DISZTRIBUTIV HÁLÓK REPREZENTÁCIÓJA.

Definició 1. *Az L háló I részhalmaza ideál, ha* (i) $x \in I$ *és* $y \leq x$ *esetén* $y \in I$, (ii) $x, y \in I$ *-böl* $x \vee y \in I$ *következik.*

Az L háló D részhalmaza duális ideál, ha (i) $x \in D$ *és* $y \geq x$ *esetén* $y \in D$, (ii) $x, y \in D$*-böl* $x \wedge y \in D$ *következik.*

Az I ideál primideál, ha $x, y \in L, x \wedge y \in I$ *esetén vagy* $x \in I$, *vagy* $y \in I$.

A D duálisideál duálisprimideal (vagy ultrafilter), ha $x, y \in L, x \vee y \in D$ *esetén vagy* $x \in D$, *vagy* $y \in D$.

Állitás 1. *Legyen L véges disztributiv háló. Ennek a eleme pontosan akkor egyesitesirreducibilis, ha az $[a)$ duális ideál duális primideál.*

Bizonyitás. Legyen a egy egyesitesirreducibilis elem és tekintsük az $[a)$ duális ideált. Ha $x \vee y \in [a)$, akkor $a \leq x \vee y$. Mivel mint láttuk minden egyesitesiieducibilis elem primtulajdonságú innen $a \leq x$ vagy $a \leq y$ adódik, azaz x és y közül legalább az egyik $[a)$-ban van. A forditott állitás nyilvánvaló. ♣

Állitás 2. *Legyen I az L disztributiv háló egy ideálja és* $a \in L \backslash I$. *Ekkor* $J = \{x \vee y, x \in I, y \leq a\}$ *is ideál, amely I-t és a-t is tartalmazza.*

Bizonyitás. J nyilván zárt az egyesitésre. Ha $z \leq x \vee y$ $(x \in I, y \leq a)$, akkor $z = z \wedge (x \vee y) = (z \wedge x) \vee (z \wedge y)$ miatt $z \in J$, azaz J ideál. Ha $x_0 \in I$, akkor $a = (a \wedge x_0) \vee a$ miatt $a \in J$. Továbbá, $x \in I$ esetén $x = x \vee (x \wedge a) \in J$, azaz $I \subseteq J$. ♣

Tétel 1. (Primideál tétel) *Legyen L disztributiv háló, legyen I ideálja, D pedig duális ideálja L-nek és tegyük fel hogy* $I \cap D = \emptyset$. *Ekkor létezik olyan P primideál L-ben, amelyre* $I \subseteq P$ *és* $D \cap P = \emptyset$.

Bizonyitás. Legyen $\mathcal{M}$ azon J ideálok halmaza, amelyekre $I \subseteq J$ és $J \cap D = \emptyset$. Ez nem az üres halmaz, mert I benne van. $\mathcal{M}$ a halmazelméleti tartalmazásra nézve részbenrendezett halmaz. Ha $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}$ egy lánc, akkor $\bigcup \mathcal{C}$ is eleme $\mathcal{C}$-nek. Tehát a Zorn lemma szerint $\mathcal{M}$-nek van maximális eleme. Legyen P egy maximális elem. Csak azt kell igazolni, hogy P primideál, azaz $a_1\ a_2 \in L \backslash P$ esetén $a_1 \wedge a_2 \notin P$. Tegyük fel, hogy ez nem igaz, azaz van $a_1, a_2 \in \notin P$ amelyekre $a_1 \wedge a_2 \in P$. Legyen $i \in \{1, 2\}$ és tekintsük a

$$P_i = \{x \vee y, x \in P, y \leq a_i\}$$

ideált. Mivel P maximális eleme $\mathcal{M}$-nek és $P \subset P_i$ következik, hogy $P_i \notin \mathcal{M}$, azaz $P_i \cap D \neq \emptyset$. Legyen $b_i \in D \cap P_i$. Ekkor $b_i = x_i \vee c_i$ alakú, ahol $x_i \in P, c_i \leq a_i$. Mivel $b_i \leq x_i \vee a_i$, ezért $x_i \vee a_i \in D$, és igy D tartalmazza az

$$u = (x_1 \vee a_1) \wedge (x_2 \vee a_2) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge a_2) \vee (a_1 \wedge x_2) \vee (a_1 \wedge a_2)$$

elemet. Ezen egyenőség jobb oldalán mind a négy tag P-beli az $a_1 \wedge a_2 \in P$ feltevés miatt, tehát $u \in P$. Ez ellentmond annak, hogy $P \in \mathcal{M}$ miatt $P \cap D = \emptyset$. ♣

Date: 2007 március 8.

Tétel 2. (G. Birkhoff). *Tetszőleges L disztributiv háló beágyazható egy alkalmas A halmaz részhalmazainak $P(A)$ hálójába.*

Bizonyitás. Legyen $\mathcal{A}$ az L háló primideáljainak halmaza és tekintsük a

$$\varphi : L \to P(A), x \mapsto \{P \in \mathcal{A} : x \notin P\}$$

leképezést. Ekkor φ injektiv a primideál tétel miatt.. Legyen $a, b \in L$ és $P \in \mathcal{A}$. Ha $a \wedge b \notin P$, akkor $a, b \notin P$, mert P ideál. Ha $a, b \notin P$, akkor $a \wedge b \notin P$, hiszen $L \backslash P$ duális ideál. Tehát $\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \cap \varphi(b)$, azaz φ metszetörző, mert P ideál. Hasonlóan látható, hogy $\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \cup \varphi(b)$, tehát φ beágyazás. ♣

Tétel 3. (M. H. Stone). *Minden Boole-algebra beágyazható valamely A halmaz részhalmazainak $P(A)$ Boole-algebrájába.*

Bizonyitás. Legyen L egy Boole-algebra. Csak azt kell igazolni, hogy φ Boole-algebrák közötti beágyazás. Nyilván $\varphi(0) = \emptyset$ és $\varphi(1) = A$. Legyen $x \in L$. Mivel φ megőrzi a hálóműveleteket $\varphi(x) \cup \varphi(x') = \varphi(x \vee x') = \varphi(1) = A$ és $\varphi(x) \cap \varphi(x') = \varphi(x \wedge x') = \varphi(0) = \emptyset$, tehát $\varphi(x')$ a $\varphi(x)$ komplementuma. ♣

Nem minden Boole-algebra izomorf egy $P(A)$ alakú Boole-algebrához.

Tétel 4. (L. Nachbin) *Egy korlátos disztributiv háló pontosan akkor Boole-háló, ha minen primideálja maximális.*

Bizonyitás. (1) Legyen L egy Boole-háló és P, Q primideálok, $P \subset Q$. Legyen $a \in Q \backslash P$ és legyen b az a komplementuma. Ekkor $a \wedge b = 0$ miatt $a \wedge b \in P$ és $L \backslash P$ metszetzárt, $b \in P$. Azonban $a, b \in Q$ miatt $1 = a \vee b \in Q$, igy $Q = L$, ami ellentmondás, azaz Boole-algebrának nem lehetnek összehasonlitható primideáljai.

(2) Tegyük fel, hogy L-nek nincsenek összehasonlitható primidaáljai és valamely a elemnek nincs komplementuma. Feltehető, hogy $a \notin \{0, 1\}$. Legyen $I = \{x \in L : a \wedge x = 0\}$. A disztributivitás miatt I ideál. Ugyancsak – a korábban bizonyitott Allitás szerint– $J = \{x \vee y : x \in I, y \leq a\}$ ideál, $a \in J$ és $I \subset J$. Mivel a-nak nincs komplementuma adódik, hogy $1 \notin J$. Alkalmazzuk a primideáltételt J-re és az $\{1\}$ duális ideálra, kapunk egy P primideált, amelyre $J \subseteq P$. Az a elemre és az $L \backslash P$ duális ideálra alkalmazva kapjuk, hogy

$$D = \{x \wedge y : x \in L \backslash P, a \leq y\}$$

duális ideál. $L \backslash P \subset D$ és $a \in D$. Viszont $0 \notin D$, mert ellenkező esetben valamely $x \in L \backslash P$ elemre $a \wedge x = 0$, azaz $x \in I \subseteq J \subseteq P$ ellentmondáshoz vezet. A primideáltétel alkalmazható lenne a $\{0\}$ ideálra és a D duális ideálra és kapunk egy Q primideált, amely D -hez diszjunkt.. Ekkor $Q \subseteq L \backslash D \subseteq L \backslash (L \backslash P) = P$, de $a \in J \subseteq P$, továbbá $a \in D$ miatt $a \notin Q$, és igy $Q \subset P$, ami ellentmond annak, hogy a primideálok összehasonlithatatlanok. ♣