KONGRUENCIÁK ÉS IDEÁLOK

1. Hálók kongruenciái

Az L háló Θ ekvivalencia relációja kongruenciareláció, ha teljesül az un. helyettesítési elv: $x \equiv y \ (\Theta)$-ból, bármely $t \in L$ elemre $x \vee t \equiv y \vee t \ (\Theta)$ és $x \wedge t \equiv y \wedge t \ (\Theta)$ teljesül.

Legyen $x \le y \le z$ és $x \equiv z \ (\Theta)$. Ekkor $x \wedge y \equiv z \wedge y \ (\Theta)$, azaz $x \wedge y = x, z \wedge y = y$ miatt $x \equiv y \ (\Theta)$. Ez azt jelenti, hogy a kongruencia osztályok konvex részhalmazok.

Állítás 1. *Legyen Θ és Φ az L háló két kongruenciarelációja. $a \equiv b \ (\Theta \vee \Phi)$ akkor és csakis akkor, ha létezik egy véges sorozat $a \wedge b = c_0 \le c_1 \le .... \le c_{n-1} = a \vee b$ és $c_i \equiv c_{i+1} \ (\Phi)$ vagy $c_i \equiv c_{i+1} \ (\Psi)$ minden $0 \le i < n$-re.*

Állítás 2. *Egy L háló kongruenciáira teljesül a disztributivitás:*

$$\Theta \wedge (\Phi \vee \Psi) = (\Theta \wedge \Phi) \vee (\Theta \wedge \Psi).$$

Bizonyitás. Mivel $\Theta \wedge (\Phi \vee \Psi) \ge (\Theta \wedge \Phi) \vee (\Theta \wedge \Psi)$ mindíg teljesül, ezért csak a fordított irányú egyenlőtlenséget kell igazolni azaz, hogy $a \equiv b \ (\Theta \wedge (\Phi \vee \Psi))$-ból $a \equiv b \ ((\Theta \wedge \Phi) \vee (\Theta \wedge \Psi))$ következik.

Legyen $a \equiv b \ (\Theta \wedge (\Phi \vee \Psi))$, akkor $a \equiv b \ (\Theta)$ és $a \equiv b \ (\Phi \vee \Psi)$. Létezik tehát egy $a \wedge b = z_0 \le ... \le z_n = a \vee b$ sorozat, ́hogy $z_i \equiv z_{i+1} \ (\Phi)$ vagy $z_i \equiv z_{i+1} \ (\Psi)$ minden $0 \le i < n$-re. Mivel $a \equiv b \ (\Theta)$ kapjuk, hogy $a \wedge b \equiv a \vee b \ (\Theta)$, és igy $z_i \equiv z_{i+1} \ (\Theta)$ minden $0 \le i < n$-re. Ez azt jelenti, hogy

$$z_i \equiv z_{i+1} \quad (\Theta \wedge \Phi) \text{ vagy } z_i \equiv z_{i+1} \quad (\Theta \wedge \Psi)$$

amiből lövetkezik, hogy:

$$a \equiv b \quad ((\Theta \wedge \Phi) \vee (\Theta \wedge \Psi)).$$

♣

Azt mondjuk, hogy a hálók kongruencia-disztributivak. A hálók kongruencia-hálói tehát disztributiv algebrai hálót alkotnak. A hálóelmélet egyik legnevezetesebb problémája volt az a kérdés, hogy mely disztributiv algebrai hálók állnak elő mint egy háló kongruencia-hálója. A problémát 2006-ban *Fred Wehrung* oldotta meg, konstruált egy olyan disztributiv algebrai hálót amelynek a kompakt elemei $\aleph_2$ számosságú félhálót alkotnak és ez a háló nem áll elő mint egy háló kongruenciahálója.

Legyen L egy 0 elemes háló és Θ egy kongruenciareláció. A 0-t tartalmazó Θ-osztály egy ideál. Hálóknál a kongruenciák és ideálok közötti kapcsolat igen laza. Egy ideál több kongruenciánál is lehet kongruencia osztály és egy ideál nem mindíg kongruencia osztálya valamely kongruenciarelációnak. Ez utóbbira példa M_3, annak egy p atomját véve a $(p]$ ideál nem kongruencia osztály.

Date: 2007 április 5.

2. Relativ komplementumos hálók

Legyen A és B két háló. Az $A \times B$ Descartes szorzaton a háló-műveleteket a következő módon értelmezzük: $(a_1, b_1) \vee (a_2, b_2) = (a_1 \vee a_2, b_1 \vee b_2)$ és $(a_1, b_1) \wedge (a_2, b_2) = (a_1 \wedge a_2, b_1 \wedge b_2)$. Ezen műveletekkel $A \times B$ háló, az A és B direkt szorzata.

Legyen L egy 0 és 1 elemes háló. Ha valamely a elmhez van olyan a' elem, hogy $a \wedge a' = 0$ és $a \vee a' = 1$, akkor a' az a egy komplamentuma. Ha a háló minden elemének létezik komplementuma, akkor komplementumos hálónak nevezzük. Ha a háló minden intervalluma komplementumos, akkor relativ komplementumos hálónak nevezzük.

Állitás 3. *Minden komplementumos moduláris háló relativ komplementumos.*

Bizonyitás. Legyen $a < c < b$. Tekintsük c komplamentumát c'-t és legyen $d = a \vee (b \wedge c')$. Ekkor $c \vee d = c \vee (a \vee (b \wedge c')) = (c \vee a) \vee (b \wedge c') = c \vee (b \wedge c') = b$. $c \wedge d = c \wedge (a \vee (b \wedge c')) = a$ a modularitás miatt. ♣

Tétel 1. *Minden véges hosszúságú háló véges sok direkt felbonthatatlan háló direkt szorzata.*

Bizonyitás. A tételt a háló hosszára vonatkozó teljes indukcióval könnyű igazolni. ♣

Az L háló *egyszerű*, ha nincs nemtriviális kongruenciája.

Tétel 2. (R. P. Dilworth) *Minden direkt felbonthatatlan, relatív komplementumos háló egyszerű.*

Bizonyitás. ♣

Tétel 3. (Birkhoff-Menger tétel) *Bármely véges hosszúságú komplementumos moduláris háló egyszerű komplementumos moduláris hálók direkt szorzatával izomorf.*

Bizonyitás. ♣