

megvizsgáljuk az univerzális kvantorra vonatkozó indukciós lépést: $\sigma = (\forall v_k)\varphi(v_k)$. $\mathfrak{A} \models (\forall v_k)\varphi(v_k)$ iff $\mathfrak{A} \models \varphi[a_{\mathbf{c}}^k]$ minden $\mathbf{c} \in A$ és $a \in {}^{\mathbb{N}}A$ iff $\mathfrak{A} \models \varphi_c^{v_k}[a]$ minden $\mathbf{c} \in A$ és $a \in {}^{\mathbb{N}}A$ iff $\mathfrak{A} \models \varphi_c^{v_k}$ minden $\mathbf{c} \in A$ iff $\varphi_c^{v_k} \in \Sigma$ minden $c \in \Sigma$ iff $(\forall v_k)\varphi(v_k) \in \Sigma$.

4. Végül a tétel a Lindenbaum tétel alapján már közvetlenül adódik a most bizonyított B Lemmából. Valóban, ha Σ az $\mathcal{L}$ nyelv egy konzisztens elmélete, akkor kiterjeszthető egy $\mathcal{L}$–el azonos számosságú $\mathcal{L}'$ nyelv Σ' elméletévé, melynek van $\mathcal{L}'$–beli tanúhalmaza. Lindenbaum tétellel Σ' kiterjeszthető $\mathcal{L}'$ egy Σ'' maximális konzisztens elméletévé, mely nyilván örökli Σ' tanúhalmazát, hiszen bővebb Σ'–nál. Következésképp B Lemma alapján

Σ''–nek van egy legfeljebb $||\mathcal{L}|| = ||\mathcal{L}'||$ számosságú $\mathfrak{A}$ modellje. $\mathfrak{A}$ modellje Σ'–nek is, mert $\Sigma' \subseteq \Sigma''$. Mivel persze $\Sigma \subseteq \mathcal{S}n_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{S}n_{\mathcal{L}'}$ és $\Sigma \subseteq \Sigma'$ így $\mathfrak{A}$ modellje Σ–nak, mint az $\mathcal{L}'$ egy elméletének, amiből aztán következik, hogy a $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \,|\, \mathcal{L}$ – azaz $\mathfrak{A}$–nak $\mathcal{L}$–re vonatkozó reduktuma – modellje Σ–nak, mint az $\mathcal{L}$ egy elméletének, melynek számossága $B = A$ miatt legfeljebb $||\mathcal{L}||$.

QED

Tétel (TELJESSÉGI TÉTEL MÁSODIK ALAKJA)

$\Sigma \models \varphi \rightsquigarrow \Sigma \vdash \varphi$

Bizonyítás.

Indirekte tegyük fel, hogy valamely $\varphi = \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ esetén $\Sigma \models \varphi$ és $\Sigma \not\vdash \varphi$. Legyen $\sigma = (\forall v_1)(\forall v_2)\ldots(\forall v_n)\varphi$. Ekkor Σ minden $\mathfrak{A}$ modelljére $\mathfrak{A} \models \varphi$ miatt $\mathfrak{A} \models \sigma$. De $\Sigma \not\vdash \varphi \rightsquigarrow \Sigma \not\vdash \sigma \rightsquigarrow \Sigma \not\vdash \neg\neg\sigma \rightsquigarrow \Sigma \cup \{\neg\sigma\}$ konzisztens $\rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow \Sigma \cup \{\neg\sigma\}$–nak van modellje $\rightsquigarrow$ van Σ–nak olyan $\mathfrak{A}$ modellje, hogy $\mathfrak{A} \models \neg\sigma \rightsquigarrow$ van Σ–nak olyan $\mathfrak{A}$ modellje, hogy $\mathfrak{A} \not\models \sigma \rightsquigarrow$ $\lightning$.

QED

Következmény

(i) Egy elmélet akkor és csak akkor konzisztens ha van modellje

(ii) $\Sigma \vdash \varphi$ iff $\Sigma \models \varphi$

Következmény (KOMPAKTSÁGI TÉTEL)

Σ-nak akkor és csak akkor van modellje ha minden véges részhalmazának van modellje

Következmény

Ha Σ minden véges részhalmazának van modellje, akkor Σ-nak van a nyelv számosságánál nem nagyobb számosságú modellje is

Kérdés

(i) $\Sigma \vdash \varphi \vee \psi \overset{?}{\rightsquigarrow} \Sigma \vdash \varphi$ vagy $\Sigma \vdash \psi$

(ii) $\Sigma \vdash \neg\varphi \overset{?}{\rightsquigarrow} \Sigma \not\vdash \varphi$ (És fordítva ?)

5.2 A Teljességi tétel következményei

Definíció

$\mathrm{Th}\,\mathfrak{A} \doteq \{\sigma : \mathfrak{A} \models \sigma\}$ *az* $\mathfrak{A}$ *modell elmélete*

Állítás

Tetszőleges $\mathfrak{A}$ esetén $\mathrm{Th}\,\mathfrak{A}$ maximális konzisztens elmélet

[$\mathrm{Th}\,\mathfrak{A}$ konzisztens mert van modellje és $\sigma \notin \mathrm{Th}\,\mathfrak{A} \rightsquigarrow \mathfrak{A} \not\models \sigma \rightsquigarrow \mathfrak{A} \models \neg\sigma \rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow \neg\sigma \in \mathrm{Th}\,\mathfrak{A} \rightsquigarrow \sigma, \neg\sigma \in \mathrm{Th}\,\mathfrak{A} \cup \{\sigma\} \rightsquigarrow \sigma, \neg\sigma \in \mathrm{Ded}\,(\mathrm{Th}\,\mathfrak{A} \cup \{\sigma\}) \rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow \mathrm{Th}\,\mathfrak{A} \cup \{\sigma\}$ inkonzisztens]

Következmény

Tetszőleges $\mathfrak{A}$ esetén $\mathrm{Th}\,\mathfrak{A}$ teljes konzisztens elmélet

Állítás

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models \Sigma \ \rightsquigarrow\ \big(\mathrm{Th}\,\mathfrak{A} \subseteq \mathrm{Th}\,\mathfrak{B} \ \rightsquigarrow\ \mathrm{Th}\,\mathfrak{A} = \mathrm{Th}\,\mathfrak{B}\big)$

[$\sigma \in \mathrm{Th}\,\mathfrak{B}, \sigma \notin \mathrm{Th}\,\mathfrak{A} \ \rightsquigarrow\ \sigma \in \mathrm{Th}\,\mathfrak{B}, \neg\sigma \in \mathrm{Th}\,\mathfrak{A} \ \rightsquigarrow\ \sigma, \neg\sigma \in \mathrm{Th}\,\mathfrak{B} \ \rightsquigarrow\ \mathbb{F}$]

Állítás

σ független Σ–tól iff Σ–nak vannak $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ modelljei, hogy $\mathfrak{A} \models \sigma$ és $\mathfrak{B} \models \neg\sigma$

[$\mathfrak{A} \models \sigma, \mathfrak{B} \models \neg\sigma$ iff $\mathfrak{A} \not\models \neg\sigma, \mathfrak{B} \not\models \sigma$ iff $\Sigma \not\models \neg\sigma, \Sigma \not\models \sigma$ iff $\Sigma \nvdash \neg\sigma, \Sigma \nvdash \sigma$ iff σ független Σ–tól]

Állítás

Σ teljes iff Σ tetszőleges $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ modelljére $\mathrm{Th}\,\mathfrak{A} = \mathrm{Th}\,\mathfrak{B}$

[$\mathrm{Th}\,\mathfrak{A} \neq \mathrm{Th}\,\mathfrak{B}$ iff van σ, hogy $\mathfrak{A} \models \sigma, \mathfrak{B} \not\models \sigma$ iff $\mathfrak{A} \models \sigma, \mathfrak{B} \models \neg\sigma$]

Megjegyzés

A teljességi tétel tehát (a szematikus és szintaktikus következményfogalmak összekapcsolásán kívül) az elméletek szematikus és szintaktikus jellemzését is összekapcsolja arra vonatkozóan, hogy az általuk definiált struktúra
(a) létezik–e (*egzisztencia*): Σ konzisztens iff *van* modellje
(b) egyértelmű–e (*unicitás*): Σ teljes iff *nincs két* elsőrendű formulával megkülönböztethető modellje

Következmény

Legyen Σ teljes. Ekkor $\mathfrak{A} \models \Sigma$ és $\mathfrak{A} \models \sigma \ \rightsquigarrow\ \Sigma \models \sigma$

Állítás

$\mathfrak{A} \models \Sigma \ \rightsquigarrow\ \mathrm{Ded}\,\Sigma \subseteq \mathrm{Th}\,\mathfrak{A}$

[(i) $\sigma \in \mathrm{Ded}\,\Sigma \ \rightsquigarrow\ \Sigma \vdash \sigma \ \rightsquigarrow\ \Sigma \models \sigma \ \rightsquigarrow\ \mathfrak{A} \models \sigma \ \rightsquigarrow\ \sigma \in \mathrm{Th}\,\mathfrak{A}$]

Tétel (modell elméletének axiómái)

$\mathfrak{A} \models \Sigma \ \rightsquigarrow\ \big(\mathrm{Ded}\,\Sigma = \mathrm{Th}\,\mathfrak{A}$ iff Σ teljes$\big)$

[(a) Tegyük fel Σ teljes. Az előző Állítás miatt elég látni, hogy az előző Következményt felhasználva $\sigma \in \mathrm{Th}\,\mathfrak{A} \ \rightsquigarrow\ \mathfrak{A} \models \sigma \ \rightsquigarrow\ \Sigma \models \sigma \ \rightsquigarrow\ \Sigma \vdash \sigma \ \rightsquigarrow\ \sigma \in \mathrm{Ded}\,\Sigma$
(b) Tegyük fel $\mathrm{Ded}\,\Sigma = \mathrm{Th}\,\mathfrak{A}$. $\Sigma \nvdash \sigma \ \rightsquigarrow\ \sigma \notin \mathrm{Ded}\,\Sigma = \mathrm{Th}\,\mathfrak{A} \ \rightsquigarrow\ \neg\sigma \in \mathrm{Th}\,\mathfrak{A} = \mathrm{Ded}\,\Sigma \ \rightsquigarrow\ \Sigma \vdash \neg\sigma$]

Definíció

$\mathfrak{A}$ *elemien ekvivalens* $\mathfrak{B}$–vel ha $\mathrm{Th}\,\mathfrak{A} = \mathrm{Th}\,\mathfrak{B}$. Jelölése: $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

Következmény

Σ teljes iff minden modellje elemeien ekvivalens

Kérdés

$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \ \overset{?}{\rightsquigarrow}\ \mathfrak{A} = \mathfrak{B}$

Definíció

Legyenek $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ tetszőleges modellek. Ha g olyan A–t B–*re* képező kölcsönösen egyértelmű függvény, melyre igaz, hogy

(i) (a) $g(c_k^{\mathfrak{A}}) = c_k^{\mathfrak{B}}$ minden $k \in K$–ra

(b) $g\big(f_j^{\mathfrak{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_{\varrho(j)})\big) = f_j^{\mathfrak{B}}\big(g(a_1), g(a_2), \ldots, g(a_{\varrho(j)})\big)$ minden $j \in J$–re

(ii) $\langle a_1, a_2, \ldots, a_{\varrho(j)} \rangle \in r_i^{\mathfrak{A}}$ iff $\langle g(a_1), g(a_2), \ldots, g(a_{\varrho(j)}) \rangle \in r_i^{\mathfrak{B}}$ minden $i \in I$–re

akkor azt mondjuk, hogy g *izomorfizmus* $\mathfrak{A}$ *és* $\mathfrak{B}$ *között* (vagy $\mathfrak{A}$–t $\mathfrak{B}$–be képező (vivő) izomorfizmus). Ezt a tényt így jelöljük: $\mathfrak{A} \cong_g \mathfrak{B}$.
$\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ *izomorfak* egymással (jelölése: $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$), ha van izomorfizmus $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ között.

Feladat

Mutassuk meg, hogy ha H tetszőleges megszámlálható halmaz, akkor összes részhalmazainak (Boole) halmazalgebrája izomorf ${}^{\omega}\mathbf{2}$–val (azaz a kételemű Boole algebra elemeiből képezett végtelen sorozatok Boole–algebrájával, ahol a sorozatokon a műveletek koordinátánként vannak értelmezve).

Állítás

Tegyük fel, hogy $\mathfrak{A} \cong_g \mathfrak{B}$. Ekkor minden $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$, $t = t(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ és $\varphi = \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ esetén

$$g\big(t^{\mathfrak{A}}[a_1, a_2, \ldots, a_n]\big) = t^{\mathfrak{B}}[g(a_1), g(a_2), \ldots, g(a_n)]$$

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, a_2, \ldots, a_n] \quad \text{iff} \quad \mathfrak{B} \models \varphi[g(a_1), g(a_2), \ldots, g(a_n)]$$

[Term– és formulaindukció]

Következmény

$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \quad \rightsquigarrow \quad \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$

Kérdés

$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \quad \overset{?}{\rightsquigarrow} \quad \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$

Feladat

(i) Legyen Σ az alábbi kijelentések formalizált változataiból álló elmélet:
‘Minden buta férfi becsületes.’ ‘Minden férfi vagy okos vagy erős.’
‘Nincsen erős férfi, aki becsületes.’ ‘Van olyan férfi, aki buta.’
Döntsük el, hogy konzisztens–e ez az elmélet!

(ii) Legyen Σ az alábbi kijelentések formalizált változataiból álló elmélet:
‘Minden ember halandó.’ ‘ Minden görög ember.’
(1) Döntsük el, hogy konzisztens–e ez az elmélet!
(2) Az alábbi állítások közül melyek függetlenek és melyek nem függetlenek Σ – tól?
(a) ‘Minden halandó görög.’
(b) ‘Minden görög halandó .’
(c) ‘Van halandó görög.’
(d) ‘Nincs halhatatlan görög.’

(iii) Legyen $\mathcal{L} \stackrel{\circ}{=} \langle < \rangle$. Adjunk meg minél több különböző olyan konzisztens elméletet, melyben az összes alábbi kijelentés formalizált változata szerepel vagy állító vagy tagadó formában! (Persze (m) vagy tagadása is csak egyszer, egyetlen n – re szerepel.)

(a) $<$ irreflexív
(b) $<$ tranzítiv
(c) minden elemnek van közvetlen rákövetkezője
(d) nem minden elemnek van közvetlen megelőzője
(e) minden két elem közé esik egy harmadik
(f) nincs olyan elem, mely minden másnál nagyobb lenne
(g) van olyan elem, melynél nincs nagyobb
(h) minden két elem összehasonlítható
(i) minden két elemhez van egy harmadik, mellyel mindkét elem összehasonlítható
(j) minden három elemből valamelyik kettő összehasonlítható
(k) van olyan három elem, melyek közül egyetlen párhoz sincs mindkettőjükkel összehasonlítható elem
(l) minden elemnek van közvetlen rákövetkezője és közvetlen megelőzője
(m) n elem van ($n = 1, 2, 3, 4, \dots, 100$)
(n) végtelen sok elem van

(iv) Legyen $\mathcal{L} \stackrel{\circ}{=} \langle \cdot, {}^{-1}, e \rangle$ és legyenek a $\Sigma \subseteq \mathcal{S}n_{\mathcal{L}}$ elmélet elemei a a csoportelmélet axiómái.

(1) Döntsük el, hogy konzisztens–e ez az elmélet!

(2) Az alábbi állítások közül melyek formalizált változatai függetlenek és melyek nem függetlenek Σ – tól?

(a) van olyan elem, melynek nincs inverze
(b) nem egységelem négyzete sohasem egyenlő önmagával
(c) van olyan nem egységelem, melynek köbe az egység
(d) az egységelem egyértelmű
(e) elem inverzének inverze önmaga
(f) inverzek szorzata a szorzat inverze
(g) négyzetek szorzata a szorzat négyzete
(h) minden elem inverze önmaga
(i) nincs olyan elem, melynek inverze önmaga

(v) Legyen $\mathcal{L} \stackrel{\circ}{=} \langle +, \cdot, \overline{}, 0, 1, \leq \rangle$ és álljon a $\Sigma \subseteq \mathcal{S}n_{\mathcal{L}}$ elmélet a Boole–algebrák axiómáiból és a következő mondatokból:

$$(\exists a)(\exists b)(\exists c)(a \neq b \wedge a \neq c \wedge b \neq c), \ (\forall a)(\forall b)(a \leq b \iff a \cdot b = a).$$

(1) Döntsük el, hogy konzisztens–e ez az elmélet!

(2) Az alábbi állítások közül melyek formalizált változatai függetlenek és melyek nem függetlenek Σ – tól?

(a) Van olyan $a \neq 1$ elem, melynél nincs nagyobb $b \neq 1$ elem
(b) Van olyan $a \neq 1$ elem, mely minden más $b \neq 1$ elemnél nagyobb
(c) Minden $a \neq 0$ elemnek van közvetlen megelőzője
(d) Minden $a \neq 0$ elemnek van egyetlen közvetlen megelőzője

(e) Van olyan $a \neq 1$ elem, melynek nincs közvetlen rákövetkezője
(f) Van olyan $a \neq 0, 1$ elem, mellyel minden elem összehasonlítható
(g) Minden két elemnek van infimuma
(h) Van két olyan elem, melynek nincs supremuma
(i) Minden két elem között van egy harmadik
(j) Van két nem összehasonlítható elem

[(iii) Pl. Ha $t = a, b, \ldots, n$–re σ_t a (t) kijelentést formalizálja, speciálisan (m)–et σ_m az $n = 3$ esetben, akkor a
$\Sigma \doteq \{ \sigma_a , \neg \sigma_b , \sigma_c , \neg \sigma_d , \neg \sigma_e , \sigma_f , \neg \sigma_g , \sigma_h , \sigma_i , \sigma_j , \neg \sigma_k , \sigma_l , \sigma_m , \neg \sigma_n \}$
elmélet konzisztens, mert modellje egy háromelemű ciklus.]

Feladat

Adjunk példát konzisztens ill. teljes elméletekre!

[Például adott p prím esetén a p–edrendű csoportok elmélete konzisztens, hisz van modellje: minden p–re van p–edrendű csoport. Teljes is, mert prímszámrendű csoport ciklikus és nyilván két p–edrendű ciklikus csoport izomorf (ha az egyik generatora a, a másiké b, akkor könnyen ellenőrizhetően az $f(a^k) \doteq b^k$ minden $0 \leq k < p$–re izomorfizmus a kettő között), így az elmélet bármely két modellje izomorf, vagyis a legutolsó Következmény szerint elemien ekvivalens is, azaz az utolsó előtti Következmény alapján az elmélet teljes.]

Feladat

(i) Konzisztens ill. teljes–e a 2. fejezetben vizsgált elméletek közül az, melynek modelljei a végtelen dimenziós kocka egyszeri feldobásának eredményei ill. egy halmaz (részleges) szigorú rendezései?

(ii) Vizsgáljuk meg konzisztencia és teljesség szempontjából a 2. fejezetben és az előző feladatokban szereplő összes elméletet!

Feladat (VÉGES TELJES BŐVÍTÉS = VÉGES ESETSZÉTVÁLASZTÁS)

Tegyük fel, hogy $n \geq 2$ és
(a) $\Sigma \models \sigma_1 \vee \sigma_2 \vee \ldots \vee \sigma_n$
(b) σ_i független Σ–tól minden $1 \leq i \leq n$ esetén
(c) $\Sigma \cup \{\sigma_i\}$ teljes minden $1 \leq i \leq n$ esetén.

Bizonyítsuk be, hogy
τ független Σ–tól iff van $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, hogy $\Sigma \cup \{\sigma_i\} \models \tau$ és $\Sigma \cup \{\sigma_j\} \models \neg \tau$.

[$\Longrightarrow$: $(\forall\, i)\,\big(\Sigma \cup \{\sigma_i\} \models \tau\big) \wedge \mathfrak{A} \models \Sigma \rightsquigarrow \mathfrak{A} \models \sigma_1 \vee \sigma_2 \vee \ldots \vee \sigma_n \rightsquigarrow \mathfrak{A} \models \sigma_i$ valamely $1 \leq i \leq n$–re $\rightsquigarrow \mathfrak{A} \models \Sigma \cup \{\sigma_i\} \models \tau$.
$\Longleftarrow$: $(\exists\, \mathfrak{A})\,(\mathfrak{A} \models \Sigma \cup \{\sigma_i\})$. $\Sigma \cup \{\sigma_i\} \models \tau \wedge \mathfrak{A} \models \Sigma \cup \{\sigma_i\} \rightsquigarrow \mathfrak{A} \models \tau \rightsquigarrow \Sigma \not\models \neg \tau$]