Szintaxis

1. Termek

(i) Minden változó és konstans szimbólum term
(ii) Ha $j \in J$ és $t_1\,,\, t_2, \ldots, t_{\varrho(j)}$ termek, akkor $(f_j, t_1\,,\, t_2, \ldots, t_{\varrho(j)})$ term
(iii) Szimbólumok egy véges sorozata csak akkor term, ha (i) ill. (ii) véges sok alkalmazásával áll elő.

Jelölés
$f_j(t_1\,,\, t_2, \ldots, t_{\varrho(j)}) \doteq (f_j, t_1\,,\, t_2, \ldots, t_{\varrho(j)})$

2. Formulák

(a) Atomi formulák
(i) Ha t_1 és t_2 termek, akkor $t_1 = t_2$ atomi formula
(ii) Ha $i \in I$ és $t_1\,,\, t_2, \ldots, t_{\varrho(i)}$ termek, akkor $(r_i\,, t_1\,,\, t_2, \ldots, t_{\varrho(i)})$ atomi formula

(b) Formulák
(i) Minden atomi formula formula
(ii) Ha φ és ψ formulák, akkor $(\neg\,\varphi)$ és $(\wedge\,,\, \varphi\,,\, \psi)$ formulák. (*és* ill. *nem*)
(iii) Ha $n \in \mathbb{N}$ és φ formula, akkor $((\forall v_n)\,,\, \varphi)$ formula (*minden* (*tetszőleges*))
(iii) Szimbólumok egy véges sorozata csak akkor formula, ha (i), (ii) ill. (iii) véges sok alkalmazásával áll elő.

Jelölés
$r_i(t_1, t_2 \ldots, t_{\varrho(i)}) \doteq (r_i, t_1, t_2 \ldots, t_{\varrho(i)})$, $\neg\,\varphi \doteq (\neg, \varphi)$, $\varphi \wedge \psi \doteq (\wedge, \varphi, \psi)$, $(\forall v_n)\varphi \doteq ((\forall v_n), \varphi)$

3. Változók típusai

1.a A $\mathrm{var} : \mathcal{T}m \longrightarrow \mathcal{P}(V)$ függvényt definiáló feltételek:
(i) $\mathrm{var}\,(x) \doteq \{x\}\,,\ \mathrm{var}\,(c) \doteq \emptyset$
(ii) $\mathrm{var}\,(f_j(t_1, t_2, \ldots t_{\varrho(j)})) \doteq \bigcup_{k=1}^{\varrho(j)} \mathrm{var}\,(t_k)$ (tetsz. $j \in J$–re)
1.b A $\mathrm{var} : \mathcal{F}m \longrightarrow \mathcal{P}(V)$ függvényeket definiáló feltételek:
(i) $\mathrm{var}\,(t = s) \doteq \mathrm{var}\,(t) \cup \mathrm{var}\,(s)$
(ii) $\mathrm{var}\,(r_i(t_1, t_2, \ldots t_{\varrho(i)})) \doteq \bigcup_{k=1}^{\varrho(i)} \mathrm{var}\,(t_k)$ (tetsz. $i \in I$–re)
(iii) $\mathrm{var}\,(\neg\,\varphi) \doteq \mathrm{var}\,(\varphi)\,,\quad \mathrm{var}\,(\varphi \wedge \psi) \doteq \mathrm{var}\,(\varphi) \cup \mathrm{var}\,(\psi)$
(iv) $\mathrm{var}\,((\forall x)\,\varphi) \doteq \mathrm{var}\,(\varphi) \setminus \{x\}$

2. Legyen $t \in \mathcal{T}m$. A $\mathrm{bnd}_t : \mathcal{F}m \longrightarrow \mathcal{P}(V)$ függvényt definiáló feltételek:
(i) $\mathrm{bnd}_t(t_1 = t_2) \doteq \mathrm{bnd}_t(r_i(t_1, t_2, \ldots t_{\varrho(i)})) \doteq \emptyset$ (tetsz. $j \in J\,,\, i \in I$–re)
(ii) $\mathrm{bnd}_t\,(\neg\,\varphi) \doteq \mathrm{bnd}_t\,(\varphi)\,,\quad \mathrm{bnd}_t\,(\varphi \wedge \psi) \doteq \mathrm{bnd}_t\,(\varphi) \cup \mathrm{bnd}_t\,(\psi)$
(iii) $\mathrm{bnd}_t((\forall x)\,\varphi) \doteq \begin{cases} \mathrm{var}\,(\varphi) \setminus \{x\} & \text{ha } x \in \mathrm{var}\,(t) \\ \mathrm{bnd}_t\,(\varphi) \setminus \{x\} & \text{ha } x \notin \mathrm{var}\,(t) \end{cases}$

x *szabad* változója φ–nek ha $x \in \mathrm{var}\,(\varphi)$
x *t–re nézve szabad (kötött)* változója φ–nek ha $x \notin \mathrm{bnd}_t\,(\varphi)$ $(\, x \in \mathrm{bnd}_t\,(\varphi)\,)$

4. Helyettesítés

Legyen $a \in \mathrm{Rg}\,\mathsf{c} \cup \mathrm{Rg}\,\mathsf{v}$, $t \in \mathcal{T}m$. A $\mathrm{sbs}_t^a : \mathcal{T}m \cup \mathcal{F}m \longrightarrow \mathcal{T}m \cup \mathcal{F}m$ függvényt definiáló feltételek:

(i) $\mathrm{sbs}_t^a(z) \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} t & \text{ha } z = a \\ z & \text{ha } z \neq a \end{cases}$

(ii) $\mathrm{sbs}_t^a(f_j(t_1, t_2, \dots t_{\varrho(j)})) \stackrel{\circ}{=} f_j(\mathrm{sbs}_t^a(t_1), \mathrm{sbs}_t^a(t_2), \dots \mathrm{sbs}_t^a(t_{\varrho(j)}))$ (tetsz. $j \in J$–re)

(iii) $\mathrm{sbs}_t^a(s_1 = s_2) \stackrel{\circ}{=} \mathrm{sbs}_t^a(s_1) = \mathrm{sbs}_t^a(s_2)$

(iv) $\mathrm{sbs}_t^a(r_i(t_1, t_2, \dots t_{\varrho(i)})) \stackrel{\circ}{=} r_i(\mathrm{sbs}_t^a(t_1), \mathrm{sbs}_t^a(t_2), \dots \mathrm{sbs}_t^a(t_{\varrho(i)}))$ (tetsz. $i \in I$–re)

(v) $\mathrm{sbs}_t^a(\neg\varphi) \stackrel{\circ}{=} \neg\,\mathrm{sbs}_t^a(\varphi)$, $\mathrm{sbs}_t^a(\varphi \wedge \psi) \stackrel{\circ}{=} \mathrm{sbs}_t^a(\varphi) \wedge \mathrm{sbs}_t^a(\psi)$

(vi) $\mathrm{sbs}_t^a((\forall z)\,\varphi) \stackrel{\circ}{=} \begin{cases} (\forall z)\,\varphi & \text{ha } z = a \\ (\forall z)\,\mathrm{sbs}_t^a(\varphi) & \text{ha } z \neq a \end{cases}$

5. Bizonyíthatóság

(a) Logikai axiómák

1. *Propozicionális kalkulus axiómái*:

Implikációaxiómák:

ax_{i1}: $\varphi \Longrightarrow (\psi \Longrightarrow \varphi)$

ax_{i2}: $\big(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \eta)\big) \Longrightarrow \big((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \eta)\big)$

ax_{i3}: $(\neg\varphi \Rightarrow \neg\psi) \Longrightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$

Konjunkcióaxiómák:

ax_{c1}: $\varphi \wedge \psi \Longrightarrow \varphi$

ax_{c2}: $\varphi \wedge \psi \Longrightarrow \psi$

ax_{c3}: $\varphi \Longrightarrow (\psi \Longrightarrow \varphi \wedge \psi)$

2. *Kvantoraxiómáik*:

ax_{k1}: $(\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Longrightarrow (\varphi \Rightarrow (\forall x)\psi)$ ha $x \notin \mathrm{var}(\varphi)$

ax_{k2}: $(\forall x)\varphi \Longrightarrow \varphi_t^x$ ha $x \notin \mathrm{bnd}_t(\varphi)$ (*Univerzális specifikáció*)

3. *Identitás axiómák*:

ax_{e1}: $x = x$

ax_{e2}: $x = y \Longrightarrow f_j(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_{\varrho(j)}) = f_j(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \dots, x_{\varrho(j)})$
tetszőleges $j \in J$ és $1 \leq k \leq \varrho(j)$–re

ax_{e3}: $x = y \Longrightarrow \big(r_i(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_n) \Rightarrow r_i(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \dots, x_n)\big)$
tetszőleges $i \in I$ és $1 \leq k \leq \varrho(j)$–re
$x = y \Longrightarrow (x = z \Rightarrow y = z)$
$x = y \Longrightarrow (z = x \Rightarrow z = y)$

(b) Bizonyítás

φ–nek Σ–ból való n hosszú *bizonyítása* egy olyan φ_1, φ_2 …, φ_n formulasorozat, melyre fennáll, hogy $\varphi_n = \varphi$ és minden $1 \leq k \leq n$ esetén az alábbi feltételek valamelyike teljesül:

(i) φ_k logikai axióma

(ii) $\varphi_k \in \Sigma$

(iii) van olyan $i, j < k$, hogy $\varphi_i = \varphi_j \Longrightarrow \varphi_k$ (*Modus ponens* (MP))

(iv) van olyan $i < k$, hogy $\varphi_k = (\forall x)\varphi_i$ (*Generalizáció* (G))

Az aritmetizált szintaxis

1. A fundamentális konstruktív relációk

Definíció

$m|n \doteq m \neq 0 \wedge (\exists k \leq n)(n = k \cdot m)$ *osztható*

$\mathcal{P}r(n) \doteq n > 1 \wedge (\forall m < n)(m > 1 \Longrightarrow \neg\, m|n)$ *prím*

$$m\,\mathcal{P}rm(n) \doteq \mathcal{P}r(m) \wedge (\exists k \leq m^{n^2})\big[\neg\, 2|k \wedge m^n|k \wedge \neg\, m^{n+1}|k \wedge \\ \wedge (\forall i < m)(\forall j \leq m)\big([i<j \wedge \mathcal{P}r(i) \wedge \mathcal{P}r(j) \wedge \neg\,(\exists\, l<m)(\mathcal{P}r(l) \wedge i<l<j)] \Longrightarrow \\ \Longrightarrow (\forall l \leq n)(i^l|k \iff j^{l+1}|k)\big)\big]$$ *(vhanyadik) prím*

$$n\,\mathcal{E}xp_i(k) \doteq [(k=0 \vee k=1) \wedge n=0] \vee \\ \vee (n=0 \wedge (\forall m \leq k)(m\,\mathcal{L}gh(k) \Longrightarrow m < i)) \vee \\ \vee (\exists m \leq k)(m\,\mathcal{P}rm(i) \wedge m^n|k \wedge \neg\, m^{n+1}|k)$$ *prímosztó kitevője*

$$n\,\mathcal{L}gh(k) \doteq [(k=0 \vee k=1) \wedge n=0] \vee (\exists m \leq k)\big(m\,\mathcal{P}rm(n) \wedge m|k \wedge \\ \wedge (\forall i \leq k)(\mathcal{P}r(i) \wedge i > m \Longrightarrow \neg\, i|k)$$ *hossz*

Állítás

(i) $p_n = m$ iff $m\,\mathcal{P}rm(n)$

(ii) $(k)_i = n$ iff $n\,\mathcal{E}xp_i(k)$

(iii) $\mathrm{lh}(k) = n$ iff $n\,\mathcal{L}gh(k)$

2. Gödel–számozás

Definíció

Legyen $\mathcal{L}$ tetszőleges megszámlálható elsőrendű nyelv, azaz valamely $Q, I, J, K \subseteq \omega$ esetén

$$\mathcal{L} \doteq \langle f_i^n\,,\ r_j^n\,,\ c_k\,,\ \rho \rangle_{n\in Q,\, i\in I,\, j\in J,\, k\in K}\ ,$$

ahol $\rho(f_i^n) = \rho(r_j^n) = n+1$ minden $n \in Q, i \in I, j \in J$ esetén.

Legyen $Sm_{\mathcal{L}}$ a konstansszimbólumok kivételével az $\mathcal{L}$ összes logikai és nem logikai szimbólumainak halmaza. Legyen $S \doteq Sm_{\mathcal{L}} \cup \mathcal{T}m_{\mathcal{L}} \cup \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ és S^* az $\mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ elemeiből alkotott összes véges sorozatok halmaza. A $g : S \cup S^* \longrightarrow \omega$ függvényt rekurzióval a következőképpen definiáljuk:

(i) $g : Sm_{\mathcal{L}} \longrightarrow \omega$ definíciója:

szimbólum	$=$	$\neg$	$\wedge$	$\forall$	f_i^n	r_j^n
g	3	5	7	9	$11 + 8(2^n\, 3^i)$	$13 + 8(2^n\, 3^j)$

(ii) $g : \mathcal{T}m_{\mathcal{L}} \longrightarrow \omega$ definíciója:

term	v_k	c_k
g	$15 + 8\,k$	$17 + 8\,k$

$$g(f_i^n(t_0, t_1, \ldots t_n)) \triangleq 2^{g(f_i^n)} \cdot 3^{2^{g(t_0)} \cdot 3^{g(t_1)} \cdots p_n^{g(t_n)}}$$

(iii) $g : \mathcal{F}m_{\mathcal{L}} \longrightarrow \omega$ definíciója:

(a) $g(r_j^n(t_0, t_1, \ldots t_n)) \triangleq 2^{g(r_j^n)} \cdot 3^{2^{g(t_0)} \cdot 3^{g(t_1)} \cdots p_n^{g(t_n)}}$

(b) $g(t_0 = t_1) \triangleq 2^{g(=)} \cdot 3^{g(t_0)} \cdot 5^{g(t_1)} = 2^3 \cdot 3^{g(t_0)} \cdot 5^{g(t_1)}$

(c) $g(\neg\,\varphi) \triangleq 2^{g(\neg)} 3^{g(\varphi)} = 2^5 \cdot\, 3^{g(\varphi)}$

(d) $g(\varphi \wedge \psi) \triangleq 2^{g(\wedge)} \cdot 3^{g(\varphi)} \cdot 5^{g(\psi)} = 2^7 \cdot 3^{g(\varphi)} \cdot 5^{g(\psi)}$

(e) $g((\forall v_k)\varphi) \triangleq 2^{g(\forall)} \cdot 3^{g(v_k)} \cdot 5^{g(\varphi)} = 2^9 \cdot 3^{g(v_k)} \cdot 5^{g(\varphi)}$

(iv)

$$g(\langle \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle) \triangleq 2^{g(\varphi_0)} \cdot 3^{g(\varphi_1)} \cdots p_n^{g(\varphi_n)}$$

tetszőleges $s \triangleq \langle \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle \in S^*$ esetén.

3. A szintaxis

TERMEK

- $\mathcal{V}arbl(n) \triangleq (\exists k < n)(n = 15 + 8k)$ *változószimbólum*

  $\mathcal{C}onst(n) \triangleq (\exists k < n)(n = 17 + 8k)$ *konstansszimbólum*

  $\mathcal{F}nsym_m(n) \triangleq (\exists k < n)(n = 11 + 8(2^m\, 3^k))$ *függvényszimbólum*

- $k\, \mathcal{T}mgen(n) \triangleq (k)_{\mathrm{lh}(k)} = n \;\wedge\; (\forall i \leq \mathrm{lh}(k))\big(\mathcal{V}arbl((k)_i) \vee \mathcal{C}onst((k)_i) \vee$

  $\vee \big[\mathrm{lh}((k)_i) = 1 \wedge$

  $\wedge (\exists m \leq k)\big(\mathcal{F}nsym_m(((k)_i)_0) \wedge \mathrm{lh}((k)_i)_1 = m \wedge (\forall l \leq m)(\exists j < i)\big[\big(((k)_i)_1\big)_l = (k)_j\big]\big]\big)$

  termgenerátor

  $\mathcal{T}rm(n) \triangleq \big(\exists\, k < (p_n)^{n^2}\big)(\,k\, \mathcal{T}mgen(n)\,)$ *term*

- $m\,\mathcal{T}mvar(n) \doteq \mathcal{V}arbl(m) \wedge \mathcal{T}rm(n) \wedge$

$$\wedge\,(\forall k < p_n^{n^2})\big(k\mathcal{T}mgen(n) \Rightarrow (\exists i \le \mathrm{lh}(k))((k)_i = m)\big)$$

termváltozó

- $n\,\mathcal{T}msubseq_{\,l}^{\,m}k \doteq \mathcal{V}arbl(m) \wedge \mathcal{T}rm(l) \wedge \mathrm{lh}(n) = \mathrm{lh}(k) \wedge k\mathcal{T}mgen\big((k)_{\mathrm{lh}(k)}\big) \wedge (\forall i \le \mathrm{lh}(k))$
$\big[(\mathcal{V}arbl((k)_i) \vee \mathcal{C}onst((k)_i) \Longrightarrow ((k)_i \ne m \Rightarrow (n)_i = (k)_i) \wedge ((k)_i = m \Rightarrow (n)_i = l)\big) \wedge$
$\wedge\big(\neg\,\mathcal{V}arbl((k)_i) \wedge \neg\,\mathcal{C}onst((k)_i) \Longrightarrow \mathcal{T}rm((n)_i) \wedge \mathrm{lh}((n)_i) = 1 \wedge ((n)_i)_0 = ((k)_i)_0 \wedge$
$\wedge\,\mathrm{lh}((n)_i)_1 = \mathrm{lh}((k)_i)_1 \wedge (\forall j \le \mathrm{lh}((k)_i)_1)(\forall j\,' < i)(((k)_i)_1)_j = (k)_{j\,'} \Longrightarrow (((n)_i)_1)_j = (n)_{j\,'})\big]$

helyettesítéssel kapott termsorozat

$$n\,\mathcal{T}msubst_l^m k \doteq (\exists\, i < p_{n+k}^{(n+k)^2})(\exists\, j < p_k^{k^2})\big(\,(i)_{\mathrm{lh}(n)} = n \wedge j\,\mathcal{T}mgen(k) \wedge i\,\mathcal{T}msubseq_{\,l}^{\,m}\,j\,\big)$$

termhelyettesítés

- $n\mathcal{N}um(m) \doteq (\exists k < p_n^{n^2})(\mathrm{lh}(k) = m \wedge (k)_0 = 17 \wedge (k)_m = n \wedge$
$\wedge\,(\forall i < m\,)((k)_{i+1} = 2^{27} \cdot 3^{(k)_i})$

számterm $\mathcal{L}_A$ – ban

FORMULÁK

- $\mathcal{R}elsym_m(n) \doteq (\exists k < n)(n = 13 + 8(2^m\,3^k))$ *relációszimbólum*

- $\mathcal{A}trel(n) \doteq \mathrm{lh}(n) = 1 \wedge$
$\wedge\,(\exists m < n)\big(\,\mathcal{R}elsym_m((n)_0) \wedge \mathrm{lh}((n)_1) = m \wedge (\forall i \le m)\mathcal{T}rm(((n)_1)_i)\,\big)$ *atomi reláció*

$\mathcal{A}teq(n) \doteq (\exists\, k_0, k_1 < n)(\mathcal{T}rm(k_0) \wedge \mathcal{T}rm(k_1) \wedge n = 2^3 \cdot 3^{k_0} \cdot 5^{k_1})$ *atomi egyenlőség*

$\mathcal{A}tfm(n) \doteq \mathcal{A}trel(n) \vee \mathcal{A}teq(n)$ *atomi formula*

- $k\,\mathcal{F}mgen(n) \doteq (k)_{\mathrm{lh}(k)} = n \wedge (\forall i \le \mathrm{lh}(k)\,)$
$\big(\mathcal{A}tfm((k)_i) \vee (\exists\, j < i)((k)_i = 2^5 \cdot 3^{k_j}) \vee (\exists\, j, m < i)((k)_i = 2^7 \cdot 3^{k_j} \cdot 5^{k_m}) \vee$
$\vee\,(\exists\, j < i)(\exists\, m < n)(\mathcal{V}arbl(m) \wedge (k)_i = 2^9 \cdot 3^m \cdot 5^{k_j})\big)$ *formulagenerátor*

$\mathcal{F}ml\,(n) \doteq (\exists k < p_n^{n^2})k\,\mathcal{F}mgen(n)$ *formula*

- $n\,\mathcal{A}trelsub_{\,l}^{\,m}k \doteq \mathcal{V}arbl(m) \wedge \mathcal{T}rm(l) \wedge \mathcal{A}trel(k) \wedge \mathcal{A}trel(n) \wedge$
$\wedge(\forall j < k)\big(\,\mathcal{R}elsym_j((k)_0) \Longrightarrow \mathcal{R}elsym_j((n)_0) \wedge (\forall i \le j)((n)_1)_i\mathcal{T}msubst_l^m(((k)_1)_i)\big)$

atomi reláció helyettesítés

$n\,\mathcal{A}teqsub_{\,l}^{\,m}k \doteq \mathcal{V}arbl(m) \wedge \mathcal{T}rm(l) \wedge \mathcal{A}teq(k) \wedge \mathcal{A}teq(n) \wedge$
$\wedge\,(\forall k_0, k_1 < k)(\forall n_0, n_1 < n)\big(k = 2^3 \cdot 3^{k_0} \cdot 5^{k_1} \wedge n = 2^3 \cdot 3^{n_0} \cdot 5^{n_1} \Longrightarrow$
$\Longrightarrow n_0\mathcal{T}msubst_l^m k_0 \wedge n_1\mathcal{T}msubst_l^m k_1\big)$

atomi egyenlőség helyettesítés

- $n\,\mathcal{F}msubseq_{l}^{m}k \doteq$
$$\mathcal{V}arbl(m) \wedge \mathcal{T}rm(l) \wedge \mathrm{lh}(n) = \mathrm{lh}(k) \wedge k\,\mathcal{F}mgen\big((k)_{\mathrm{lh}(k)}\big) \wedge (\forall i \le \mathrm{lh}(k))(\forall j_0, j_1 < i)$$
$$\big((\mathcal{A}trel((k)_i) \Rightarrow (n)_i \mathcal{A}trelsub_{l}^{m}(k)_i) \wedge (\mathcal{A}teq((k)_i) \Rightarrow (n)_i \mathcal{A}teqsub_{l}^{m}k_i) \wedge$$
$$((k)_i = 2^5 \cdot 3^{k_{j_0}} \Rightarrow (n)_i = 2^5 \cdot 3^{n_{j_0}}) \wedge ((k)_i = 2^7 \cdot 3^{k_{j_0}} \cdot 5^{k_{j_1}} \Rightarrow (n)_i = 2^7 \cdot 3^{n_{j_0}} \cdot 5^{n_{j_1}}) \wedge$$
$$\wedge (\forall l < k)\,[\,\mathcal{V}arbl(l) \wedge (k)_i = 2^9 \cdot 3^l \cdot 5^{k_{j_0}} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (\, l \ne m \Rightarrow (n)_i = 2^9 \cdot 3^l \cdot 5^{n_{j_0}}) \wedge (\, l = m \Rightarrow (n)_i = (k)_i\,]\,\big)$$
helyettesítéssel kapott formulasorozat

$$n\,\mathcal{F}msubst_{l}^{m}k \doteq (\exists\, i < p_{n+k}^{(n+k)^2})(\exists\, j < p_k^{k^2})\big(\,(i)_{\mathrm{lh}(n)} = n \wedge j\,\mathcal{F}mgen(k) \wedge i\,\mathcal{F}msubseq_{l}^{m}\,j\,\big)$$
formulahelyettesítés

- $$n\,\mathcal{A}tfmtm(m) \doteq \mathcal{T}rm(n) \wedge \big(\,[\mathcal{A}trel(m) \wedge (\exists i \le \mathrm{lh}((m)_1))(((m)_1)_i = n] \vee$$
$$\vee\ [\mathcal{A}teq(m) \wedge ((m)_1 = n \vee (m)_2 = n)]\big)\big)$$
atomi formulában előforduló term

$$n\,\mathcal{A}tfmvar(m) \doteq \mathcal{V}arbl(n) \wedge \mathcal{A}tfm(m) \wedge (\exists k < m)\big(k\,\mathcal{A}tfmtm(m) \wedge n\,\mathcal{T}mvar(k)\big)$$
atomi formula változója

- $k\,\mathcal{P}cfmgen(n) \doteq (k)_{\mathrm{lh}(k)} = n \wedge \mathcal{A}tfm((k)_0) \wedge (\forall i < \mathrm{lh}(k)\,)$
$$\big(((k)_{i+1} = 2^5 \cdot 3^{k_i}) \vee (\exists j < n)(\mathcal{F}ml(j) \wedge [(k)_{i+1} = 2^7 \cdot 3^j \cdot 5^{k_i} \vee (k)_{i+1} = 2^7 \cdot 3^{k_i} \cdot 5^j] \vee$$
$$\vee (\exists\, m < n)(\mathcal{V}arbl(m) \wedge (k)_{i+1} = 2^9 \cdot 3^m \cdot 5^{k_i})\big)$$
parciálisan generáló formulasorozat

$$n\,\mathcal{V}ar(m) \doteq \mathcal{V}arbl(n) \wedge \mathcal{F}ml(m) \wedge (\exists k < p_m^{m^2})\big(k\,\mathcal{P}cfmgen(m) \wedge n\,\mathcal{A}tfmvar((k)_0) \wedge$$
$$\wedge (\forall i \le \mathrm{lh}(k))(\forall\, j < m)(\forall\, l < m)(\mathcal{V}arbl(l) \wedge \mathcal{F}ml(j) \wedge (k)_i = 2^9 \cdot 3^l \cdot 5^j \Longrightarrow l \ne n)\big)$$
szabad változó

$$n\,\mathcal{B}nd_l(m) \doteq \mathcal{V}arbl(n) \wedge \mathcal{F}ml(m) \wedge \mathcal{T}rm(l) \wedge$$
$$\wedge (\exists k < p_m^{m^2})\big(k\,\mathcal{P}cfmgen(m) \wedge n\,\mathcal{A}tfmvar((k)_0) \wedge$$
$$\wedge (\forall i \le \mathrm{lh}(k))(\forall j < m)(\forall i' < m)(\mathcal{V}arbl(j) \wedge \mathcal{F}ml(i') \wedge (k)_i = 2^9 \cdot 3^j \cdot 5^{i'} \Longrightarrow j \ne n) \wedge$$
$$\wedge (\exists\, i \le \mathrm{lh}(k))(\exists\, j < m)(\exists\, i' < m)(j\mathcal{T}mvar(l) \wedge \mathcal{F}ml(i') \wedge (k)_i = 2^9 \cdot 3^j \cdot 5^{i'})\big)$$
termre nézve kötött változó

- $$\mathcal{F}rml_k(n) \doteq \mathcal{F}ml(n) \wedge (\forall m < n)\big(m\,\mathcal{V}ar(n) \Longrightarrow (\exists\, l \le k)(m = 15 + 8 \cdot l \wedge l \ge 1)\big)$$
legfeljebb vmennyi változójú formula

$\mathcal{S}nt(n) \doteq \mathcal{F}ml(n) \wedge (\forall m < n)\neg\, m\,\mathcal{V}ar(n)$ *mondat*

- $n\,\mathcal{N}eg(m) \doteq \mathcal{F}ml(n) \wedge \mathcal{F}ml(m) \wedge n = 2^5 \cdot 3^m$ *tagadás*

$n\,\mathcal{C}onj(n_1, n_2) \doteq \mathcal{F}ml(n) \wedge \mathcal{F}ml(n_1) \wedge \mathcal{F}ml(n_2) \wedge n = 2^7 \cdot 3^{n_1} \cdot 5^{n_2}$ *konjunkció*

$$n\,\mathcal{I}mpl(n_1, n_2) \doteq \mathcal{F}ml(n) \wedge (\exists m_1, m_2 < n)\big(n\,\mathcal{N}eg(m_1) \wedge m_1\mathcal{C}onj(n_1, m_2) \wedge m_2\,\mathcal{N}eg(n_2)\big)$$
implikáció

$$n\,\mathcal{U}niv_k(m) \doteq \mathcal{F}ml(n) \wedge \mathcal{F}ml(m) \wedge \mathcal{V}arbl(k) \wedge n = 2^9 \cdot 3^k \cdot 5^m$$
univerzális kvantifikáció

BIZONYÍTÁS

- $\mathcal{A}ximpl_1(n) \doteq (\exists n_1, n_2, m < n)\big(n\,\mathcal{I}mpl(n_1, m) \,\wedge\, m\,\mathcal{I}mpl(n_2, n_1)\big)$

  $$\mathcal{A}ximpl_2(n) \doteq (\exists n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, k, k_1, k_2 < n)\big(n\,\mathcal{I}mpl(m_1, m_2) \wedge \wedge m_1\,\mathcal{I}mpl(n_1, k) \,\wedge\, k\,\mathcal{I}mpl(n_2, n_3) \,\wedge\, m_2\,\mathcal{I}mpl(k_1, k_2) \wedge \wedge k_1\,\mathcal{I}mpl(n_1, n_2) \,\wedge\, k_2\,\mathcal{I}mpl(n_1, n_3)\big)$$

  $$\mathcal{A}ximpl_3(n) \doteq \big(\exists n_1, n_2, m_1, m_2, k_1, k_2 < n)(n\,\mathcal{I}mpl(m_1, m_2) \wedge \wedge m_1\,\mathcal{I}mpl(k_1, k_2) \,\wedge\, k_1\,\mathcal{N}eg(n_1) \,\wedge\, k_2\,\mathcal{N}eg(n_2) \,\wedge\, m_2\,\mathcal{I}mpl(n_2, n_1)\big)$$

- $\mathcal{A}xconj_1(n) \doteq \big(\exists n_1, n_2, m < n)(n\,\mathcal{I}mpl(m, n_1) \,\wedge\, m\,\mathcal{C}onj(n_1, n_2)\big)$

  $\mathcal{A}xconj_2(n) \doteq (\exists n_1, n_2, m < n)\big(n\,\mathcal{I}mpl(m, n_2) \,\wedge\, m\,\mathcal{C}onj(n_1, n_2)\big)$

  $\mathcal{A}xconj_3(n) \doteq (\exists n_1, n_2, m < n)\big(n\,\mathcal{I}mpl(n_1, m) \,\wedge\, m\,\mathcal{I}mpl(n_2, k) \,\wedge\, k\,\mathcal{C}onj(n_1, n_2)\,\big)$

- $$\mathcal{A}xquan_1(n) \doteq (\exists n_1, n_2, m_1, m_2, k_1, k_2, i < n)\big(\neg\, i\,\mathcal{V}ar(n_1) \,\wedge\, n\,\mathcal{I}mpl(m_1, m_2) \wedge \wedge m_1\,\mathcal{U}niv_i(k_1) \,\wedge\, k_1\,\mathcal{I}mpl(n_1, n_2) \,\wedge\, m_2\,\mathcal{I}mpl(n_1, k_2) \,\wedge\, k_2\,\mathcal{U}niv_i(n_2)\big)$$

  $$\mathcal{A}xquan_2(n) \doteq (\exists n_1, n_2, i, j, k < n)\big(\neg\, i\,\mathcal{B}nd_j(k) \,\wedge\, n\,\mathcal{I}mpl(n_1, n_2) \wedge \wedge n_1\,\mathcal{U}niv_i(k) \,\wedge\, n_2\,\mathcal{F}msubst^{\,i}_j k\,\big)$$

- $\mathcal{A}xid_1(n) \doteq (\exists m < n)\big(\mathcal{V}arbl(m) \,\wedge\, n = 2^3 \cdot 3^m \cdot 5^m\big)$

  $$\begin{aligned}\mathcal{A}xid_2(n) \doteq{} & (\exists n_1, n_2, m_1, m_2 < n)\big(n\,\mathcal{I}mpl(n_1, n_2) \,\wedge\, \mathcal{V}arbl(m_1) \,\wedge\, \mathcal{V}arbl(m_2) \wedge \\ & \wedge n_1 = 2^3 \cdot 3^{m_1} \cdot 5^{m_2} \wedge (\exists k, k' {<} n_2)\big(n_2 = 2^3 \cdot 3^k \cdot 5^{k'} \,\wedge\, \mathrm{lh}(k){=}1 \,\wedge\, \mathrm{lh}(k'){=}1 \wedge \\ & \wedge (\exists i {\le} k)\big[\mathcal{F}nsym_i((k)_0) \,\wedge\, \mathcal{F}nsym_i((k')_0) \,\wedge\, (k)_0 = (k')_0 \wedge \\ & \wedge \mathrm{lh}((k)_1){=}i \,\wedge\, \mathrm{lh}((k')_1){=}i \wedge (\forall l \le i)(\mathcal{V}arbl(((k)_1)_l) \,\wedge\, \mathcal{V}arbl(((k')_1)_l) \wedge \\ & \wedge (\exists j \le i)[((k)_1)_j{=}m_1 \,\wedge\, ((k')_1)_j{=}m_2 \,\wedge\, (\forall l \le i)(l \ne j \Rightarrow ((k)_1)_l{=}\,((k')_1)_l)\,]\,)\big]\big)\end{aligned}$$

  $$\begin{aligned}\mathcal{A}xid_3(n) \doteq{} & (\exists n_1, n_2, m_1, m_2 < n)\big(n\,\mathcal{I}mpl(n_1, n_2) \,\wedge\, \mathcal{V}arbl(m_1) \,\wedge\, \mathcal{V}arbl(m_2) \wedge \\ & \wedge n_1 = 2^3 \cdot 3^{m_1} \cdot 5^{m_2} \wedge (\exists k, k' {<} n_2)\big(n_2\,\mathcal{I}mpl(k, k') \,\wedge\, \mathrm{lh}(k){=}1 \,\wedge\, \mathrm{lh}(k'){=}1 \wedge \\ & \wedge (\exists i {\le} k)\big[\mathcal{R}elsym_i((k)_0) \wedge \mathcal{R}elsym_i((k')_0) \,\wedge\, (k)_0 = (k')_0 \wedge \\ & \wedge \mathrm{lh}((k)_1){=}i \,\wedge\, \mathrm{lh}((k')_1){=}i \,\wedge\, (\forall l \le i)(\mathcal{V}arbl(((k)_1)_l) \,\wedge\, \mathcal{V}arbl(((k')_1)_l) \wedge \\ & \wedge (\exists j \le i)[((k)_1)_j{=}m_1 \,\wedge\, ((k')_1)_j{=}m_2 \,\wedge\, (\forall l \le i)(l \ne j \Rightarrow ((k)_1)_l{=}\,((k')_1)_l)\,]\,)\big]\big) \vee \\ & \vee (\exists n_1, n_2, m_1, m_2, m_3 < n)\big(n\,\mathcal{I}mpl(n_1, n_2) \,\wedge\, \mathcal{V}arbl(m_1) \,\wedge\, \mathcal{V}arbl(m_2) \wedge \\ & \qquad \wedge n_1 = 2^3 \cdot 3^{m_1} \cdot 5^{m_2} \wedge (\exists k, k' {<} n_2)\big[n_2\,\mathcal{I}mpl(k, k') \wedge \\ & \wedge [(k = 2^3 \cdot 3^{m_1} \cdot 5^{m_3} \,\wedge\, k' = 2^3 \cdot 3^{m_2} \cdot 5^{m_3}) \vee\, (k = 2^3 \cdot 3^{m_3} \cdot 5^{m_1} \,\wedge\, k' = 2^3 \cdot 3^{m_3} \cdot 5^{m_2})\,]\,\big]\big)\end{aligned}$$

- $$\mathcal{A}xlog(n) \doteq \mathcal{A}ximpl_1(n) \vee \mathcal{A}ximpl_2(n) \vee \mathcal{A}ximpl_3(n) \vee \mathcal{A}xconj_1(n) \vee \mathcal{A}xconj_2(n) \vee \vee \mathcal{A}xconj_3(n) \vee \mathcal{A}xquan_1(n) \vee \mathcal{A}xquan_2(n) \vee \mathcal{A}xid_1(n) \vee \mathcal{A}xid_2(n) \vee \mathcal{A}xid_3(n)$$

- $k\,\mathcal{P}rf_{\Gamma}(n) \doteq (k)_{\mathrm{lh}(k)}{=}n \;\wedge\; (\forall i{\le}\mathrm{lh}(k)\,)\big(\mathcal{F}ml((k)_i)\wedge$
$$\wedge\big[\,\mathcal{A}xlog((k)_i)\;\vee\;\mathcal{A}x((k)_i)\vee\;(\exists\,j,m{<}i)[(k)_j\,\mathcal{I}mpl((k)_m,(k)_i)]\vee$$
$$\vee\,(\exists\,j{<}i)(\exists\,l{<}n)[\mathcal{V}arbl(l)\;\wedge\;(k)_i\,\mathcal{U}niv_l((k)_j)]\,\big]\big)$$

  ahol $\Gamma\subseteq\mathcal{S}n_{\mathcal{L}}$, $\mathcal{A}x\doteq g^*\Gamma$

  bizonyítás

$\mathcal{P}r_{\Gamma}(n)\doteq\mathcal{S}nt(n)\;\wedge\;(\exists k)\,k\,\mathcal{P}rf_{\Gamma}(n)$ *bizonyíthatóság*

Példák

- $\mathcal{A}x_{Q_0}$

  [Az α_6 kivételével triviális (legfeljebb az az újdonság az előzőekhez képest az, hogy az axiómákban számtermek is szerepelnek) és egymással analóg. Így az α_6 kivételével csak egyről, az α_1 – ről mutatjuk meg, hogy Δ_0 – definiálható.

  (a) $\mathcal{A}x_{\alpha_1}(n)\doteq(\exists i,j,k,n_1,n_2<n)$
  $$\big(i\,\mathcal{N}um(n_1)\wedge j\,\mathcal{N}um(n_2)\wedge k\,\mathcal{N}um(n_1+n_2)\wedge n={2^3\cdot 3^k\cdot 5^{2^{43}\cdot 3^{2^i\cdot 3^j}}}\big)$$

  (b) $\mathcal{A}x_{\alpha_6}$ egy kicsit problematikusabb, mert rekurzíve definiált diszjunkció szerepel benne. Ehhez definiálnunk kell a diszjunkciót és segítségével a szokásos (sorozatos) módon az axiómában szereplő $m+1$ elemű diszjunkciót.

  (1) $n\,\mathcal{D}is(m,k)\doteq(\exists i<n)(n\mathcal{I}mpl(i,k)\wedge i\,\mathcal{N}eg(m))$

  (2) $n\,\mathcal{D}s(m)\doteq(\exists k{<}p_n^{n^2})\big(\mathrm{lh}(k){=}m\;\wedge(k)_0=2^3\cdot 3^{23}\cdot 5^{17}\wedge\;(k)_m=n\wedge$
  $$\wedge(\forall i{<}m\,)(\exists\,l<n)\big(l\,\mathcal{N}um(i{+}1)\wedge(k)_{i+1}\,\mathcal{D}is((k)_i,2^3\cdot 3^{23}\cdot 5^l))\big)\big)$$

  Nyilván $n\mathcal{D}is(m,k)$ iff n az m és k Gödel számú formulák diszjunkciójának Gödel–száma és $n\,\mathcal{D}s(m)$ iff $n=g(\bigvee_{i=0}^{m}v_1{=}i)$. Ezzel aztán az $\mathcal{A}x_{\alpha_6}$:

  $\mathcal{A}x_{\alpha_6}(n)\doteq(\exists m,k,k_1,k_2,n_1,n_2,n_3,m_1,m_2<n)$
  $$\big(n\,\mathcal{U}niv_{23}n_3\wedge n_3\mathcal{C}onj(k_1,k_2)\wedge k_1\mathcal{I}mpl(n_1,n_2)\wedge k_2\mathcal{I}mpl(n_2,n_1)\wedge$$
  $$\wedge n_1\,\mathcal{D}is(m_1,m_2)\wedge k\,\mathcal{N}um(m)\wedge m_1{=}2^3\cdot 3^{23}\cdot 5^k\wedge m_2{=}2^{45}\cdot 3^{23}\cdot 5^k\wedge n_2\,\mathcal{D}s(m)\big)$$]

- $\mathcal{A}x_{PA}$ konstruktív reláció.

  [Az egyetlen konstruktivitás szempontjából nemtriviális azióma nyilván az indukció séma, úgyhogy csak erről mutatjuk meg, hogy Δ_0 – definiálható. (A többiek egyes formulák, pl. $(\forall v_1)(v_1+0=v_1)$, tehát ilyen alakúak: $\mathcal{A}x_i(n)\doteq(n=k_i)$ valamely fix k_i számtermekre, tehát a $v_1=k_i$ $(k_i=1,2,\ldots)$ atomi formulával definiáltak.)

  Maga az indukcó séma a következő: $\varphi^{v_1}_{0}\wedge(\forall v_1)(\varphi\Rightarrow\varphi^{v_1}_{sv_1})\Longrightarrow(\forall v_1)\varphi$. Így

  $\mathcal{A}x_{ind}(n)\doteq(\exists i,m,n_1,n_2,n_3,n_4,n_5,n_6<n)$
  $$\big(\mathcal{F}ml(m)\wedge n\,\mathcal{I}mpl(n_1,n_2)\wedge n_2\,\mathcal{U}niv_{23}m\wedge n_1\mathcal{C}onj(n_3,n_4)\wedge$$
  $$\wedge n_3\,\mathcal{F}msubst^{23}_{17}m\wedge n_4\,\mathcal{U}niv_{23}n_5\wedge n_5\mathcal{I}mpl(m,n_6)\wedge n_6\,\mathcal{F}msubst^{23}_{i}m\wedge i{=}2^{27}\cdot 3^{2^{23}}\big)$$]

Elemi logikai tények

Helyettesítési lemma

Állítás

Legyen $\mathcal{L}$ tetszőleges nyelv, $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathcal{T}m_{\mathcal{L}}$, $\varphi = \varphi(v_0, v_1, \ldots, v_n) \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$. Tegyük fel, hogy $t_1, t_2, \ldots, t_n$ egyetlen változója sem szerepel kötötten φ – ben, azaz minden $1 \leq i \leq n$ – re φ – ben a t_i változói szerinti kvantorok hatókörében v_i nem fordul elő szabadon. Ekkor $\mathcal{L}$ minden $\mathfrak{A}$ modellje és minden $a \in A^\omega$ értékelés esetén

(i) $t(t_1, t_2, \ldots, t_n)[a] = t\big[t_1[a], t_2[a], \ldots, t_n[a]\big]$

(ii) $\mathfrak{A} \models \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)[a]$ iff $\mathfrak{A} \models \varphi(t_1[a], t_2[a], \ldots, t_n[a])$

Például

Ha a modell az $\underline{\omega}$, a nyelv pedig ennek a modellnek a nyelve és minden $n \in \omega, n > 0$ esetén $\underline{n} \mathrel{\mathring{=}} s^n 0$, akkor

$$\underline{\omega} \models \varphi(n_1, n_2, \ldots, n_k) \quad \text{iff} \quad \underline{\omega} \models \varphi[\underline{n_1}, \underline{n_2}, \ldots, \underline{n_k}]$$

Logikai tételek

Állítás

Tetszőleges φ, ψ esetén, ha $x \notin \mathrm{var}(\psi)$, akkor

$$\vdash \varphi \Longrightarrow \psi \;\leadsto\; \vdash (\exists x)\varphi \Longrightarrow \psi$$

$$[\; \vdash \varphi \Longrightarrow \psi \;\leadsto\; \neg\psi \vdash \neg\varphi \vdash (\forall x)\neg\varphi \vdash \neg(\exists x)\varphi \;\leadsto$$

$$\leadsto\; \vdash \neg\psi \Longrightarrow \neg(\exists x)\varphi \vdash (\exists x)\varphi \Longrightarrow \psi \;]$$

Állítás

Tetszőleges φ, ψ esetén, ha $x \notin \mathrm{var}(\psi)$, akkor

$$\vdash \varphi \Longrightarrow \psi \;\leadsto\; \vdash (\exists x)\varphi \Longrightarrow (\exists x)\psi$$

$$[\; \vdash \varphi \Longrightarrow \psi \;\leadsto\; \neg(\exists x)\psi \vdash (\forall x)\neg\psi \vdash \neg\psi \vdash \neg\varphi \vdash (\forall x)\neg\varphi \vdash \neg(\exists x)\varphi \;\leadsto$$

$$\leadsto\; \vdash \neg(\exists x)\psi \Longrightarrow \neg(\exists x)\varphi \vdash (\exists x)\varphi \Longrightarrow (\exists x)\psi \;]$$

Megjegyzés

(i) Az előző Állítás ennek speciális esete.

(ii) Az Álítás dedukciós tétel alkalmazása nélküli következménye egy a (pl. teljességi tétellel, vagy a $(\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi), (\forall x)\varphi \vdash \varphi, \varphi \Rightarrow \psi \vdash \psi \vdash (\forall x)\psi$ – ből triviális) logikai tételnek: $\vdash (\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Longrightarrow \big((\forall x)\varphi \Rightarrow (\forall x)\psi\big)$. Valóban,

$$\vdash \varphi \Longrightarrow \psi \vdash (\forall x)(\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi) \vdash (\forall x)\neg\psi \Rightarrow (\forall x)\neg\varphi) \vdash \neg(\forall x)\neg\varphi \Longrightarrow \neg(\forall x)\neg\psi\,.$$

(iii) Triviálisan belátható teljességi tétellel:

$\mathfrak{A} \not\models (\exists x)\varphi \Longrightarrow (\exists x)\psi \;\leadsto\; \mathfrak{A} \models (\exists x)\varphi \wedge \neg\,(\exists x)\psi \;\leadsto$

$\leadsto$ valamely $a \in A$ – ra $\mathfrak{A} \models \varphi[a] \wedge \neg\,\psi[a] \;\leadsto\; \mathfrak{A} \not\models (\varphi \Longrightarrow \psi)[a]$

Állítás

Tetszőleges φ, x, t esetén

$$\vdash \varphi_t^x \iff (\exists x)(\, x = t \wedge \varphi\,) \qquad\qquad x \notin \mathrm{var}\,(t) \cup \mathrm{bnd}_t(\varphi)$$

$[\Longrightarrow:\; \vdash (\forall x)\neg\,\psi(x) \Longrightarrow \neg\,\psi(t) \;\vdash\; \psi(t) \Longrightarrow (\exists x)\psi(x) \;\leadsto$

$\leadsto\; \varphi(t) \;\vdash\; \varphi(t) \wedge t = t \;\vdash\; (\exists x)(x = t \wedge \varphi(x))$

$\Longleftarrow:\; \vdash x = t \wedge \varphi(x) \Longrightarrow \varphi(t) \;\leadsto\; \vdash (\exists x)(x = t \wedge \varphi(x)) \Longrightarrow \varphi(t) \quad]$