Serény György

HALMAZELMÉLET ELEMEI

Vázlat

1. A tárgyalási univerzum

1.1 A nyelv

a. Szimbólumok

(i) Szabad változók: $v_2, v_4, \ldots$, Kötött változók: $v_1, v_3, \ldots$,
(ii) Reláció szimbólum: $\in$ Identitás szimbólum: $=$
(iii) Logikai szimbólumok
Elsődleges: $\neg, \wedge, \forall$ Származtatott: $\Rightarrow, \vee, \iff, \exists$
(iv) Segédszimbólumok: $(,), [,] \{, \}, :$
A szabad változók feletti metaváltózók: a, b, c, d és indexelt változataik
A kötött változók feletti metaváltozók: x, y, z, w és indexelt változataik.

b. Szűk értelemben vett formulák

(i) Ha a, b szabad változók, akkor $a \in b$ szűk értelemben vett formula
(ii) Ha φ és ψ szűk értelemben vett formulák, akkor $\neg\varphi$ és $\varphi \wedge \psi$ is azok
(iii) Ha φ szűk értelemben vett formula, akkor $(\forall x)\varphi(x)$ is az, ha x nem kötött változója φ–nek, ahol *itt és a továbbiakban is* tetszőleges η esetén $\eta(x)$ az a formula, melyet úgy kapunk, hogy η valamely szabad változójának minden előfordulását kicseréljük x–re

Definíció

(i) $\varphi \Rightarrow \psi \doteq \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$ (ii) $\varphi \vee \psi \doteq \neg\varphi \Rightarrow \psi$ (iii) $\mathbb{F} \doteq \neg\, c_1 = c_1$
(iv) $\varphi \iff \psi \doteq (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$ (v) $(\exists x)\varphi \doteq \neg(\forall x)\varphi(x)$

Megjegyzés

1) A fenti és a továbbikban bevezetendő szimbólumok szándékolt jelentése természetesen a szokásos.
2) Ha mást nem mondunk, φ, ψ, η szűk értelemben vett formulákat jelölnek.
3) $\Longrightarrow$ és $\Rightarrow$ ugyanazt jelentik. A tagadást gyakran áthúzással jelöljük, például $a \notin b \doteq \neg(a \in b)$. Néha elhagyjuk az $\wedge$–t, pl. $a \in b \in c \doteq a \in b \wedge b \in c$ vagy $\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \eta \doteq (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \eta)$ és persze a felesleges zárójeleket is.
4) A meta 'ha ... akkor', azaz a 'mivel ... tehát' jelölése a következő: $\rightsquigarrow$, míg a meta–ellentmondásé: $\lightning$.
5) Ahogy már eddig is tettük, a 'definíció szerint legyen' kifejezés rövidítésére a szokásos $\doteq$ jelölést használjuk.

Definíció

A szabad változókat *halmaz(szimbólumok)*nak és a $\{x : \varphi(x)\}$ kifejezéseket *osztály(szimbólumok)*nak nevezzük. Az osztályok és halmazok feletti metaváltozók a nagybetük: $A, B, C, \ldots$ (esetleg indexekkel) és néhány esetben speciális szimbólumok, pl. $<$.

Definíció

(i)
$$a \in \{x : \varphi(x)\} \doteq \varphi(a)$$

ahol persze $\varphi(a)$ az a formula, melyet φ–ben azon szabad változó minden előfordulásának a–ra való cserélésével kapunk, melynek minden előfordulásának x–re való cserélésével $\varphi(x)$–et kaptuk és x nem szerepel φ–ben.

(ii) $$A = B \mathrel{\hat{=}} (\forall x)(x \in A \iff x \in B)$$
ha A és B közül legalább az egyik osztály.

(iii) $$A \in B \mathrel{\hat{=}} (\exists x)(x = A \wedge x \in B)$$
ha A osztály.

1.2 Bizonyítás

a. Logikai axiómák

(i) Propozicionális axiómák
(ii) Kvantoraxiómák:
(1) $(\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi(x)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\forall x)\psi(x))$,
ahol az a szabad valtozó, melynek x–re való cseréjével $\psi(x)$–et kaptuk nem fordul elő φ–ben.
(2) $(\forall x)\varphi(x) \Rightarrow \varphi(a)$,
ahol $\varphi(a)$ az a formula, melyet φ–ből azon szabad változó minden előfordulásának a–ra való cserélésével kapunk, melynek minden előfordulását x–re cserélve kaptuk $\varphi(x)$–et.
(iii) Identitás axiómák
$a = a, \quad a = b \Rightarrow (\varphi(a) \Rightarrow \varphi(b))$,
ahol $\varphi(a)$ és $\varphi(b)$ az a formula, melyet φ–ből valamely szabad változó minden előfordulásának a–ra ill. b–re való cseréjével kapunk.

b. Levezetési szabályok

(i) Modus ponens: φ és $(\varphi \Rightarrow \psi) \rightsquigarrow \psi$
(ii) Generalizálás: $\varphi \rightsquigarrow (\forall x)\varphi(x)$

Megjegyzés
A bizonyítási rendszer tehát a prédikátumkalkulus szokásos bizonyítási rendszerének a szűk értelmeben vett formulakra szorítkozott változata, annak minden eredménye így közvetlenül alkalmazható. Megtehettük volna éppen azt is (csak kevésbé lett volna elegáns), hogy megtartjuk az $\mathcal{L} = \langle \in \rangle$ elsőrendű nyelv teljes bizonyítási rendszerét. Ekkor teljesen nyilvánvaló, hogy minden prédikátumkalkulusbeli eredmény átvihető a szűk értelemben vett formulákra, hiszen ezek $\mathcal{L}$ összes formuláinak egy részhalmazát alkotják.

1.3 Alapfogalmak

Definíció
$V \mathrel{\hat{=}} \{x : x = x\}$ — *univerzális osztály*
$0 \mathrel{\hat{=}} \{x : x \neq x\}$ — *üres osztály*

Állítás
(i) $(\forall x)(x \in V)$
(ii) $(\forall x)(x \notin 0)$

Definíció
$\mathcal{M}(A) \mathrel{\hat{=}} (\exists x)(x = A)$ — *halmaz* (*Menge* (Cantor))
$\mathcal{P}r(A) \mathrel{\hat{=}} \neg\mathcal{M}(A)$ — *valódi osztály (proper class)*

Hasznos jelölések

(i) $\{A(x_1,\ldots,x_n) : \varphi(x_1,\ldots,x_n)\} \stackrel{\circ}{=}$
$$\{x : (\exists x_1)(\exists x_2)\ldots(\exists x_n)(x = A(x_1,\ldots,x_n) \wedge \varphi(x_1,\ldots,x_n)\},$$
ahol $A(x_1,\ldots,x_n)$ és $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ ugyanazoknak a szabad változóknak a kicserélésével adódik A ill. φ–ból.

(ii) (a) $(\forall x_1,\ldots,x_n) \stackrel{\circ}{=} (\forall x_1)\ldots(\forall x_n)$ (b) $(\exists x_1,\ldots,x_n) \stackrel{\circ}{=} (\exists x_1)\ldots(\exists x_n)$

(iii) (a) $(\forall x \in A)\,\varphi \stackrel{\circ}{=} (\forall x)(x \in A \Rightarrow \varphi)$ (b) $(\exists x \in A)\,\varphi \stackrel{\circ}{=} (\exists x)(x \in A \wedge \varphi)$
(c) $\{x \in A : \varphi(x)\} \stackrel{\circ}{=} \{x : x \in A \wedge \varphi(x)\}$. Többváltozóra analóg.

(iv) $(\exists\,!\,x)\,\varphi(x) \stackrel{\circ}{=} (\exists x)\varphi(x) \wedge (\forall x)(\forall y)(\varphi(x) \wedge \varphi(y) \Rightarrow x = y)$

2. Az első öt axióma

Az extenzionalitási axióma ($\mathbf{Ax}_1$):
$$(\forall x)(x \in a \Longleftrightarrow x \in b) \implies a = b$$

Következmény

$A = B \iff (\forall x)(x \in A \iff x \in B)$

Definíció

$A \subseteq B \stackrel{\circ}{=} (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$ *rész(osztály/halmaz)*
$A \subset B \stackrel{\circ}{=} A \subsetneq B \stackrel{\circ}{=} A \subseteq B \wedge A \neq B$ *valódi rész(osztály/halmaz)*

Jelölés

$A \supseteq B \stackrel{\circ}{=} B \subseteq A$, $A \supset B \stackrel{\circ}{=} B \subset A$

Következmény

$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

Állítás

(i) (a) $A = A$ (b) $A = B \Rightarrow B = A$ (c) $A = B \wedge B = C \Rightarrow A = C$
(ii) $A = B \Rightarrow (\varphi(A) \iff \varphi(B))$

Állítás

(i) $a = \{x : x \in a\}$
(ii) $\mathcal{P}r(\{x : x \notin x\})$ (RUSSEL PARADOXON)

Következmény

(i) Minden halmaz osztály
(ii) Nem minden osztály halmaz

Definíció

$\{a, b\} \stackrel{\circ}{=} \{x : x = a \vee x = b\}$ *pár*

$\{a\} \stackrel{\circ}{=} \{a, a\}$ *szingleton*

$(a, b) \stackrel{\circ}{=} \{\{a\}, \{a, b\}\}$ *rendezett pár*

A páraxióma ($\mathbf{Ax}_2$):

$$\mathcal{M}(\{a,b\})$$

Állítás

$(a,b)=(c,d) \iff a=c \wedge b=d$

Definíció

$\cup A = \{x : (\exists y)(x \in y \wedge y \in A\}$ *unió*
$\cap A = \{x : (\forall y)(y \in A \Rightarrow x \in y\}$ *metszet*

Feladat

$a \in A \Longrightarrow \cap A \subseteq a \subseteq \cup A$

Az unióaxióma ($\mathbf{Ax}_3$):

$$\mathcal{M}(\cup a)$$

Megjegyzés

Eddig és a továbbiakban is, amennyiben valamely új osztály tipust csak halmazokra definiálunk, mint például a párt – szemben az unióval – , ez azt jelenti, hogy csak halmazokra, *de minden halmazra* definiáltuk ezt a jelölést, azaz például $\{\,\mathcal{R}u\,\}$ nem definiált, de – az únióaxióma miatt – $\{\cup a\}$ igen, nevezetesen persze

$\{\cup a\} \mathrel{\hat{=}} \{x : x=\cup a \vee x=\cup a\}=\{x : x=\cup a\}=\{x : (\forall y)\big(y\in x \iff (\exists z)(y\in z \ \wedge\ z\in a)\big)\}.$

Ugyanakkor természetesen $\cup\mathcal{R}u$ jól definiált: $\cup\mathcal{R}u = \{x : (\exists y)(x \in y \ \wedge\ y \in \mathcal{R}u)\} =$
$= \{x : (\exists y)(x\in y \ \wedge\ y \notin y)\}$.

Definíció

$A\cup B \mathrel{\hat{=}} \{x : x\in A \vee x\in B\}$ *unió*
$A\cap B \mathrel{\hat{=}} \{x : x\in A \wedge x\in B\}$ *metszet*
$A\setminus B \mathrel{\hat{=}} \{x : x\in A \wedge x\notin B\}$ *különbség*

Állítás

(i) $a\cup b=\cup\{a,b\}$ (ii) $a\cap b=\cap\{a,b\}$

Következmény

$\mathcal{M}(a\cup b)$

[pár– és unióaxióma]

Definíció

$\mathcal{P}(a) \mathrel{\hat{=}} \{x : x\subseteq a\}$ *hatványhalmaz*

A hatványhalmazaxióma ($\mathbf{Ax}_4$):

$$\mathcal{M}(\mathcal{P}\,(a))$$

Állítás

(i) $\cup\mathcal{P}(a)=a$ (ii) $a\subseteq\mathcal{P}(\cup a)$

Kérdés

(i) $a \stackrel{?}{=} \mathcal{P}(\cup a)$ (ii) $a \stackrel{?}{\subset} \mathcal{P}(\cup a)$

Definíció

$A \times B \doteq \{(x,y) : x \in A \wedge y \in B\}$ — *Descartes szorzat*

$A^2 \doteq A \times A$

$A^{-1} \doteq \{(y,x) : (x,y) \in A\}$ — *inverz*

$\mathcal{R}el(A) \doteq A \subseteq V^2$ — *reláció*

$\mathcal{U}n(A) \doteq (\forall x,y,z)((x,y),(x,z) \in A \Rightarrow y = z)$ — *egyértékű*

$\mathcal{F}nc(A) \doteq \mathcal{R}el(A) \wedge \mathcal{U}n(A)$ — *függvény*

$\mathcal{D}o(A) \doteq \{x : (\exists y)((x,y) \in A)\}$ — *értelmezési tartomány (domain)*

$\mathcal{R}g(A) \doteq \{y : (\exists x)((x,y) \in A)\}$ — *értékkészlet (range)*

$F\, \mathcal{F}nc\, A \doteq \mathcal{F}nc\,(F) \wedge \mathcal{D}o(F) = A$

$A \,|\, B \doteq \{(x,y) \in A : x \in B\}$ — *megszorítás*

$A^*B \doteq \mathcal{R}g(A \,|\, B)$ — *kép*

$A \circ B \doteq \{(x,y) : (\exists z)((x,z) \in B \wedge (z,y) \in A)\}$ — *összetett (kompozició)*

$F : A \to B \doteq F\, \mathcal{F}nc\, A \wedge \mathcal{D}o(F) \subseteq B$, $\quad {}^a b \doteq \{f : \ f : a \to b\}$

Jelölés

$xRy \doteq (x,y) \in R$

Állítás

$A^*B = \{y : (\exists x \in B)(\,(x,y) \in A\,)\}$

A helyettesítési axiómaséma ($\mathbf{Ax}_5$):

$$\mathcal{F}nc(F) \Rightarrow \mathcal{M}(F^*a)$$

Következmény (ZERMELO SZEPARÁCIÓ AXIÓMASÉMÁJA)

$\mathcal{M}(a \cap A)$

$[\ F \doteq \{(x,y) : x \in A \wedge x = y\} \implies \mathcal{F}nc(F) \wedge F^*a = a \cap A\ ]$

Következmény (ÜRES HALMAZ AXIÓMA)

$\mathcal{M}(0)$

$[\ ((\forall x)(x \notin A) \Rightarrow A = 0) \wedge (A \doteq \{x : x \notin a\} \implies a \cap A = 0)\ ]$

Következmény (HALMAZ RÉSZE HALMAZ)

$A \subseteq a \implies \mathcal{M}(A)$

Következmény

(i) $\mathcal{M}(a \times b)$ $\quad$ (ii) $\mathcal{M}({}^a b)$ $\quad$ (iii) $\mathcal{P}r(V)$

[(i) $a \times b \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$ $\quad$ (ii) ${}^a b \subseteq \mathcal{P}(a \times b)$ $\quad$ (iii) $\{x : x \notin x\} \subseteq V$]

Állítás

(i) $\mathcal{M}(\mathcal{D}o\,(a))$ $\quad$ (ii) $\mathcal{M}(\mathcal{R}g\,(a))$

[(i) $F \doteq \{((x,y),x) : (x,y) \in a\} \implies F\, \mathcal{F}nc\ a \wedge F^*\, a = \mathcal{D}o\,(a)$; $\quad$ (ii) analóg.]

Kérdés

(i) $\mathcal{M}(\{f : f\, \mathcal{F}nc\ a\})$? $\qquad$ (ii) $\mathcal{M}(\{f : f\, \mathcal{F}nc\ A \wedge \mathcal{R}g\, f \subseteq b\})$?

[(i) $a \neq 0 \Rightarrow \mathcal{P}r\,(\{f : f\,\mathcal{F}nc\ a\})$ mert $F \doteq \big\{\big(y, \{(x,y) : x \in a\}\big) : y \in V\big\} \Longrightarrow$
$\Rightarrow \mathcal{R}g(F) \subseteq \{f : f\,\mathcal{F}nc\ a\} \,\wedge\, (a \neq 0 \Rightarrow F^{-1}\mathcal{F}nc\,\mathcal{R}g(F) \wedge \mathcal{R}g\,F^{-1} = V) \,\wedge\, \mathcal{P}r\,(V)\,.$
(ii) $\mathcal{M}(\mathcal{D}o\,(f)) \rightsquigarrow (\exists a)(\{f : f\,\mathcal{F}nc\ A \wedge \mathcal{R}g\,f \subseteq b\} = {}^{a}b)$]

Definíció

$F(a) \doteq \{x : (\exists y)(x \in y \,\wedge\, (a,y) \in F) \,\wedge\, (\exists\,!\,y)\big((a,y) \in F\big)\}$ *érték*

Állítás

(i) $(\exists\,!\,y)\big((a,y) \in F\big) \Longrightarrow (F(a) = b \iff (a,b) \in F)$

(ii) $\mathcal{M}\,(F(a))$

(iii) $\mathcal{F}nc\,(F) \Longrightarrow \mathcal{M}\,(F \mid a)$

[(iii) $F \mid a \subseteq a \times F^{*}a$]

Kérdés

Fenti (iii)–ban kell a $\mathcal{F}nc\,(F)$ feltétel?

[Igen: $\big(\{0\} \times V\big)\big|\,\{0\} = V$]

Jelölés

$\bigcup_{x\in A} F(x) \doteq \cup\{F(x) : x \in A\}$ $\bigcap_{x\in A} F(x) \doteq \cap\{F(x) : x \in A\}$

Feladat

$\mathcal{D}o(\bigcup_{x\in A} F(x)) = \bigcup_{x\in A} \mathcal{D}o\,(F(x))$ ($\bigcap$–re és $\mathcal{R}g$–re analóg)

3. Rendszámok

3.1 Rendezés

Jelölés

$a > b \doteq b < a$ $a \leq b \doteq a < b \vee a = b$ $a \geq b \doteq a > b \vee a = b$

Definíció

$\mathcal{R}ef\,(A,<) \doteq (\forall x \in A)(x < x)$ *reflexív*

$\mathcal{I}rr\,(A,<) \doteq (\forall x \in A)(x \not< x)$ *irreflexív*

$\mathcal{S}ym\,(A,<) \doteq (\forall x \in A)(\forall y \in A)(x < y \Rightarrow y < x)$ *szimmetrikus*

$\mathcal{T}rs\,(A,<) \doteq (\forall x,y,z \in A)(x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z)$ *tranzitív*

$\mathcal{P}o\,(A,<) \doteq \mathcal{I}rr\,(A,<) \wedge \mathcal{T}rs\,(A,<)$ *(részben) rendezett (partially ordered)*

$\mathcal{L}o\,(A,<) \doteq \mathcal{P}o\,(A,<) \wedge (\forall x,y \in A)(x \leq y \vee y \leq x)$ *lineárisan rendezett (linearly ordered) (lánc)*

$a\ \mathcal{M}ax_{<}\,A \doteq a \in A \wedge \neg(\exists x \in A)(a < x)$ *maximális*

$a\ \mathcal{M}in_{<}\,A \doteq a \in A \wedge \neg(\exists x \in A)(x < a)$ *minimális*

$a\ \mathcal{L}st_{<}\,A \doteq a \in A \wedge (\forall x \in A)(x \leq a)$ *legnagyobb (utolsó, last)*

$a\ \mathcal{F}st_{<}\,A \doteq a \in A \wedge (\forall x \in A)(a \leq x)$ *legkisebb (első, first)*

$a\ \mathcal{U}b_{<}\,A \doteq (\forall x \in A)(x \leq a)$ *felső korlát (upper bound)*

$a\ \mathcal{L}b_{<}\,A \doteq (\forall x \in A)(a \leq x)$ *alsó korlát (lower bound)*

$a\ \mathcal{S}up_{<}\,A \doteq a\,\mathcal{F}st_{<}\{x : x\,\mathcal{U}b_{<}\,A\}$ *suprémum*

$a\ \mathcal{I}nf_{<}\,A \doteq a\,\mathcal{L}st_{<}\{x : x\,\mathcal{L}b_{<}\,A\}$ *infimum*

Állítás

(i) (a) $\mathcal{P}o\,(A,<) \wedge a,b \in A \Longrightarrow (a<b \Rightarrow b \not\leq a)$

(b) $\mathcal{L}o\,(A,<) \wedge a,b \in A \Longrightarrow (a \not< b \Rightarrow b \leq a)$

(ii) (a) $a\ \mathcal{L}st_< A \Longrightarrow a\ \mathcal{M}ax_< A$ (b) $a\ \mathcal{F}st_< A \Longrightarrow a\ \mathcal{M}in_< A$

(c) $\mathcal{L}o\,(A,<) \Longrightarrow (a\ \mathcal{M}ax_< A \Rightarrow a\ \mathcal{L}st_< A) \wedge (a\ \mathcal{M}in_< A \Rightarrow a\ \mathcal{F}st_< A)$

(iii) (a) $a\ \mathcal{S}up_< A \wedge a \in A \Longrightarrow a\ \mathcal{L}st_< A$ (b) $a\ \mathcal{I}nf_< A \wedge a \in A \Longrightarrow a\ \mathcal{F}st_< A$

(iv) (a) $a\,\mathcal{L}st_< A\ \wedge\ b\,\mathcal{L}st_< A \Longrightarrow a{=}b$ (b) $a\,\mathcal{F}st_< A\ \wedge\ b\,\mathcal{F}st_< A \Longrightarrow a{=}b$

Megjegyzés

(i)(b), (ii)(c)–ben a $\mathcal{L}o\,(A,<)$ feltétel kell: $< \,\mathrel{\hat{=}}\, \{(c,a),(c,b)\}$, $A \mathrel{\hat{=}} \{a,b,c\}$.

Állítás

Ha $\subset^* \mathrel{\hat{=}} \{(x,y) : x \subset y\}$, akkor

(i) $\mathcal{P}o\,(A,\subset^*)$ (ii) (a) $\cup A\, \mathcal{S}up_{\subset^*} A$ (b) $\cap A\, \mathcal{I}nf_{\subset^*} A$

Következmény

$A \neq 0 \Longrightarrow \mathcal{M}(\cap A)$

[Halmaz része halmaz]

Megjegyzés

Feltétel kell: $\cap\, 0 = V$

Definíció

(i) $\mathcal{S}up\, A \mathrel{\hat{=}} \cup\, A$ (ii) $\mathcal{I}nf\ A \mathrel{\hat{=}} \cap\, A$

Állítás

(i) $A \subseteq B \Longrightarrow \mathcal{S}up\, A \subseteq \mathcal{S}up\, B$ (ii) $A \subseteq B \Longrightarrow \mathcal{I}nf\ A \supseteq \mathcal{I}nf\ B$

3.2 Elemi rendszámelmélet

Definíció

$\mathcal{W}o\,(A,<) \mathrel{\hat{=}} \mathcal{L}o\,(A,<) \wedge (\forall x)(x \subseteq A \wedge x \neq 0 \Rightarrow (\exists y)(y\,\mathcal{F}st_< x))$ *jólrendezett (well ordered)*

$\mathcal{T}r\,(A) \mathrel{\hat{=}} (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \subseteq A)$ *tranzitív*

$\in^* \mathrel{\hat{=}} \{(a,b) : a \in b\}$

$\mathcal{O}rd(a) \mathrel{\hat{=}} \mathcal{T}r\,(a) \wedge \mathcal{W}o\,(a,\in^*)$ *rendszám (ordinal)*

$\mathcal{O}n \mathrel{\hat{=}} \{x : \mathcal{O}rd(x)\}$

Jelölés

Görög betű mindig rendszámot jelöl, tehát például:

$\varphi(\alpha) \mathrel{\hat{=}} \mathcal{O}rd(\alpha) \wedge \varphi(\alpha)$, $(\forall\alpha)\varphi(\alpha) \mathrel{\hat{=}} (\forall x)(\mathcal{O}rd(x) \Rightarrow \varphi(x))$, $(\exists\alpha)\varphi(\alpha) \mathrel{\hat{=}} (\exists x)(\mathcal{O}rd(x) \wedge \varphi(x))$.

Definíció

$<_{\mathcal{O}n} \mathrel{\hat{=}} \,<\, \mathrel{\hat{=}} \in^* \mid \mathcal{O}n$ azaz $\alpha < \beta \iff \alpha \in \beta$.

Állítás

(i) $\mathcal{O}rd(0)$

(ii) $\mathcal{T}r(On)$ (RENDSZÁM ELEMEI RENDSZÁMOK)

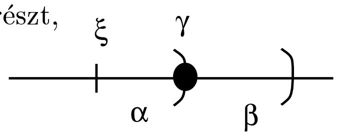
(iii) $\mathcal{O}rd(a) \wedge \mathcal{O}rd(b) \Rightarrow \mathcal{O}rd(a \cap b)$

(iv) $\alpha \subseteq \beta \wedge \alpha \neq \beta \Rightarrow \alpha \in \beta$

(v) $\alpha \subseteq \beta \vee \beta \subseteq \alpha$

[(ii) $(b \in \alpha \implies b \subseteq \alpha) \rightsquigarrow \mathcal{W}o(b, \in^*)$; $\big(x \in y \in b \in \alpha \underset{[\,b \in \alpha \rightsquigarrow b \subseteq \alpha\,]}{\implies} x \in y \in \alpha \implies$
$\underset{[\,y \subseteq \alpha\,]}{\implies} x, y \in \alpha\big) \rightsquigarrow [b \in \alpha \wedge \mathcal{T}rs\,(\alpha, \in^*) \implies (x \in y \in b \implies x \in b)] \rightsquigarrow \mathcal{T}r\,(b)$.

(iv) $\alpha \subseteq \beta \wedge \alpha \neq \beta \implies \beta \setminus \alpha \neq 0$. $\gamma \mathrel{\dot{=}} \mathcal{F}st_{\in^*}(\beta \setminus \alpha) \implies \alpha = \{\xi : \xi < \gamma\}$. Ugyanis egyrészt, $\xi \in \alpha \wedge \xi \not< \gamma \implies \gamma \leq \xi \wedge \xi < \alpha \implies \gamma \in \alpha \implies \mathbb{F}$, másrészt, $\xi < \gamma \implies \xi \in \gamma \in \beta \implies \xi \in \beta \wedge \xi \notin \beta \setminus \alpha \implies \xi \in \alpha$.
Így valóban $\alpha = \{\xi : \xi < \gamma\} = \gamma \in \beta$.



(v) Először is: $\alpha \cap \beta \neq \alpha \implies \alpha \cap \beta = \beta$. Ugyanis, $\gamma \mathrel{\dot{=}} \alpha \cap \beta \wedge \gamma \neq \alpha \wedge \gamma \neq \beta \implies$
$\underset{[\,\gamma \subseteq \alpha \wedge \gamma \subseteq \beta \text{ és (iv)}\,]}{\implies} \gamma \in \alpha \wedge \gamma \in \beta \implies \gamma \in \gamma \implies \mathbb{F}$. Ezért $\alpha \not\subseteq \beta \implies \alpha \cap \beta \neq \alpha \implies$
$\implies \alpha \cap \beta = \beta \implies \beta \subseteq \alpha$.]

Következmény

(i) $\mathcal{L}o\ (\mathcal{O}n, \in^*)$

(ii) $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$

(iii) $\alpha < \beta \iff \alpha \in \beta \iff \alpha \subset \beta$

(iv) $\alpha \leq \beta \iff \alpha \subseteq \beta$

(v) $\alpha \neq 0 \iff \alpha > 0$

[(i) 1) $\alpha \in \alpha \implies (\exists \beta \in \alpha)(\beta \in \beta) \implies \mathbb{F}$. 2) $\mathcal{T}r(\alpha)$. 3) Állítás (iv) és (v).]

Definíció

$\alpha + 1 \mathrel{\dot{=}} \alpha \cup \{\alpha\}$ *rákövetkező*

Példa

$1 \mathrel{\dot{=}} 0 + 1 = 0 \cup \{0\} = \{0\}$, $2 \mathrel{\dot{=}} 1 + 1 = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$,
$3 \mathrel{\dot{=}} 2 + 1 = 2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$, ...

Állítás

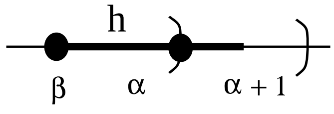
(i) $\alpha + 1 \in \mathcal{O}n$

(ii) $\alpha < \alpha + 1$

(iii) $\beta < \alpha + 1 \iff \beta \leq \alpha$ (azaz $\neg(\exists \beta)(\alpha < \beta < \alpha + 1)$)

(iv) $\alpha + 1 \leq \beta \iff \alpha + 1 < \beta + 1 \iff \alpha < \beta$

[(i) 1) $\alpha + 1 \subseteq \mathcal{O}n \rightsquigarrow \mathcal{L}o(\alpha + 1, \in^*)$. 2) $\mathcal{W}o(\alpha + 1, \in^*)$: t. fel $h \subseteq \alpha + 1 \wedge h \neq 0$.
a) $\alpha \cap h \neq 0 \wedge \beta\, \mathcal{F}st_<(\alpha \cap h) \implies \beta\, \mathcal{F}st_<\, h$, hiszen
$\gamma < \beta \implies \gamma < \beta \wedge \beta \in \alpha \cap h \implies \gamma < \alpha \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow \gamma \in h \wedge \gamma < \beta \implies \gamma \in \alpha \cap h \implies \gamma \geq \beta \implies \mathbb{F}$.



b) $\alpha \cap h = 0 \wedge h \neq 0 \wedge h \subseteq \alpha + 1 \implies h = \{\alpha\} \implies \alpha\, \mathcal{F}st_<\, h$. 3) $\mathcal{T}r(\alpha + 1)$: $x \in \alpha + 1 \implies$
$\implies x \in \alpha \vee x = \alpha \implies x \subseteq \alpha \subseteq \alpha + 1$.

(ii) $\alpha \in \alpha \cup \{\alpha\}$

(iii) $\beta < \alpha + 1 \implies \beta \in \alpha \vee \beta = \alpha \implies \beta \leq \alpha < \alpha + 1 \implies \beta < \alpha + 1$

(iv)
1) $\alpha < \beta \Longrightarrow \big(\gamma \in \alpha+1 \Rightarrow \gamma \in \alpha \vee \gamma = \alpha \Rightarrow \gamma \in \beta \vee \gamma \in \beta \Rightarrow \gamma \in \beta\big) \Longrightarrow \alpha+1 \subseteq \beta \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \alpha+1 \le \beta < \beta+1 \Longrightarrow \alpha+1 < \beta+1$
2) $\alpha \ge \beta \Longrightarrow \alpha > \beta \vee \alpha = \beta \Longrightarrow \alpha+1 > \beta+1 \vee \alpha+1 = \beta+1 \Longrightarrow \alpha+1 \ge \beta+1 \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow \alpha+1 < \beta+1 \Longrightarrow \neg(\alpha+1 \ge \beta+1) \Longrightarrow \neg(\alpha \ge \beta) \Longrightarrow \alpha < \beta$]

Állítás

$\mathcal{W}o(\mathcal{O}n, \in^*)$

[(a) Fenti Következmény (i) alapján: $\mathcal{L}o(\mathcal{O}n, \in^*)$. (b) $h \subseteq \mathcal{O}n \wedge h \neq 0 \Rightarrow (\exists\delta)(\delta \in h) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\exists\delta)(\delta \in (\delta+1) \cap h)) \Rightarrow (\exists\alpha)(\alpha \cap h \neq 0) \Rightarrow (\exists\alpha)(\exists\beta)(\beta\, \mathcal{F}st_<(\alpha \cap h)$ és, ahogy már az előző biz. (i) 2)a)–ban láttuk: $\beta\, \mathcal{F}st_<(\alpha \cap h) \Rightarrow \beta\, \mathcal{F}st_< h$.]

Következmény

(i) $\mathcal{P}r(\mathcal{O}n)$ (BURALI–FORTI PARADOXON)

(ii) $a \subseteq \mathcal{O}n \wedge \mathcal{T}r(a) \Longrightarrow a \in \mathcal{O}n$

(iii) $A \subseteq \mathcal{O}n \wedge \mathcal{T}r(A) \Longrightarrow A \in \mathcal{O}n \vee A = \mathcal{O}n$

[(i) $\mathcal{M}(\mathcal{O}n) \Rightarrow (\exists a)(\mathcal{O}n = a)$; $\quad \mathcal{O}n = a \Rightarrow \mathcal{T}r(a) \wedge \mathcal{W}o(a, \in^*) \Rightarrow a \in \mathcal{O}n \rightsquigarrow \mathcal{O}n = a \Rightarrow$
$\Rightarrow a \in \mathcal{O}n \wedge \mathcal{O}n = a \Rightarrow a \in a \Rightarrow \mathbb{F}$
(ii) Nyilván $a \subseteq b \wedge \mathcal{W}o(b,<) \Longrightarrow \mathcal{W}o(a,<)$
(iii) $\mathcal{T}r(A) \Longrightarrow (\forall\alpha \in A)(\forall\beta \in \alpha)(\beta \in A) \Longrightarrow (\forall\beta \notin A)(\forall\alpha \in A)(\beta > \alpha) \Longrightarrow$
$\Rightarrow (\forall\beta \notin A)(\forall\alpha)(\alpha \in A \Rightarrow \alpha \in \beta) \Longrightarrow (\forall\beta \notin A)(A \subseteq \beta) \Longrightarrow [(\exists\beta \notin A) \Rightarrow (\exists\beta)(A \subseteq \beta)] \Rightarrow$
$\Longrightarrow [(\exists\beta \notin A) \Rightarrow \mathcal{M}A)] \Longrightarrow [A \subseteq \mathcal{O}n \wedge A \neq \mathcal{O}n \Rightarrow \mathcal{M}(A)]$ és (ii).]

Állítás

(i) $(\forall x \in A)\mathcal{T}r\,(x) \Longrightarrow \mathcal{T}r\,(\cup A) \wedge \mathcal{T}r\,(\cap A)$

(ii) $A \subseteq \mathcal{O}n \Longrightarrow \cup A \subseteq \mathcal{O}n \wedge (A \neq 0 \Rightarrow \cap A \subseteq \mathcal{O}n)$

[(i) $x \in \cup A \Longrightarrow (\exists y \in A)(x \in y) \Longrightarrow (\exists y \in A)(x \subseteq y) \Longrightarrow x \subseteq \cup A$.
$x \in \cap A \Longrightarrow (\forall y \in A)(x \in y) \Longrightarrow (\forall y \in A)(x \subseteq y) \Longrightarrow x \subseteq \cap A$,
(ii) $x \in \cup A \Longrightarrow (\exists\alpha \in A)(x \in \alpha) \Longrightarrow x \in \mathcal{O}n$
$x \in \cap A \wedge A \neq 0 \Longrightarrow (\forall\alpha \in A)(x \in \alpha) \wedge (\exists\alpha \in A) \Longrightarrow x \in \mathcal{O}n$]

Következmény

Rendszámok minden nemüres rész*osztály*ának van első eleme:

$$A \subseteq \mathcal{O}n \wedge A \neq 0 \Longrightarrow \mathcal{I}nf\, A \in A$$

[T. fel $A \subseteq \mathcal{O}n \wedge A \neq 0$.
1) $\mathcal{I}nf\, A \in \mathcal{O}n$: a) $\mathcal{M}(\mathcal{I}nf\, A)$ (7. old Következmény). b) $\mathcal{T}r\,(\mathcal{I}nf\, A)$: előző Áll.
c) $\mathcal{W}o\,(\mathcal{I}nf\, A, \in^*)$ előző Áll. miatt mert nyilván $A \subseteq B \wedge \mathcal{W}o(B,<) \Longrightarrow \mathcal{W}o(A,<)$
2) $\beta \doteq \mathcal{I}nf A \wedge \beta \notin A \Longrightarrow \beta \notin A \wedge (\forall\alpha)(\alpha \in A \Rightarrow \alpha \ge \beta) \Longrightarrow (\forall\alpha)(\alpha \in A \Rightarrow \alpha > \beta) \Rightarrow$
$\Longrightarrow (\forall\alpha)(\alpha \in A \Rightarrow \alpha \ge \beta+1) \Longrightarrow \mathbb{F}$ hiszen $\beta \doteq \mathcal{I}nf\, A$.]

Következmény

$A \subseteq \mathcal{O}n \Longrightarrow \mathcal{S}up\, A \in \mathcal{O}n \vee \mathcal{S}up\, A = \mathcal{O}n$

Következmény

(i) (a) $a \subseteq \mathcal{O}n \Longrightarrow \mathcal{S}up\, a \in \mathcal{O}n$ (b) $\mathcal{S}up\, \alpha \in \mathcal{O}n$

(ii) (a) $a \subseteq \mathcal{O}n \wedge a \neq 0 \Longrightarrow \mathcal{I}nf\, a \in \mathcal{O}n$ (b) $\alpha \neq 0 \Longrightarrow \mathcal{I}nf\, \alpha \in \mathcal{O}n$

3.3 Rendszámok osztályozása

Definíció

$K_I \mathrel{\hat{=}} \{\alpha : \alpha = 0 \vee (\exists\beta)(\alpha = \beta + 1)\}$

$K_{II} \mathrel{\hat{=}} \mathcal{O}n \setminus K_I$

K_I nemzérus elemeit *rákövetkező*–, míg K_{II} elemeit *limes*rendszámoknak nevezzük.

Megjegyzés

Nyilván összesen 3 egymást kizáró eset van:

1. $\alpha = 0$
2. $(\exists\beta)(\alpha = \beta + 1)$, azaz α rákövetkező.
3. $\alpha \neq 0 \wedge \neg(\exists\beta)(\alpha = \beta + 1)$, azaz α limes.

Állítás

$\cup\alpha \subseteq \alpha$

$[\ \beta \in \cup\alpha \Longrightarrow (\exists\gamma \in \alpha)(\beta \in \gamma) \Longrightarrow (\exists\gamma)(\beta \in \gamma \in \alpha) \Longrightarrow \beta \in \alpha\ ]$

Megjegyzés

Az állítás alapján összesen 2 egymást kizáró eset van:

1. $\cup\alpha \in \alpha$
2. $\cup\alpha = \alpha$

Állítás

Az alábbi állítások ekvivalensek:

(i) α rákövetkező

(ii) $\cup\alpha \in \alpha$

(iii) $\alpha = \cup\alpha + 1$

$[$ (i) $\rightsquigarrow$ (ii) : $\alpha = \beta + 1 \Longrightarrow \beta \in \alpha \wedge (\forall\gamma \in \alpha)(\gamma < \beta \vee \gamma = \beta) \Longrightarrow \beta = \mathcal{S}up\ \alpha = \cup\alpha$

(ii) $\rightsquigarrow$ (iii) : $\gamma \in \cup\alpha + 1 \iff \gamma \in \mathcal{S}up\ \alpha + 1 \iff \gamma < \mathcal{S}up\ \alpha + 1 \iff$

$\iff \gamma \leq \mathcal{S}up\ \alpha \in \alpha \iff \gamma \leq \mathcal{S}up\ \alpha < \alpha \iff \gamma \in \alpha$

(iii) $\rightsquigarrow$ (i) : triviális $]$

Állítás

Tetszőleges $\alpha \neq 0$ esetén az alábbi állítások ekvivalensek:

(i) α limes

(ii) $\cup\alpha = \alpha$

(iii) $(\forall\beta < \alpha)(\beta + 1 < \alpha)$

$[$ (i) $\rightsquigarrow$ (ii) : előző állítások alapján (i) $\Longrightarrow \cup\alpha \notin \alpha \Longrightarrow$ (ii).

(ii) $\rightsquigarrow$ (iii) : $\beta \in \alpha = \cup\alpha \Rightarrow (\exists\gamma \in \alpha)(\beta \in \gamma) \Rightarrow (\exists\gamma)(\beta < \gamma < \alpha) \Rightarrow \beta + 1 < \alpha$

(iii) $\rightsquigarrow$ (i) : $\beta < \alpha \Rightarrow \beta + 1 < \alpha \Rightarrow \beta + 1 \neq \alpha$ és $\beta \geq \alpha \Rightarrow \beta + 1 \geq \alpha + 1 > \alpha \Rightarrow \beta + 1 \neq \alpha$ $]$

Következmény

$(\alpha \in K_I \wedge \beta \in K_I) \vee (\alpha \in K_{II} \wedge \beta \in K_{II}) \Longrightarrow \alpha < \beta \Longrightarrow \cup\alpha < \cup\beta$

Kérdés

$K_I \overset{?}{\neq} \mathcal{O}n$, azaz létezik–e limesrendszám ?

Definíció

$\omega \mathrel{\hat{=}} \{\alpha : \alpha + 1 \subseteq K_I\}$

Állítás

$\omega = \{\alpha : \alpha \in K_I \wedge (\forall\beta < \alpha)(\beta \in K_I)\}$

Állítás

(i) $\mathcal{T}r\,(\omega)$

(ii) $\alpha \in \omega \Longrightarrow \alpha + 1 \in \omega$

(iii) $\omega = \cup\,\omega$

[(iii) : Egyrészt az előző old. első Állítás alapján : $\cup\omega \subseteq \omega$. Másrészt $\omega \subseteq \cup\omega$, hisz $\alpha \in \omega \Longrightarrow \alpha + 1 \in \omega \Longrightarrow (\exists\beta \in \omega)(\alpha \in \beta \Longrightarrow \alpha \in \cup\omega)$.]

Megjegyzés

Előző Állítás (iii) és 9.old. utolsó előtti Következmény miatt : $\omega \in \mathcal{O}n \vee \omega = \mathcal{O}n$.

A végtelenségi axióma ($\mathbf{Ax}_6$):

$$\mathcal{M}(\omega)$$

Következmény

(i) ω limesrendszám (ii) $\mathcal{O}n \setminus \omega \neq 0$

Definíció

$\mathcal{O}n \setminus \omega$ elemeit *transzfinit számok*nak nevezzük.

Példa

$\mathcal{S}up\,\omega = \omega = \mathcal{S}up\,(\omega + 1)$

3.4 Transzfinit indukció és rekurzió

INDUKCIÓ

Tétel (TRANSZFINIT INDUKCIÓ ELVE)

$(\forall\,\alpha)\,(\alpha \subseteq A \Rightarrow \alpha \in A) \Longrightarrow \mathcal{O}n \subseteq A$

Bizonyítás.

1) $H \mathrel{\hat{=}} \mathcal{O}n \setminus A \wedge H \neq 0 \Longrightarrow (\exists\alpha \in H)(\alpha = \mathcal{I}nf\ H)$.

2) $\beta \in \alpha \Rightarrow \beta < \alpha \Rightarrow \beta \notin H \Rightarrow \beta \in A \rightsquigarrow \alpha \subseteq A$.

3) $\alpha \subseteq A \rightsquigarrow \alpha \in A$ ↯ $\alpha \in H = \mathcal{O}n \setminus A \rightsquigarrow H = 0 \rightsquigarrow \mathcal{O}n \subseteq A$.

(A legkisebb nem A–belinél kisebb összes rendszám A–beli, tehát a feltétel miatt ő is az: ↯ .)

QED

Következmény

(i) ESETSZÉTVÁLASZTÁSOS (TRANSZFINIT) INDUKCIÓ:

$\big[0 \in A \wedge (\forall\,\beta)\,(\beta \in A \Rightarrow \beta+1 \in A) \wedge (\forall \alpha \in K_{II})\big((\forall\,\beta < \alpha)\,(\beta \in A) \Rightarrow \alpha \in A\big)\big] \Longrightarrow \mathcal{O}n \subseteq A$

(ii) RENDSZÁMRA SZORÍTKOZÓ (TRANSZFINIT) INDUKCIÓ:

$(\forall\,\alpha < \gamma)\,(\alpha \subseteq A \Rightarrow \alpha \in A) \Longrightarrow \gamma \subseteq A$

(iii) RENDSZÁMRA SZORÍTKOZÓ ESETSZÉTVÁLASZTÁSOS (TRANSZFINIT) INDUKCIÓ:

$\big[0 \in A \wedge (\forall\beta < \gamma)(\beta \in A \Rightarrow \beta+1 \in A) \wedge (\forall\alpha < \gamma)\big(\alpha \in K_{II} \wedge ((\forall\,\beta < \alpha)(\beta \in A) \Rightarrow \alpha \in A\big)\big] \Longrightarrow \gamma \subseteq A$

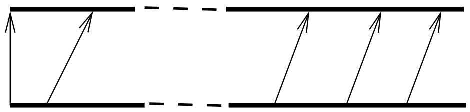
[(i) $\alpha = \beta + 1 \Longrightarrow \big(\alpha \subseteq A \Rightarrow \beta \in \alpha \,\wedge\, \alpha \subseteq A \Rightarrow \beta \in A \Rightarrow \alpha = \beta + 1 \in A\big)$
(ii) $H \doteq \beta \setminus A \,\wedge\, H \neq 0 \Longrightarrow \mathbb{F}$ (pontosan úgy, mint a tétel bizonyításában).]

ALKALMAZÁS

Definíció

$F \nearrow {}^{<^*}_{<} A \doteq F\,\mathcal{F}nc\,A \wedge \mathcal{L}o\,(A,<) \wedge \mathcal{P}o\,(\mathcal{R}g\,(F),\, <^*) \wedge \big((\forall a, b \in A)(a < b \Rightarrow F(a) <^* F(b)\big)$

szigorúan monoton növő



Megjegyzés

A rendezési relációkra vonatkozó indexeket gyakran, mikor implicite egyértelműek, az áttekinthetőbb jelölés kedvéért elhagyjuk, mint pl. ha A rendszám, akkor nyilván (ha mást nem mondunk) $< = \in^*$, tehát pl. ha $F\,\mathcal{F}nc\;\alpha \,\wedge\, \mathcal{R}g\,(F) \subseteq \mathcal{O}n$, akkor csak ennyit írunk: $F \nearrow \alpha$.

Állítás

$F \nearrow {}^{<^*}_{<} A \Longrightarrow \mathcal{L}o\,(\mathcal{R}g\,(F), <^*)$

Állítás

$F \nearrow {}^{<^*}_{<} A \Longrightarrow \mathcal{F}nc(F^{-1}) \,\wedge\, F^{-1} \nearrow {}^{<}_{<^*} \mathcal{R}g\,(F)$

Állítás

$\mathcal{R}g\,(F) \subseteq \mathcal{O}n \,\wedge\, F \nearrow \beta \Longrightarrow (\forall \alpha \in \beta)\,(\alpha \leq F(\alpha))$

[β–ra szorítkozó transzfinit indukció: $A \doteq \{\gamma \in \beta : \gamma \leq F(\gamma)\} \wedge \alpha \in \beta \wedge \alpha \subseteq A \wedge \alpha \notin A \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha \not\leq F(\alpha) \Rightarrow F(\alpha) < \alpha \Rightarrow F(\alpha) \in \alpha \Rightarrow F(\alpha) \in A \,\wedge\, F(\alpha) < \alpha \Rightarrow F(\alpha) \leq F(F(\alpha)) \,\wedge$
$\wedge\, F(F(\alpha)) < F(\alpha) \Rightarrow \mathbb{F}$]

Lemma

$f\,\mathcal{F}nc\,\beta \wedge g\,\mathcal{F}nc\,\gamma \wedge \beta \leq \gamma \wedge (\forall\alpha < \beta)(f(\alpha) = G(f\,|\,\alpha)) \wedge (\forall\alpha < \gamma)(g(\alpha) = G(g\,|\,\alpha)) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow (\forall\alpha < \beta)(f(\alpha) = g(\alpha))$

[Transzfinit indukció: $A \doteq \{\delta : f(\delta) = g(\delta)\} \,\wedge\, \alpha < \beta \,\wedge\, \alpha \subseteq A \Rightarrow (\forall\delta \in \alpha)(f(\delta) = g(\delta)) \Rightarrow$
$\Rightarrow f\,|\,\alpha = g\,|\,\alpha \Rightarrow G(f\,|\,\alpha) = G(g\,|\,\alpha) \Rightarrow f(\alpha) = G(f\,|\,\alpha) = G(g\,|\,\alpha) = g(\alpha) \Rightarrow \alpha \in A$]

REKURZIÓ

Tétel (TRANSZFINIT REKURZIÓ)

$F = \bigcup\{f : (\exists\beta)\big(f\, \mathcal{F}nc\, \beta \wedge (\forall\alpha < \beta)(f(\alpha) = G(f \mid \alpha))\big)\} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow F\, \mathcal{F}nc\, \mathcal{O}n \wedge (\forall\alpha)(F(\alpha) = G(F \mid \alpha)) \wedge \big[H\, \mathcal{F}nc\, \mathcal{O}n \wedge (\forall\alpha)(H(\alpha) = G(H \mid \alpha)) \Rightarrow H = F\big]$

Bizonyítás.
$M \mathrel{\hat=} \{f : (\exists\beta)\big(f\, \mathcal{F}nc\, \beta \wedge (\forall\alpha < \beta)(f(\alpha) = G(f \mid \alpha))\big)\}$. Ekkor a feltétel: $F = \cup M$.

1) $\mathcal{D}o\,(F) = \bigcup_{f\in M} \mathcal{D}o\,(f) \wedge (\forall f \in M)\,(\mathcal{D}o\,(f) \in \mathcal{O}n) \rightsquigarrow \mathcal{D}o\,(F) \subseteq \mathcal{O}n \wedge \mathcal{T}r\,(\mathcal{D}o(F))$
(lásd 9.old. második Állítást)

2) $\mathcal{F}nc\,(F)$ mert relációk úniója lévén reláció és egyértékű is, hisz az utolsó lépésben a fenti Lemmát használva: $(\alpha, a), (\alpha, b) \in F = \cup M \Longrightarrow (\exists f, g \in M)(\big(\alpha, a) \in f \wedge (\alpha, b) \in g\big) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow (\exists f, g \in M)\big(\alpha \in \mathcal{D}o(f) \cap \mathcal{D}o(g) \wedge f(\alpha) = a \wedge g(\alpha) = b\big) \Longrightarrow a = f(\alpha) = g(\alpha) = b$.

3) $(\forall\alpha \in \mathcal{D}o(F))(F(\alpha) = G(F \mid \alpha))$:

a) $\alpha \in \mathcal{D}o(F) = \bigcup_{f\in M} \mathcal{D}o\,(f) \Longrightarrow (\exists f \in M)(\alpha \in \mathcal{D}o(f))$.
b) $f(\alpha) = G(f \mid \alpha)$.
c) $f \subseteq F \rightsquigarrow (\forall\beta \in \mathcal{D}o(f))(f(\beta) = F(\beta)) \rightsquigarrow f(\alpha) = F(\alpha) \wedge f \mid \alpha = F \mid \alpha$.
d) $F(\alpha) = f(\alpha) = G(f \mid \alpha) = G(F \mid \alpha)$.

4) $\mathcal{D}o(F) \notin \mathcal{O}n$:
$\mathcal{D}o(F) \in \mathcal{O}n \wedge \gamma \mathrel{\hat=} \mathcal{D}o(F) \Longrightarrow \mathcal{M}(\gamma) \wedge \mathcal{M}(F^*\gamma) \Longrightarrow \mathcal{M}(\gamma \times F^*\gamma) \Longrightarrow \mathcal{M}(F) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \mathcal{M}(F \cup \{(\gamma, G(F \mid \gamma)\})$ és
$g \mathrel{\hat=} F \cup \{(\gamma, G(F \mid \gamma)\} \Longrightarrow (\forall\alpha < \gamma)\big(g(\alpha) = F(\alpha) = G(F \mid \alpha) = G(g \mid \alpha)\big) \wedge$
$\wedge\, g(\gamma) = G(F \mid \gamma) = G(F) = G(g \mid \gamma) \Longrightarrow (\forall\alpha \in \mathcal{D}o(g) = \gamma + 1)\big(g(\alpha) = G(g \mid \alpha)\big) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow g \in M \Longrightarrow \gamma + 1 = \mathcal{D}o(g) \subseteq \bigcup_{f\in M} \mathcal{D}o\,(f) = \mathcal{D}o(F) = \gamma \Longrightarrow \mathbb{F}$.

5) $\mathcal{D}o(F) = \mathcal{O}n$: 1) , 4) és 9. old. utolsó előtti Következmény .

6) $H\, \mathcal{F}nc\, \mathcal{O}n \wedge (\forall\alpha)(H(\alpha) = G(H \mid \alpha)) \Longrightarrow H = F$:
Transzfinit indukció:
$(\forall\alpha)(H(\alpha) = G(H \mid \alpha)) \wedge A \mathrel{\hat=} \{\beta : H(\beta) = F(\beta)\} \wedge \alpha \subseteq A \Longrightarrow (\forall\beta < \alpha)(H(\beta) = F(\beta)) \Rightarrow$
$\Longrightarrow H \mid \alpha = F \mid \alpha \Longrightarrow H(\alpha) = G(H \mid \alpha) = G(F \mid \alpha) = F(\alpha) \Longrightarrow \alpha \in A \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow H\, \mathcal{F}nc\, \mathcal{O}n \wedge (\forall\alpha)(H(\alpha) = G(H \mid \alpha)) \Longrightarrow (\forall\alpha)(H(\alpha) = F(\alpha)) \Longrightarrow H = F$.

QED

Következmény

(i) RENDSZÁMRA SZORÍTKOZÓ (TRANSZFINIT) REKURZIÓ :
$(\exists!f)\big(f\, \mathcal{F}nc\, \alpha \wedge (\forall\beta < \alpha)(f(\beta) = G(f \mid \beta))\big)$

(ii) ESETSZÉTVÁLASZTÁSOS (TRANSZFINIT) REKURZIÓ :
A tételben G választható olymódon, hogy
$F(0) = a \wedge (\forall\beta)\big(F(\beta + 1) = H(F(\beta))\big) \wedge (\forall\alpha \in K_{II})\big(F(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} F(\beta)\big)$

(iii) RENDSZÁMRA SZORÍTKOZÓ ESETSZÉTVÁLASZTÁSOS (TRANSZFINIT) REKURZIÓ :
A tételben G választható olymódon, hogy
$(\exists!f)\big[f\, \mathcal{F}nc\, \gamma \wedge f(0) = a \wedge (\forall\beta < \gamma)\big(f(\beta+1) = H(f(\beta))\big) \wedge (\forall\alpha < \gamma)(\alpha \in K_{II} \Rightarrow f(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} f(\beta)\big]$

[(i) Létezés: Tétel $f = F \mid \alpha$ – val, egyértelműség: egyértelműségi Lemma (előző old.).
(ii) $G = \{(x,y) : x = 0 \wedge y = a\} \bigcup \{(x,y) : \mathcal{D}o\,(x) \neq \cup\mathcal{D}o\,(x) \wedge y = H(x(\cup\mathcal{D}o\,(x)))\} \bigcup$
$\bigcup \{(x,y) : x \neq 0 \wedge \mathcal{D}o\,(x) = \cup\mathcal{D}o\,(x) \wedge y = \cup\mathcal{R}g\,(x))\}$]

ALKALMAZÁS (Rendszámaritmetika)

Definíció

(i) (RENDSZÁMOK ÖSSZEGE)
$\alpha + 0 = \alpha$
$\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$
$\alpha + \beta = \bigcup_{\gamma < \beta} (\alpha + \gamma)$ ha β limes

(ii) (RENDSZÁMOK SZORZATA)
$\alpha \cdot 0 = 0$
$\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha$
$\alpha \cdot \beta = \bigcup_{\gamma < \beta} (\alpha \cdot \gamma)$ ha β limes

Állítás

(i) $\alpha + \beta \in \mathcal{O}n$ (ii) $\alpha \cdot \beta \in \mathcal{O}n$

[(i): Transzfinit indukció: $A \mathrel{\hat{=}} \{\gamma : \alpha + \gamma \in \mathcal{O}n\}$.
(a) $\alpha + 0 = \alpha \in \mathcal{O}n \rightsquigarrow 0 \in A$
(b) $\alpha + \gamma \in \mathcal{O}n \Longrightarrow \alpha + (\gamma + 1) = (\alpha + \gamma) + 1 \in \mathcal{O}n \rightsquigarrow \gamma \in A \Longrightarrow \gamma + 1 \in A$
(c) $\sigma \mathrel{\hat{=}} (\forall\gamma < \beta)(\gamma \in A) \wedge C \mathrel{\hat{=}} \{\alpha + \gamma : \gamma < \beta\} \wedge F \mathrel{\hat{=}} \{(\gamma, \alpha + \gamma) : \gamma < \beta\}$.
$\big(\sigma \Longrightarrow \mathcal{F}nc\,(F) \wedge \mathcal{D}o\,F = \beta \wedge \mathcal{R}g\,F = C \Longrightarrow \mathcal{M}\,(C) \Longrightarrow \mathcal{M}\,(\mathcal{S}up\,C)\big) \wedge$
$\wedge \big(\sigma \Longrightarrow C \subseteq \mathcal{O}n\big) \rightsquigarrow \sigma \Longrightarrow \mathcal{M}\,(\mathcal{S}up\,C) \wedge C \subseteq \mathcal{O}n \Longrightarrow \alpha + \beta = \mathcal{S}up\,C \in \mathcal{O}n \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow (\forall\gamma < \beta)(\gamma \in A) \Longrightarrow \beta \in A$.]

Állítás

$\alpha \in \omega \wedge \beta \in \omega \Longrightarrow \alpha + \beta \in \omega \wedge \alpha \cdot \beta \in \omega$

[ω–ra szorítkozó transzfinit indukció: (a) $\alpha \in \omega \Longrightarrow \alpha + 0 = \alpha \in \omega$
(b) $\alpha + \beta \in \omega \Longrightarrow \alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1 \in \omega$.
Szorzat az összegre vonatkozó állítást használva analóg]

Feladat

Bizonyítsuk be, hogy
(i) $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$ (ii) $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$ (iii) $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$

Kérdés

$\alpha + 1 \overset{?}{=} 1 + \alpha$

[Nem: $1 + \omega = \bigcup_{\gamma \in \omega} (1 + \gamma) = \bigcup_{\gamma \in \omega} \gamma = \cup\,\omega = \omega < \omega + 1$ mert persze $\gamma \in \omega \Longrightarrow 1 + \gamma = \gamma + 1$]

3.5 A természetes számok

Definíció

ω elemeit *véges (rend)számok*nak vagy *természetes számok*nak nevezzük.

Jelöles

$i\,,\,j\,,\,k\,,\,l\,,\,m\,,\,n$ véges számokat jelöl.

Tétel (PEANO AXIÓMÁK)

(i) $(\forall n)(n+1\neq 0)$
(ii) $(\forall n)(\forall m)(n+1=m+1\Longrightarrow n=m)$
(iii) $(\forall n)(n+0=n)$
(iv) $(\forall n)(\forall m)(n+(m+1)=(n+m)+1)$
(v) $(\forall n)(n\cdot 0=0)$
(vi) $(\forall n)(\forall m)(n\cdot(m+1)=n\cdot m+n)$
(vii) $0\in A\,\wedge\,(\forall n)(n\in A\Rightarrow n+1\in A)\Longrightarrow\omega\subseteq A$ (VÉGES INDUKCIÓ)

Bizonyítás.

(i): $n\in n+1$ (ii): $n<m\Longrightarrow n+1<m+1$ (iii), (iv): $+$ def. (v), (vi): $\cdot$ def.
(vii) ω–ra szorítkozó esetszétválasztásos transzfinit indukció

QED

Megjegyzés

Az indukció átfogalmazható a szokásos (formulákra vonatkozó) alakba, ha az $A=\{x:\varphi(x)\}$ osztályra alkalmazzuk: $\varphi(0)\,\wedge\,(\forall n)(\varphi(n)\Rightarrow\varphi(n+1))\Longrightarrow(\forall n)\varphi(n)$, ahol φ–ben a $x\,,\,0\,,\,n\,,\,n+1$ változók nem szerepelnek és φ–nek ugyanazon szabad változóját cseréljük $x\,,\,0\,,\,n\,,\,n+1$–re. A tétel tehát azt mondja ki, hogy $s(n)\mathrel{\mathring{=}}n+1$–el $\underline{\omega}=\langle\,\omega\,,\,0\,,\,s\,,\,+\,,\,\cdot\,\rangle$ *tényleg* modellje a Peano axiómáknak.

Tétel (VÉGES REKURZIÓ)

$(\exists!f)[f\mathcal{F}nc\,\omega\,\wedge\,f(0)=m\,\wedge\,(\forall n)\big(f(n+1)=H(f(n))\big)]$

Bizonyítás.

ω–ra szorítkozó esetszétválasztásos transzfinit rekurzió

QED

Tétel (INDUKTÍV HALMAZOK IZOMORFAK)

Legyen C tetszőleges olyan, hogy

(1) (i) $a\in C$
(ii) $(\forall x\in C)(S(x)\in C)$ és
(2) (i) $(\forall x\in C)(S(x)\neq a)$
(ii) $(\forall x\in C)(\forall y\in C)(S(x)=S(y)\Longrightarrow x=y)$
(iii) $a\in A\,\wedge\,(\forall x\in C)(x\in A\Rightarrow S(x)\in A)\Longrightarrow C\subseteq A$ (INDUKCIÓ)

Ekkor $(\exists!f)[f\mathcal{F}nc\,\omega\,\wedge\,\mathcal{R}g\,(f)=C\,\wedge\,\mathcal{U}n\,(f^{-1})\,\wedge\,f(0)=a\,\wedge\,(\forall n)\big(f(n+1)=S(f(n))\big)]$

Bizonyítás.

Előző tétel alapján $(\exists ! f)\big(\mathcal{F}nc\,\omega \,\wedge\, f(0)=a \,\wedge\, (\forall n)(f(n+1)=S(f(n))\big)$. Belátandó, hogy $\mathcal{R}g\,(f)=C \,\wedge\, \mathcal{U}n\,(f^{-1})$.

1) $C \subseteq \mathcal{R}g\,(f)$:
Indukció C–n. $A \doteq \mathcal{R}g\,(f)$.
(a) $f(0)=a \;\rightsquigarrow\; a\in A$
(b) $x\in A \Longrightarrow (\exists n)(f(n)=x) \Longrightarrow (\exists n)(f(n+1)=S(x)) \Longrightarrow S(x)\in A$
(c) (a) és (b)–vel (2)(iii) alapján: $a\in A \,\wedge\, (\forall x\in A)(S(x)\in A) \;\rightsquigarrow\; C\subseteq A=\mathcal{R}g\,(f)$.

2) $\mathcal{R}g\,(f)\subseteq C$:
Indukció ω – n. $A \doteq \{n : f(n)\in C\}$.
(a) $f(0)=a\in C \;\rightsquigarrow\; 0\in A$
(b) $n\in A \Longrightarrow f(n)\in C \Longrightarrow f(n+1)=S(f(n))\in C \Longrightarrow n+1\in A$
(c) (a)+(b) $\rightsquigarrow\; \omega\subseteq A$.
Végül (c) –vel: $\mathcal{R}g\,(f)=f^{*}\omega\subseteq f^{*}A\subseteq C \;\rightsquigarrow\; \mathcal{R}g\,(f)\subseteq C$.

3) $\mathcal{U}n\,(f^{-1})$:
Indukció ω – n. $A \doteq \{n : (\forall m)(f(m)=f(n)\Longrightarrow m=n)\}$.
a) $0\in A$: $f(0)=f(m) \,\wedge\, m\neq 0 \Longrightarrow (\exists k)(a=f(0)=f(m)=f(k+1)=S(f(k)) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow (\exists k)(a=S(f(k)) \Longrightarrow (\exists x\in C)(a=S(x)) \Longrightarrow \mathbb{F}$
b) $n\in A \Longrightarrow n+1\in A$:
a)–val $n+1\neq 0 \;\rightsquigarrow\; f(n+1)=f(m) \Longrightarrow m\neq 0 \Longrightarrow (\exists k)(k+1=m) \Longrightarrow (\exists k)(f(n+1)=$
$=f(k+1)) \;\rightsquigarrow\; n\in A \,\wedge\, f(n+1)=f(m) \Longrightarrow S(f(n))=f(n+1)=f(k+1)=$
$=S(f(k)) \Longrightarrow f(n)=f(k) \Longrightarrow n=k \Longrightarrow n+1=k+1=m \Longrightarrow n+1=m \;\rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow\; n\in A \Longrightarrow n+1\in A$.
(c) (a)+(b) $\rightsquigarrow\; \omega\subseteq A$.

QED

Következmény (ω EGYÉRTELMŰ)

C – re $a=0$ és $S=\{(x,y) : y=x\,\cup\,\{x\}\}$ – el fennállnak a Tétel feltételei $\rightsquigarrow\; C=\omega$.

[Tételbeli f – el indukció $A \doteq \{n : f(n)=n\}$ – re.]

Kérdés

Legyen $\mathcal{L}=\langle\, \mathbf{0}\,,\, \mathbf{s}\,\rangle$, elsőrendű nyelv, $\underline{\omega}=\langle\,\omega\,,\,0\,,\,s\,\rangle$, $\mathcal{L}'$ $\mathcal{L}$–nek egy új $\mathbf{c}$ konstanssal való bővítése, $\Sigma=\mathcal{T}h\,\omega\,\cup\,\{\mathbf{s}^{(n)}\,\mathbf{0}\neq\mathbf{c} : n\in\omega\}$ ($\mathbf{s}^{(0)}\,0=0$, $\mathbf{s}^{(n+1)}\mathbf{0}=\mathbf{s}\,\mathbf{s}^{(n)}\mathbf{0}$). Kompaktsági tétellel van Σ–nak $\underline{C}'=\langle C\,,\,a\,,\,S\,,\,d\rangle$ modellje ($d=\mathbf{c}^{\underline{C}'}$). Nomármost,
$f\mathcal{F}nc\omega \,\wedge\, \mathcal{R}g\,(f)=C \,\wedge\, f(0)=a \,\wedge\, (\forall n\in\omega)(f(s(n))=S(f(n)) \;\rightsquigarrow\; (\exists n\in\omega)(d=$
$=f(n)=f(s^{(n)}\,0)=S^{(n)}\,f\,(0)=S^{(n)}\,a\neq d)$, mert $\underline{C}'$ modellje Σ–nak. Ebből az ellentmondásból következően ilyen f függvény nincs, tehát $\underline{C}'$ –nek $\mathcal{L}$–re vonatkozó reduktumát $\underline{C}$ –vel jelölve:

(1) $\underline{C}$ nem izomorf $\underline{\omega}$ – val.

Másrészt $\underline{C}\models \mathcal{T}h\,\underline{\omega}$ és $\underline{\omega}$ – n igazak az (i),(ii), (vii) Peano axiómák, így $\underline{C}$–re fennállnak ezek megfelelői, azaz az előző tétel feltételei, tehát:

(2) $\underline{C}$ izomorf $\underline{\omega}$ – val.

A kérdés tehát: (1) és (2) közül melyik igaz ?

[(2) hamis, mert bár az igaz, hogy $\underline{C}$ – re fennállnak az (i) és (ii) Peano axiómák, azaz a tétel (1)(i), (ii) és (2)(i)(ii) feltételei, a (vii) Peano axióma és vele a tétel (2)(iii) feltétele, az indukció, általában már nem, *csak bizonyos speciális* $A = \{x : \varphi(x)\}$ *osztályokra igaz*, azokra, amelyek esetén a $\varphi(x)$ – ben (a halmaz– és osztályszimbólumokon, az =–en és az $\in$–on továbbá a logikai konstansokon kívül) *csak* az a és az $S^{(n)} \mathrel{\hat{=}} \overbrace{S \circ S \circ \ldots \circ S}^{n}$ szerepel *fix* n – ekre, hiszen csak ezen formulák azok, melyekben *csak* $\mathcal{L} = \langle\, \mathbf{0}\,,\, \mathbf{s}\,\rangle$ – beli nem logikai konstansok $\underline{C}$ – beli interpretációi szerepelnek, azaz, amelyek maguk $\mathcal{L}$ – beli formulák $\underline{C}$ – beli interpretációi, mint például a $(\forall x \in C)(S(x) \neq a)$. Másrészt az indukció nem vonatkozik például az $A = \{x : \varphi(x)\}$ osztályra, ha $\varphi(x)$ a következő — $\mathcal{L}$ – ben nem, a halmazelméletben viszont megfogalmazható — formula, mely azt fejezi ki, hogy egy osztály elemei megkaphatóak egy eleméből S segítségével véges sok lépésben (amelyre, bár $a \in A \wedge (\forall x \in C)(x \in A \Rightarrow S(x) \in A)$ de persze $C \not\subseteq A$, hisz $C \subseteq A$ nyilván kizárná azt a konstrukciót, amelynek alapján megmutattuk azt, hogy $\underline{C}$ nem izomorf $\underline{\omega}$ – val): $\varphi(x) = (\exists n)(\mathsf{s}(n) = x)$, ahol s – et a – ból és S – ből véges rekurzióval definiáljuk, hiszen eszerint $(\exists\,!f)(f \mathcal{F}nc\,\omega \wedge f(0) = a \wedge (\forall n)\big(f(n+1) = S(f(n))\big)$]

Feladat

Adjuk meg a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ – nek, azaz az egész, a racionális, a valós és a komplex számok halmazának ω – ból való felépítését vázlatosan!

4. A kiválasztási axióma

A kiválasztási axióma ($\mathbf{Ax}_7$):

$$(\exists f)\big(f\,\mathcal{F}nc\,(a) \wedge (\forall x \in a)(x \neq 0 \Longrightarrow f(x) \in x)\big)$$

Definíció

Az $f\,\mathcal{F}nc\,(a) \wedge (\forall x \in a)(x \neq 0 \Longrightarrow f(x) \in x)$ feltételt kielégítő f függvényeket az a *kiválasztási függvényei*nek nevezzük.

Jelölés

$f\,\mathcal{C}h\,a \mathrel{\hat{=}} f\,\mathcal{F}nc\,(a) \wedge (\forall x \in a)(x \neq 0 \Rightarrow f(x) \in x)$.

Definíció

$a \simeq_f b \mathrel{\hat{=}} \mathcal{F}nc(f) \wedge \mathcal{U}n(f^{-1}) \wedge \mathcal{D}o(f) = a \wedge \mathcal{R}g(f) = b$ *ekvivalencia*

$a \simeq b \mathrel{\hat{=}} (\exists f)(a \simeq_f b)$ *ekvivalens*

$a \cong_f b \mathrel{\hat{=}} a \simeq_f b \wedge f \nearrow \overset{<^*}{<} a$ *izomorfizmus*

$a \cong b \mathrel{\hat{=}} (\exists f)(a \cong_f b)$ *izomorf*

Állítás

(i)(a) $a \simeq_f b \Longrightarrow b \simeq_{f^{-1}} a$ (b) $a \cong_f b \Longrightarrow b \simeq_{f^{-1}} a$

(ii) (EKVIVALENCIA ÉS IZOMORFIA EKVIVALENCIARELÁCIÓK)

$E_1 \mathrel{\hat{=}} \{(x,y) : x \simeq y\} \wedge E_2 \mathrel{\hat{=}} \{(x,y) : x \cong y\} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \big(E = E_1 \vee E = E_2 \Longrightarrow \mathcal{R}ef(V,E) \wedge \mathcal{S}ym(V,E) \wedge \mathcal{T}rs(V,E)\big)$

Tétel (ZERMELO JÓLRENDEZÉSI TÉTEL)

Minden halmaz ekvivalens egy rendszámmal (azaz minden halmaz jólrendezhető):

$$(\exists\alpha)(\alpha \simeq a)\,.$$

Speciálisan, minden jólrendezett halmaz izomorf egy rendszámmal:

$$\mathcal{W}o(a,<) \Longrightarrow (\exists\alpha)(\alpha \cong a)\,.$$

Bizonyítás.

1) Legyen f $\mathcal{P}(a)$ egy kiválasztási függvénye, speciálisan
$$\mathcal{W}o(a,<) \Longrightarrow (\forall x \in \mathcal{P}(a)\big(x \neq 0 \Rightarrow f(x)\mathcal{F}st_<(x)\big)\,.$$
$G \doteq \{(x,y) : y = f(a \setminus \mathcal{R}g(x)\} \rightsquigarrow$ van F, hogy $F\,\mathcal{F}nc\,\mathcal{O}n \wedge (\forall\alpha)\big(F(\alpha) = G(F\,|\,\alpha) = = f(a \setminus \mathcal{R}g(F\,|\,\alpha)) = f(a \setminus F^*\alpha)\big)\,.$

2) $a \setminus F^*\alpha \neq 0 \Longrightarrow F(\alpha) = f(a \setminus F^*\alpha) \in a \setminus F^*\alpha \subseteq a \Longrightarrow F(\alpha) \in a \wedge \wedge (\forall\beta < \alpha)\big(F(\alpha) \neq F(\beta)\big) \rightsquigarrow A \subseteq \mathcal{O}n \wedge (\forall\alpha \in A)(a \setminus F^*\alpha \neq 0) \Longrightarrow F^*A \subseteq a \wedge \wedge\, \mathcal{U}n((F\,|\,A)^{-1})\,.$

3) $(\forall\alpha)(a \setminus F^*\alpha \neq 0) \Longrightarrow F^*\mathcal{O}n \subseteq a \wedge \mathcal{U}n(F^{-1}) \Longrightarrow \mathcal{M}(F^*\mathcal{O}n) \wedge \mathcal{F}nc(F^{-1}) \Longrightarrow \Longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{R}g\,(F^{-1})) \Longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{O}n) \Longrightarrow \mathbb{F} \rightsquigarrow (\exists\beta)(a \setminus F^*\beta = 0)\,.$

4) $\alpha \doteq \mathcal{I}nf\{\beta : a \setminus F^*\beta = 0\} \wedge g \doteq F\,|\,\alpha \Longrightarrow a \setminus F^*\alpha = 0 \wedge (\forall\beta < \alpha)(a \setminus F^*\beta \neq 0) \Longrightarrow \Longrightarrow a \subseteq F^*\alpha = \mathcal{R}g(F\,|\,\alpha) = \mathcal{R}g(g) \wedge \mathcal{U}n\,(g^{-1}) \Longrightarrow \mathcal{R}g(g) = a \wedge \mathcal{U}n\,(g^{-1}) \rightsquigarrow \rightsquigarrow g\,\mathcal{F}nc\,\alpha \wedge \mathcal{R}g(g) = a \wedge \mathcal{U}n(g^{-1}) \rightsquigarrow \alpha \simeq_g a\,.$

5) $\mathcal{W}o(a,<) \wedge (\forall x \in \mathcal{P}(a))[x \neq 0 \Rightarrow f(x)\mathcal{F}st_<(x)] \wedge \beta_1,\beta_2 \in \alpha \wedge \beta_1 < \beta_2 \Longrightarrow \Longrightarrow \beta_1 \subseteq \beta_2 \Longrightarrow F^*\beta_1 \subseteq F^*\beta_2 \Longrightarrow a\setminus F^*\beta_1 \supseteq a\setminus F^*\beta_2 \Longrightarrow f(a\setminus F^*\beta_1) \leq f(a\setminus F^*\beta_2) \Longrightarrow \Longrightarrow F(\beta_1) \leq F(\beta_2) \Longrightarrow F(\beta_1) < F(\beta_2) \Longrightarrow g(\beta_1) < g(\beta_2) \rightsquigarrow \alpha \cong_g a\,.$

QED

Megjegyzés

Mivel izomorf rendszámok azonosak: $\alpha \cong \beta \Longrightarrow \alpha = \beta$, továbbá rendszámok egyetlen izomorfiája az identitás: $\alpha \cong_f \beta \Longrightarrow (\forall\gamma \in \alpha)(f(\gamma) = \gamma)$, így az is igaz, hogy

$$\mathcal{W}o(a,<) \Longrightarrow (\exists\,!\,\alpha)(\exists\,!\,g)(\alpha \cong_g a)\,.$$

Feladat

Mutassuk meg, hogy

(i) izomorf rendszámok azonosak

(ii) rendszámok egyetlen izomorfiája az identitás!

[Az 12. old. utolsó Állítást használjuk.

(i) $\alpha \cong_f \beta \wedge \beta < \alpha \Longrightarrow \beta \in \alpha \Longrightarrow \beta \in \mathcal{D}o(f) \Longrightarrow f(\beta) \in \mathcal{R}g(f) = \beta \Longrightarrow \beta \leq f(\beta) \in \beta \Rightarrow \Longrightarrow \beta < \beta \Longrightarrow \mathbb{F}$ és felhasználva, hogy $f \nearrow \alpha \wedge \mathcal{R}g(f) = \beta \Longrightarrow f^{-1} \nearrow \beta$ analóg módon adódik, hogy $\alpha < \beta \Longrightarrow \mathbb{F}$.

(ii) $\alpha \cong_f \beta \wedge \gamma \in \alpha \wedge f(\gamma) \neq \gamma \Longrightarrow f(\gamma) < \gamma \vee \gamma < f(\gamma)\,.$
$f(\gamma) < \gamma \Longrightarrow \gamma \leq f(\gamma) < \gamma \Longrightarrow \mathbb{F}.$
$\gamma < f(\gamma) \Longrightarrow f^{-1}(\gamma) < \gamma \leq f^{-1}(\gamma) \Longrightarrow \mathbb{F}\,.$
$\big($(ii)–ből egyébként persze már következik (i)$\big)$.]

Feladat

Mutassuk meg, hogy $a \subseteq \beta \Longrightarrow (\exists\alpha)(a \cong \alpha \subseteq \beta)$

[$\gamma \in \alpha \cong_f a \subseteq \beta \Longrightarrow \gamma \leq f(\gamma) \in \beta \Longrightarrow \gamma \in \beta \rightsquigarrow \alpha \cong a \subseteq \beta \Longrightarrow \alpha \subseteq \beta$.
Így $a \subseteq \beta \Longrightarrow \mathcal{W}o(a, \in^*) \Longrightarrow (\exists\alpha)(\alpha \cong a \subseteq \beta) \Longrightarrow (\exists\alpha)(a \cong \alpha \subseteq \beta)$]

Feladat

Mutassuk meg, hogy $(\exists r)(\mathcal{W}o\,(a, r))$

Tétel (ZORN LEMMA)

Ha egy rendezett halmazban minden láncnak van felső korlátja, akkor a halmaznak van maximális eleme:

$$\mathcal{P}o\,(a, <) \wedge (\forall x \in \mathcal{P}(a))\big(\mathcal{L}o\,(x, <) \Rightarrow (\exists y \in a)\, y\, \mathcal{U}b_<\, x\big) \Longrightarrow (\exists x)(x\, \mathcal{M}ax_<\, a)\,.$$

Bizonyítás.

1) Legyen f $\mathcal{P}(a)$ egy kiválasztási függvénye. $G \doteq f(\{y \in a : (\forall z \in \mathcal{R}g(x))(y > z)\}) \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow$ van F, hogy $F\, \mathcal{F}nc\, \mathcal{O}n \wedge (\forall\alpha)(F(\alpha) = G(F \,|\, \alpha) = f(\{y \in a : (\forall z \in F^*\alpha)(y > z)\})$.

2) $u_\alpha \doteq \{y \in a : (\forall z \in F^*\alpha)(y > z)\} \neq 0 \Longrightarrow F(\alpha) = f(u_\alpha) \in a \wedge (\forall\beta \in \alpha)\big(F(\alpha) > F(\beta)\big) \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow A \subseteq \mathcal{O}n \wedge (\forall\alpha \in A)(u_\alpha \neq 0) \Longrightarrow F^*A \subseteq a \wedge F \nearrow A$.

3) $(\forall\alpha)(u_\alpha \neq 0) \Longrightarrow F^*\mathcal{O}n \subseteq a \wedge F \nearrow \mathcal{O}n \Longrightarrow \mathcal{M}(F^*\mathcal{O}n) \wedge \mathcal{F}nc(F^{-1}) \Longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{O}n) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \mathbb{F} \rightsquigarrow (\exists\alpha)(u_\alpha = 0)$.

4) $\alpha \doteq \mathcal{I}nf\{\beta : u_\beta = 0\} \Longrightarrow F^*\alpha \subseteq a \wedge F \nearrow \alpha \Longrightarrow F^*\alpha \subseteq a \wedge \mathcal{L}o\,(F^*\alpha, <) \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow (\exists y \in a)(y\mathcal{U}b_< F^*\alpha)$ a feltétel miatt. Legyen $c \in a \wedge c\, \mathcal{U}b_< F^*\alpha$.

5) $c\, \mathcal{U}b_< F^*\alpha \wedge (\exists x \in a)(x > c) \Longrightarrow (\exists x)(x \in u_\alpha) \Longrightarrow u_\alpha \neq 0 \Longrightarrow \mathbb{F} \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow \neg(\exists x \in a)(x > c) \rightsquigarrow c\, \mathcal{M}ax_< a$.

QED

Tétel

Az alábbi állítások ekvivalensek:

(i) Kiválasztási axióma

(ii) Zermelo jólrendezési tétel

(iii) Zorn lemma

Bizonyítás.

1) Az előző két tétel szerint (i) $\rightsquigarrow$ (ii) és (i) $\rightsquigarrow$ (iii).

2) (ii) $\rightsquigarrow$ (i): $\mathcal{W}o\,(\cup a, <) \Longrightarrow (\exists f)\big(f = \{(x, y) : x \subseteq \cup a \wedge x \neq 0 \wedge y\, \mathcal{F}st_<\, x\}\big) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow (\exists f)\big(f \mathcal{F}nc(a) \wedge (\forall x \in a)(x \neq 0 \Rightarrow f(x) \in x)\big)$.

3) (iii) $\rightsquigarrow$ (i):
a) $C \doteq \{f : \big(\exists x \in \mathcal{P}(a)\big)\, f\, \mathcal{C}h\, x\} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \mathcal{M}(C) \wedge \mathcal{P}o\,(C, \subset^*) \wedge (\forall z \in \mathcal{P}(C))\big(\mathcal{L}o\,(z, \subset^*) \Rightarrow (\exists w \in C)\, w\, \mathcal{U}b_{\subset^*}\, z\big)$
Ugyanis:

a1) $C \subseteq \mathcal{P}(a \times \cup a) \rightsquigarrow \mathcal{M}(C)$

a2) $(\forall x)\big(\mathcal{P}o\,(x, \subset^*)\big)$

a3) $\mathcal{L}o(z, \subset^*) \wedge w \doteq \cup z \Longrightarrow w\, \mathcal{U}b_{\subset^*}\, z$ és
$z \subseteq C \wedge \mathcal{L}o(z, \subset^*) \wedge w \doteq \cup z \Longrightarrow \mathcal{F}nc\,(w) \wedge \mathcal{D}o\,(w) = \bigcup_{f \in z} \mathcal{D}o\,(f) \subseteq a \wedge$
$\wedge \big[x \neq 0 \wedge (x, y) \in w \Rightarrow (\exists f \in z)(x \neq 0 \wedge (x, y) \in f) \Rightarrow y \in x\big] \Longrightarrow w \in C$.

b) (iii)–al a) miatt $(\exists h \in C)\,[\neg\,(\exists g \in C)(g \supset h)]$.

c) $z \in a \wedge z \neq 0 \wedge z \notin \mathcal{D}o(h) \Rightarrow (\exists y)(y \in z)$ és $\big(g \triangleq h \cup \{(z,y)\} \Rightarrow g \in C \wedge g \supset h\big) \Rightarrow \mathbb{F}$.

Így $\neg\,(\exists z)(z \in a \wedge z \neq 0 \wedge z \notin \mathcal{D}o(h)) \ \rightsquigarrow\ a \setminus \{0\} \subseteq \mathcal{D}o(h) \subseteq a \ \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow\ (\,0 \notin a \vee 0 \in \mathcal{D}o(h) \Rightarrow h\,\mathcal{C}h\,a\,) \wedge (\,0 \in a \setminus \mathcal{D}o(h) \Rightarrow h \cup \{(0,0)\}\,\mathcal{C}h\,a\,)$.

QED

Megjegyzés

ZF jelöli azt az elméletet, melyet úgy kapunk, hogy halmazelméleti axiómák közül elhagyjuk a kiválasztási axiómát.

(i) ("megszámlálható sok megszámlálható úniója megszámlálható" nem tétele zf–nek)

$ZF \nvdash a \simeq \omega \wedge (\forall b \in a)(b \simeq \omega) \Longrightarrow \cup\, a \simeq \omega$

(ii) (átviteli elv nem tétele zf–nek)

$ZF \nvdash h \subseteq \mathbb{R} \wedge f : h \to \mathbb{R} \wedge a \in h \Rightarrow$

$\Rightarrow [\,(\forall x \in {}^{\omega}h)\big(\mathcal{C}onv(x) \wedge \mathcal{L}im(x) = a \Rightarrow \mathcal{C}onv(f \circ x) \wedge \mathcal{L}im(f \circ x) = f(a)\big) \Longrightarrow \mathcal{C}ont_a(f)\,]$

ahol persze

$\mathcal{L}im \triangleq \{(x,y) : x \in {}^{\omega}\mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge (\forall \varepsilon \in \mathbb{R})\big(\varepsilon > 0 \Longrightarrow (\exists m \in \omega)(\forall n \in \omega)(n > m \Rightarrow |x(n) - y| < \varepsilon)\big)\}$ *(limes)*

$\mathcal{C}onv(a) \triangleq a \in \mathcal{D}o(\mathcal{L}im)$ *(konvergens)*

$\mathcal{C}ont_a(f) \triangleq h \subseteq \mathbb{R} \wedge f : h \to \mathbb{R} \wedge a \in h \wedge$

$\wedge (\forall \varepsilon \in \mathbb{R})[\varepsilon > 0 \Longrightarrow (\exists\, \delta \in \mathbb{R})\big(\delta > 0 \wedge (\forall x \in h)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)\big)]$ *(folytonos)*

5. Számosság

Definíció

$|a| \triangleq \mathcal{I}nf\,\{\alpha : \alpha \simeq a\}$ *számosság*

$\mathcal{C}a \triangleq \{|x| : x \in V\}$

Jelölés

Ha mást nem mondunk mást, ezentúl $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ és indexelt változataik számosságokat jelölnek.

Megjegyzés

A jólrendezési tétel miatt a definíció értelmes.

Tétel

$a \simeq b \iff |a| = |b|$

Bizonyítás.

$\Longrightarrow:\ a \simeq b \Longrightarrow |a| \simeq a \simeq b \simeq |b| \Longrightarrow |a| \simeq b \wedge |b| \simeq a \Longrightarrow |b| \leq |a| \leq |b| \Longrightarrow |a| = |b|$

$\Longleftarrow:\ |a| = |b| \Longrightarrow a \simeq |a| = |b| \simeq b \Longrightarrow a \simeq b$

QED

Állítás

$a \subseteq b \Longrightarrow |a| \leq |b|$

[A második lépésben a 18.old. utolsó Feladattal: $a \subseteq b \Rightarrow (\exists f)(f^*a \subseteq f^*b = |b| \wedge b \simeq_f |b|) \Rightarrow$
$\Longrightarrow (\exists f)(\exists \alpha)(|a| \simeq a \simeq f^*a \simeq \alpha \subseteq |b|) \Longrightarrow (\exists f)(\exists \alpha)(|a| \leq \alpha \leq |b|) \Longrightarrow |a| \leq |b|$]

Állítás

$||a|| = |a|$

[$|a| \simeq a \Longrightarrow ||a|| = |a|$]

Következmény

$\mathcal{C}a = \{\, \alpha : \alpha = |\alpha| \,\}$

[$\alpha = |a| \Longrightarrow \alpha = |a| = ||a|| = |\alpha|$]

Tétel (CANTOR–SCHRÖDER–BERSTEIN)

$a \simeq c \subseteq b \,\wedge\, b \simeq d \subseteq a \Longrightarrow a \simeq b$

Bizonyítás.
$a \simeq c \subseteq b \,\wedge\, b \simeq d \subseteq a \Longrightarrow |a| = |c| \leq |b| \,\wedge\, |b| = |d| \leq |a| \Longrightarrow |a| \leq |b| \,\wedge\, |b| \leq |a| \Longrightarrow$
$\Longrightarrow |a| = |b|$.

QED

Tétel (CANTOR)

$|\alpha| < |\mathcal{P}(\alpha)|$

Bizonyítás.
1) $a \not\simeq \mathcal{P}(a)$:
$(\exists f)(a \simeq_f \mathcal{P}(a)) \,\wedge\, C \mathrel{\mathring{=}} \{x \in a : x \notin f(x)\} \Longrightarrow C \subseteq a \wedge \mathcal{M}(C) \Longrightarrow (\exists c)(C = c \in \mathcal{P}(a)) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow (\exists c)(c' \mathrel{\mathring{=}} f^{-1}(c) \in a) \Longrightarrow (\exists c)\big(c' \in c \iff c' \notin f(c') = c \iff c' \notin c\big) \Longrightarrow \mathbb{F}$.

2) $|\alpha| \leq |\mathcal{P}(\alpha)|$: $\beta \in \alpha \Longrightarrow \beta \subseteq \alpha \Longrightarrow \beta \in \mathcal{P}(\alpha) \rightsquigarrow \alpha \subseteq \mathcal{P}(\alpha) \rightsquigarrow |\alpha| \leq |\mathcal{P}(\alpha)|$.

Ezekkel: $\alpha \not\simeq \mathcal{P}(\alpha) \wedge |\alpha| \leq |\mathcal{P}(\alpha)| \rightsquigarrow |\alpha| \neq |\mathcal{P}(\alpha)| \wedge |\alpha| \leq |\mathcal{P}(\alpha)| \rightsquigarrow |\alpha| < |\mathcal{P}(\alpha)|$.

QED

Következmény

$|a| < |\mathcal{P}(a)|$

[$a \simeq_f b \,\wedge\, G \mathrel{\mathring{=}} \{(x, f^*x) : x \in \mathcal{P}(a)\} \Longrightarrow (\exists g)\big(g = G \wedge \mathcal{P}(a) \simeq_g \mathcal{P}(a)\big) \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow |a| = |b| \Longrightarrow |\mathcal{P}(a)| = |\mathcal{P}(b)| \rightsquigarrow \mathcal{P}(a) \simeq \mathcal{P}(|a|) \rightsquigarrow |a| = ||a|| < |\mathcal{P}(|a|)| = |\mathcal{P}(a)| \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow |a| < |\mathcal{P}(a)|$]

Következmény (VAN SZÁMOSSÁGHALMAZ MINDEN ELEMÉNÉL NAGYOBB SZÁMOSSÁG)

$a \subseteq \mathcal{C}a \Longrightarrow (\exists \kappa)(\forall \lambda \in a)(\kappa > \lambda)$

[$\lambda \in a \Longrightarrow \lambda \leq \mathcal{S}up\, a \Longrightarrow \lambda \subseteq \mathcal{S}up\, a \Longrightarrow \lambda = |\lambda| \leq |\mathcal{S}up\, a| < |\mathcal{P}(\mathcal{S}up\, a)|$]

Következmény (MINDEN SZÁMOSSÁGNÁL VAN NAGYOBB SZÁMOSSÁG)

$(\forall\lambda)(\exists\kappa)(\kappa > \lambda)$

$[\ \lambda \in \mathcal{C}a \Longrightarrow \{\lambda\} \subseteq \mathcal{C}a \ \rightsquigarrow\ (\exists\kappa)(\forall\mu \in \{\lambda\})(\kappa > \mu) \Longrightarrow (\exists\kappa)(\kappa > \lambda)\ ]$

Következmény (CANTOR PARADOXON)

$\mathcal{P}r(\mathcal{C}a)$

$[\ a = \mathcal{C}a \Longrightarrow (\exists\kappa \in a)(\forall\lambda \in a)(\kappa > \lambda) \Longrightarrow (\exists\kappa \in a)(\forall\lambda \in a)(\kappa \neq \lambda) \Longrightarrow (\exists\kappa)(\kappa \neq \kappa) \Longrightarrow \mathbb{F} \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow\ \neg\,(a = \mathcal{C}a)\ \rightsquigarrow\ (\forall x)\neg\,(x = \mathcal{C}a)\ \rightsquigarrow\ \neg\,(\exists x)\,(x = \mathcal{C}a)\ \rightsquigarrow\ \mathcal{P}r(\mathcal{C}a)\ ]$

Állítás (SZÁMOSSÁGHALMAZ SZUPRÉMUMA SZÁMOSSÁG)

$a \subseteq \mathcal{C}a \Longrightarrow \mathcal{S}up\, a \in \mathcal{C}a$

$[\ a \subseteq \mathcal{C}a \wedge \kappa \doteq |\mathcal{S}up\, a| \wedge \kappa < \mathcal{S}up\, a \Longrightarrow \kappa \in \mathcal{S}up\, a = \cup a \Longrightarrow (\exists\lambda \in a)(\kappa \in \lambda) \Longrightarrow$
$\Rightarrow (\exists\lambda)(\kappa < \lambda \leq \mathcal{S}up\, a) \Longrightarrow (\exists\lambda)(\kappa < \lambda \subseteq \mathcal{S}up\, a) \Longrightarrow (\exists\lambda)(\kappa < \lambda = |\lambda| \leq |\mathcal{S}up\, a| = \kappa) \Longrightarrow \mathbb{F} \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow\ \kappa = \mathcal{S}up\, a\ \rightsquigarrow\ \mathcal{S}up\, a \in \mathcal{C}a\ ]$

Definíció

$\kappa^+ \doteq \mathcal{I}nf\,\{\lambda : \lambda > \kappa\}$ *számosság rákövetkezője*

Megjegyzés

Fenti második Következmény miatt a definíció értelmes. A következő definíció jogosultságát az előző Állítás mutatja.

Definíció (ALEPHEK)

$\aleph_0 \doteq \omega$
$\aleph_{\alpha+1} \doteq \aleph_\alpha^+$ *rákövetkező számosság*
$\aleph_\alpha \doteq \mathcal{S}up\,\{\aleph_\beta : \beta < \alpha\}$ ha α limes *limes számosság*

Definíció

$\aleph_1 = |\mathcal{P}\,(\aleph_0)|$ *kontinuum hipotézis*

$(\forall\alpha)(\aleph_{\alpha+1} = |\mathcal{P}\,(\aleph_\alpha)|)$ *általánosított kontinuum hipotézis*

Definíció

$\mathcal{F}n(a) \doteq (\exists n)(n \simeq a)$ *véges*
$\mathcal{I}n(a) \doteq \neg\,\mathcal{F}n(a)$ *végtelen*

Feladat

Mutassuk meg, hogy a végtelen számosságok limes rendszámok!

$[\ \mathcal{I}n(\alpha) \wedge f\,\mathcal{F}nc\,\alpha \wedge f(0) = \alpha \wedge (\forall\beta < \alpha)\big(\beta < \omega \Rightarrow f(\beta+1) = \beta \wedge \omega \leq \beta < \alpha \Rightarrow f(\beta) = \beta\big) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \alpha \simeq_f \alpha + 1\ ]$

Megjegyzés

Tudjuk, hogy $|a| \cup |b| = \omega \Longrightarrow |a \cup b| = |a \times b| = |a| \cup |b|$.
Általában is igaz: $\mathcal{I}n(a) \Longrightarrow |a \cup b| = |a \times b| = |a| \cup |b|$.

6. A regularitási axióma

Kérdés

Van–e olyan halmaz, mely eleme saját magának?

A regularitási axióma ($\mathbf{Ax}_8$):

$$a \neq 0 \Longrightarrow (\exists x \in a)(x \cap a = 0)$$

Megjegyzés

A regularitási axióma szerint minden nemüres halmaznak van $\in^*$ – minimális eleme:

$$\mathrm{Ax}_8 \iff \left[a \neq 0 \Longrightarrow (\exists x \in a)(\forall y \in a)(y \notin x)\right]$$

Következmény

(i) (NINCS VÉGTELEN LESZÁLLÓ $\in^*$ – LÁNC)

$\neg\, (\exists f)\big(f\mathcal{F}nc\,\omega \,\wedge\, (\forall n)(f(n+1) \in f(n))\big)$

(ii) (NINCS VÉGES $\in^*$ – CIKLUS)

$\neg\, (\exists f)(\exists m)\big(f\mathcal{F}nc\,(m+1) \,\wedge\, (\forall n < m)(f(n+1) \in f(n)) \,\wedge\, f(0) \in f(m)\big)$

(iii) $(\forall x)(x \notin x)$

[(i), (ii): Indirekte: $\mathcal{R}g\, f$ – nek nem volna $\in^*$ – minimális eleme.
(iii): (ii) speciálisan $m = 0$–val, vagy közvetlenül indirekte: $b \in b \,\wedge\, a \doteq \{b\} \Longrightarrow [a \neq 0 \,\wedge$
$\wedge\, b \in (b \cap a) \,\wedge\, (\forall x \in a)(x = b)] \Longrightarrow (\forall x \in a)(x \cap a \neq 0)$.]

Megjegyzés

A Következmény szerint tehát nincs olyan halmaz, melynek volnának olyan elemei, hogy

(i) $a_0 \ni a_1 \ni a_2 \ni \ldots \ni a_n \ni \ldots$

(ii) $a_0 \ni a_1 \ni a_2 \ni \ldots \ni a_n \ni a_0$

(iii) $a \ni a$

Megjegyzés (A KUMULATÍV HIERARCHIA: MINDEN HALMAZ JÓLFUNDÁLT)

A regularitási axiómából következik, hogy

$R\mathcal{F}nc\,\mathcal{O}n \wedge R(0) = 0 \wedge (\forall\alpha)(R(\alpha{+}1) = \mathcal{P}(R(\alpha)) \wedge (\forall\alpha \in K_{II})(R(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} R_\beta) \implies V = \bigcup \mathcal{R}g(R)$

Definíció

A halmazelmélet ZFC (**Z***ermelo* – **F***raenkel* + **C***hoice*) *axiómarendszere*:

Extenzionalitási axióma (Ax_1):	$(\forall x)(x \in a \Longleftrightarrow x \in b) \implies a = b$
Páraxióma (Ax_2):	$\mathcal{M}(\{a, b\})$
Únióaxióma (Ax_3):	$\mathcal{M}(\cup\, a)$
Hatványhalmazaxióma (Ax_4):	$\mathcal{M}(\mathcal{P}\,(a))$
Helyettesítési axiómaséma (Ax_5):	$\mathcal{F}nc(F) \Rightarrow \mathcal{M}(F^* a)$
Végtelenségi axióma (Ax_6):	$\mathcal{M}(\omega)$
Kiválasztási axióma (Ax_7):	$(\exists f)\big(f\,\mathcal{F}nc\,(a) \,\wedge\, (\forall x \in a)(x \neq 0 \Rightarrow f(x) \in x)\big)$
Regularitási axióma (Ax_8):	$a \neq 0 \Longrightarrow (\exists x \in a)(x \cap a = 0)$