GEOMETRIA ÉS HÁLÓK

1. Geometriai terek

Definició 1. *Legyen G halmaz $^- : P(G) \to P(G)$ pedig lezárási operátor a G halmazon. Ha tetszőleges $a, b \in G, X \in P(G)$-re:*

(a) $\overline{\{a\}} = \{a\}$ és $\overline{\emptyset} = \emptyset$,

(b) ha $a \in \overline{X \cup \{b\}}$ és $a \notin \overline{X}$, akkor $b \in \overline{X \cup \{a\}}$,

(c) $\overline{X} = \bigcup\{\overline{Y} : Y \subseteq X$ és Y véges$\}$

akkor a $\boldsymbol{G} = \{G;^-\}$ párt geometriának *nevezzük. (b) az un kicserélési tulajdonság. Ha $X \subseteq G$-re $\overline{X} = X$, akkor X -et altérnek nevezzük. $\overline{X}$ mindíg altér, az X általtal generált (kifeszített) altér.*

Definició 2. *Egy teljes hálót atomisztikusnak nevezzük, ha minden eleme atomok egysítése.* **Geometriai háló:** *atomisztikus, féligmoduláris, algebrai háló.*

Geometriai hálóra példa az ekvivalenciaháló, $\mathrm{Eq}(A)$.

Állitás 1. *Egy L hálóra a következő állítások ekvivalensek:*

(a) L geometriai háló;

(b) L atomisztikus féligmoduláris teljes háló, és minden atomja kompakt;

(c) L féligmoduláris, algebrai, és az L-beli kompakt elemek éppen a véges sok atom egyesítéseként előálló elemek.

Bizonyitás. Ciklikus bizonyítást alkalmazunk.

Ha (a) teljesül, és $a \in L$ egy atom, akkor a (mint minden elem) kompakt elemek egyesítése, de mint atom teljesen egyesítésirreducibilis, ezért megegyezik valamely egyesítendő elemmel, azaz maga is kompakt. Tehát (b) teljesül.

Amennyiben (b) teljesül, akkor L nyilván algebrai. A kompakt elemek egyesítés félhálót alkotnak, ezért véges sok atom egyesítése kompakt. Ha $x \in L$ kompakt, akkor atomok egyesítése, de akkor véges sok atom is elegendő, így teljesül (c).

Ha (c) teljesül, és $x \in L$, akkor x kompakt elemek egyesítése, de ezek mind atomok egyesítése, így x is atomok egyesítése, tehát teljesül (a). ♣

Tétel 1. *A geometriák és a geometriai hálók lényegében azonosak, pontosabban, érvényesek a következő állítások:*

(1) Legyen L egy geometriai háló. Az L atomjainak halmazát jelölje G és definiáljuk a következő

$$^- : P(G) \to P(G), X \mapsto \{y \in G, y \leq \bigvee X\}$$

leképezést. Ekkor $G = (G,^-)$ geometria, amelyet $\mathcal{G}(L)$ jelöl;

(2) Legyen $G = (G,^-)$ egy geometria. Ekkor G alterei egy $\mathcal{L}(G)$ geometriai hálót alkotnak;

(3) Ha G geometria és L geometriai háló, akkor $\mathcal{G}(\mathcal{L}(G)) \cong G$ és $\mathcal{L}(\mathcal{G}(L)) \cong L$.

Date: 2007 április 12.

Bizonyitás. Csak (1)-et igazoljuk, amely a legfontosabb rész. A megfordítás, azaz (2) hosszabb számolást igényel.

Legyen L egy geometriai háló, éa jelölje $G = \mathcal{G}(L)$ az L atomjainak a halmazát. A tételben definiált $^{-} : P(G) \to P(G)$ nyilván lezárási operátor, amelyre a definícióban szereplő (a) feltétel teljesül. Mivel – mint láttuk – minden atom kompakt így (c) is teljesül. Tegyük fel, hogy $a, b \in G, X \subseteq G, a \in \overline{X \cup \{b\}}$ és $a \notin \overline{X}$. Legyen $c = \bigvee X \in L$. A feltevés szerint $a \leq b \vee c$ és $a \nleq c$. Mivel $0 \prec b$ és $0 \prec a$, a féligmodularitás miatt $c = 0 \vee c \prec a \vee c$ és $c \preceq b \vee c$. Azonban $c \leq a \vee c \leq b \vee c$, de $c \neq a \vee c$, így $a \vee c = b \vee c$. Innen adódik. hogy $b \leq a \vee c$, azaz $b \in \overline{X \cup \{a\}}$ tehát teljesül a kicserélési tulajdonság. ♣

2. Geometriai hálók tulajdonságai

Állítás 2. *Geometriai háló tetszőleges intervalluma is geometriai háló.*

Bizonyitás. Legyen L geometriai háló, és $a \leq b$. Az $L_1 = (b]$ főideál nyilván féligmoduláris és atomisztikus, algebrai, tehát geometriai háló. Tekintsük L_1-ben az $L_2 = [a)$ duális főideált. Ez is nyilván féligmoduláris és algebrai. Mivel L_1 atomisztikus L_2 tetszőleges eleme $x = a \vee \bigvee p_i$, ahol p_i atomok és $p_i \nleq a$. Ekkor $x = \bigvee (a \vee p_i), a \prec a \vee p_i$. Azonban az $a \vee p_i$-k atomok L_2-ben, tehát L_2 atomisztikus, azaz geometriai háló. ♣

Végül néhány fontos tétel bizonyítás nélkül:

Tétel 2. *Geometriai háló komplementumos, sőt relatív komplementumos.*

Definició 3. *Egy geometriai hálóban két atomot perspektívnek nevezünk, ha van közös komplementumuk, és ezt $a \sim b$-vel jelöljük.*

Tétel 3. (F. Maeda, U. Sasaki, F. Fujiwara) *Bármely geometriai háló szubdirekt irreducibilis geometriai hálók direkt szorzata. Egy L geometriai hálóra ekvivalens:*

(1) L direkt irreducibilis,
(2) L szubdirekt irreducibilis
(3) L-ben bármely két atom perspektív.

Tétel 4. *Geometriai háló atomjainak halmazán a perspektivitás tranzitív, tehát ekvivalenciareláció.*