FOGALOMHÁLÓ II.

G az objektumok halmaza,

M az attributumok halmaza,

Legyen $I \subseteq G \times M$ egy megfeleltetés. Ekkor a (G, M, I) hármast *kontextusnak* nevezzük.

$$\text{Ha } X \subseteq G, \text{ ekkor legyen } X' = \{m \in M, \text{ minden } x \in X - \text{re } (x, m) \in I\},$$

$$\text{Ha } Y \subseteq M, \text{ ekkor legyen } Y' = \{g \in G, \text{ minden } y \in Y - \text{ra } (g, y) \in I\}.$$

Nyilván $X' \subseteq M$ és $Y' \subseteq G$.

Az (X, Y) párt *fogalomnak* nevezzük, ha $X' = Y$ és $Y' = X$. Ekkor X a fogalom terjedelme Y pedig a tartalma.

Ha (X_1, Y_1) és (X_2, Y_2) fogalmak, akkor $(X_1, Y_1) \leq (X_2, Y_2)$ akkor és csakis akkor ha $X_1 \subseteq X_2$, ami ekvivalens azzal, hogy $Y_1 \supseteq Y_2$. Ezen rendezésre nézve a fogalmak hálót alkotnak. Ez a

$\mathfrak{L}(G, M, I)$ a fogalomháló, amelyben a hálóműveleteket a következő módon írhatjuk le:

Állítás. *Legyen* $\{(X_j, Y_j) : j \in J\} \subseteq \mathfrak{L}(G, M, I)$. *Ekkor*

$$\bigwedge_{j \in J} (X_j, Y_j) = (\bigcap_{j \in J} X_j, (\bigcap_{j \in J} X_j)') \text{ és } \bigvee_{j \in J} (X_j, Y_j) = (\bigcup_{j \in J} X_j, (\bigcup_{j \in J} X_j)').$$

Megemítrndő, hogy a képletben szereplő $(\bigcap_{j \in J} X_j)' = \bigcup_{j \in J} X_j' = \bigcup_{j \in J} Y_j$.

Tetszőleges $g \in G$ objektum, illetve $m \in M$ atribútum esetén legyen:

$$\tilde{g} = (\{g\}", \{g\}') \text{ illetve } \tilde{m} = (\{m\}', \{m\}")$$

Legyenek m és m_j M-beli attribútumok. Azt mondjuk, hogy a (G, M, I) kontextusban az m_j együttes teljesüléséből következik az m attribútum, ha bármely G-beli objektumra abból, hogy $(g, m_j) \in I$ minden $j \in J$-re, úgy $(g, m) \in I$.

Tétel 1. *Legyen* (G, M, I) *egy kontextus.*

(A) Tetszőleges $g \in G$*-re, illetve* $m \in M$*-re* $(g, m) \in I$ *pontosan akkor, ha az* $\mathfrak{L}(G, M, I)$ *hálóban* $\tilde{g} \leq \tilde{m}$.

(B) Tetszőleges m *és* $j \in J$*-re* m_j M*-beli attribútumok esetén az* m_j *együttes teljesüléséből akkor és csak akkor következik a* (G, M, I) *kontetusban az* m *attribútum, ha a fogalomhálóban* $\bigwedge \tilde{m}_j \leq \tilde{m}$.

Proof. Csak az (A)-t igazoljuk. Könnyen látható, hogy $X \subseteq Y$-ból következik, hogy $X' \supseteq Y'$ továbbá érvényes (*) $X''' = X'$. (Ui. nyilván $X \subseteq X''$, ezért $X' \supseteq (X'')' = X'''$. Másrészt az $X \subseteq X''$-ben X helyébe X'-t írva $X' \subseteq X'''$ adódik. A két tartalmazást összevetve kapjuk, hogy $X' = X'''$).

Ezek felhasználásával kapjuk:

$\tilde{g}$ és $\tilde{m}$ eleme $\mathfrak{L}(G, M, I)$-nek. Ha $(g, m) \in I$, akkor $g \in \{m\}'$, miatt $\{g\} \subseteq \{m\}'$, tehát (*)-ból adódik, hogy $\{g\}' \supseteq \{m\}"$. Innen $\{g\}" = \{m\}' \subseteq \{m\}'''$ adódik,

Date: 2007 május 3.

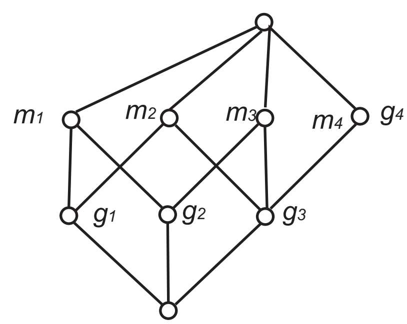
Ezért $\tilde{g} = (\{g\}", \{g\}') \leq (\{m\}', \{m\}") = \tilde{m}$. Ha pedig azt tesszük fel, hogy $\tilde{g} \leq \tilde{m}$ akkor $\{g\}" \subseteq \{m\}'$, innen $g \in \{g\} \subseteq \{g\}" \subseteq \{m\}'$, tehát $g \in \{m\}'$, azaz $(g, m) \in I$. $\square$

Legyen L egy teljes háló. $X \subseteq L$ egyesítésűrű részhalmaz, ha minden $a \in L$-hez van az X-nek egy $X_a \subseteq X$, hogy $a = \bigvee X_a$. Hasonó a metszetsűrű részhalmaz definíciója.

Tétel 2. *(a fogalomhálók alaptétele). Legyen L teljes háló és (G, M, I) pedig egy kontextus. Ekkor L pontosan akkor izomorf az $\mathfrak{L}(G, M, I)$ fogalomhálóval, ha léteznek $\gamma : G \to L$ és $\mu : M \to L$ leképezések úgy, hogy $\gamma(G) = \{\gamma(G) : g \in G\}$ egyesítésűrű részhalmaza L-nek, $\mu(M)$ metszetsűrű részhalmaza L-nek, továbbá bármely $g \in G$ és $m \in M$-re*

$$(g, m) \in I \Leftrightarrow \gamma(g) \leq \mu(M).$$

Legyen L egy teljes háló. J egyesítésűrű részhalmaza L-nek, míg M metszetsűrű. Ekkor L izomorf az $\mathfrak{L}(G, M, \leq)$ fogalomhálóval, ahol " $\leq$ " = " $\leq_L$ " $\cup (J \times M)$. $\gamma : J \to L$ a $g \mapsto g$ identikus leképezés, hasonlóan $\gamma : M \to L$.



Itt $I = \{(g_1, m_1), (g_1, m_2), (g_2, m_1), (g_2, m_3), (g_3, m_2), (g_3 m_3), (g_3, m_4), (g_4 m_4)\}$.