FÉLIGMODULÁRIS HÁLÓK

1. Féligmoduláris háló

Definició 1. *Egy L hálót féligmoduláris hálónak (felülről féligmoduláris) nevezzük, ha az alábbi – ekvivalens – feltételek egyike teljesül:*
(a) bármely $x, y \in L$ elemekre $x \prec x \wedge y \Rightarrow y \prec x \vee y$,
(b) bármely $a, b, c \in L$ elemekre $a \prec b \Rightarrow a \vee c \preceq b \vee c$,

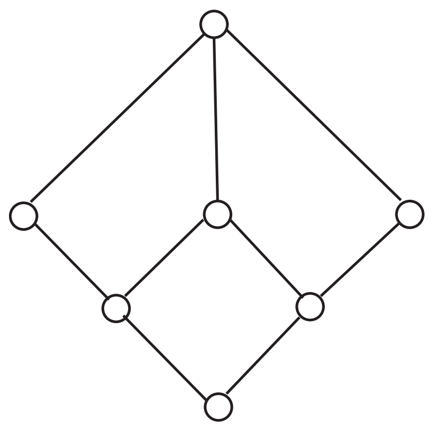

Figure 1. féligmoduláris de nem moduláris

Állitás 1. *Minden moduláris háló féligmoduláris.*

Bizonyitás. Legyen L egy moduláris háló és $a, b \in L, a \prec b$. A definícióban szereplő (b) feltétel teljesülését igazoljuk. Ha $a \vee c < b \vee c$ és nem szomszédosak, akkor van egy $d \in L$ amelyre $a \vee c < d < b \vee c$. Ekkor egyrészt $b \vee d \geq b \vee (a \vee c) = b \vee c$, másrészt $a \leq b \wedge d < b$, így $b \wedge d = a$. Mindezek azt jelentik, hogy $a, b, a \vee c, d, b \vee c$ az N_5-el izomorf részhálót alkotnak, azaz L nem lenne moduláris. ♣

Tétel 1. *Véges hosszúságú féligmoduláris hálóban teljesül az ún. Jordan-Hölder-láncfeltétel, azaz bármely két maximális lánc azonos elemszámú.*

Bizonyitás. A tételt a véges hosszúságú L féligmoduláris háló hosszúsága szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Lásd az ábrát. Ha $l(L)$ 0 vagy 1, akkor az állítás triviális. Legyen $l(L) \geq 2$ és tegyük fel, hogy az $l(L)$-nél kisebb hosszúságú hálókra már igazoltuk az állítást. Tekintsünk egy n hosszúságú $C = \{0 = c_0, c_1, ..., c_n = 1\}$, $c_0 \prec c_1 \prec ... \prec c_n$ és egy m hosszúságú $D = \{0 = d_0, d_1, ..., d_m = 1\}$, $d_0 \prec d_1 \prec ... \prec d_m$ maximális láncot L-ben. Ha $d_1 = c_1$, akkor az indukciós feltevést alkalmazva a $[c_1)$ duális ideálban – amely egy az L-nél kisebb hosszúságú féligmoduláris

Date: 2007 március 29.

háló – a $C \backslash \{c_0\}$ és $D \backslash \{d_0\}$ maximális láncokra, kapjuk, hogy $n-1 = m-1$, azaz $n = m$.

Másik esetben $c_1 \neq d_1$ és tekintsük a $e_2 = c_1 \vee d_1$ elemet. Mivel $c_1 \wedge d_1 = 0 \prec c_1$ és $c_1 \wedge d_1 \prec d_1$ a féligmodularitás miatt $c_1 \prec e_2$ és $d_1 \prec e_2$. Az $[e_2)$ duális ideálban – amely szintén véges hosszúságú háló – tekintsünk egy $e_2 \prec e_3 \prec ... \prec e_k$ maximális láncot. Az indukciós feltevést a $[c_1)$ duális ideálban a $c_1 \prec c_2 \prec ... \prec c_n = 1$ és a $c_1 \prec e_2 \prec ... \prec e_k = 1$ maximális láncokra alkalmazva kapjuk, hogy $n = k$. Hasonlóan az indukciós feltevést a d_1 duális ideálban $d_1 \prec d_2 \prec ... \prec d_m = 1$ és $d_1 \prec e_2 \prec ... \prec e_k$ maximális láncokra alkalmazva kapjuk, hogy $m = k$. A két egyenlőségből nyerjük, hogy $n = m$. ♣

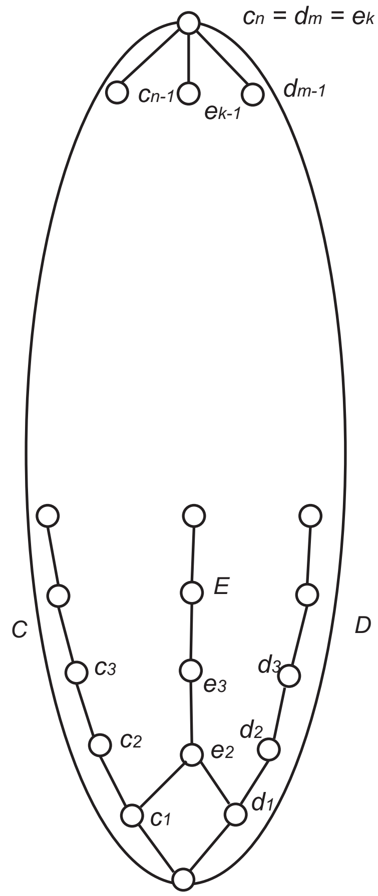

FIGURE 2. Jordan-Hölder

Ha $a \in L$, akkor az $(a]$ intervallum hosszúságát az a elem magasságának nevezzük és $h(a)$-val jelöljük, ennek neve *magasságfüggvény*.

Nyilvánvaló a következő:

Állitás 2. *Ha L nullelemes féligmoduláris háló, $a \in L$ atom, $x \in L$ véges magasságú elem és $a \nleq x$, akkor $h(x \vee a) = h(x) + 1$.*

Tétel 2. *(1) Legyen L egy véges hosszúságú háló. L akkor és csakis akkor féligmodulá-ris, ha bármely x, y elemre*

$$h(x) + h(y) \geq h(x \wedge y) + h(x \vee y)$$

(2) Ha L féligmoduáris háló, $0 \in L$, és $x, y \in L$ véges magasságú elemek, akkor $x \wedge y, x \vee y$ is véges magasságú és érvényes az elöbbi egyenőtlenség.

Bizonyitás. Először (2)-t igazoljuk. Legyen L féligmoduláris és x, y véges magasságú elemek, $u = x \wedge y, v = x \vee y$. Nyilván u véges magasságú. Legyen $u = z_0 \prec z_1 \prec ... \prec z_k = x$ egy maximális lánc az $[u, x]$ intervallumban. Ekkor $h(x) = h(u) + k$. A féligmodilaritás miatt

$$y = z_0 \vee y \preceq z_1 \vee y \preceq ... \preceq z_k \vee y = v.$$

Ebből kapunk - elhagyva az esetleg ismétlődő elemeket- egy legfeljebb k hosszűságú láncot $[y, v]$-ben, ezért $h(v) \leq h(y) + k$, azaz

$$h(x) + h(y) = h(u) + k + h(y) \geq h(u) + h(v),$$

tehát teljesül a tételben szereplő egyenlőtlenség.

Ezután tegyük fel, hogy ez az egyenlőtlenség teljesül az L végeshosszúságú hálóban. Legyen $a, b \in L, c = a \wedge b, d = a \vee b$. Tegyük fel, hogy $c \prec a$, és azt, hogy a, b összehasolíthatatlanok. Azt kell kimutatni, hogy $b \prec d$. Az adott egyenlőtlenség szerint

$$h(d) \leq h(b) + h(a) - h(c).$$

De $c \prec a$ miatt $h(a) - h(c) = 1$, így az iménti egyenlőtlenségből $h(d) \leq h(b) + 1$ adódik. Mivel $b < d$, kapjuk, hogy $b \prec d$, azaz L féligmoduláris.♣

Végül moduláris hálókban:

Tétel 3. *Egy L véges hosszúságú háló akkor és csakis akkor moduláris, ha minden $x, y \in L$-re $h(x) + h(y) = h(x \wedge y) + h(x \vee y)$.*

Bizonyitás. Tegyük fel, hogy minden $x, y \in L$-re $h(x)+h(y) = h(x \wedge y)+h(x \vee y)$ teljesül, de L nem moduáris. Ekkor L tartalmaz egy, az N_5-tel izomorf részhálót, legyenek ennek elemei $u < a < c < v, u < b < v$. Ekkor $h(a) = h(a \wedge b) + h(a \vee b) - h(b) = h(c \wedge b) + h(c \vee b) - h(b) = h(c)$, ami ellentmond annak, hogy $a < c$ miatt $h(a) < h(c)$.

Tegyük fel, hogy L véges hosszúságú moduláris háló. Ekkor L alulról féligmoduá-ris, tehát van egy $m(x)$ dimenzió függvény is, ami a $[x, 1]$ intervallum hossza. Erre teljesül: $m(x)+m(y) \geq m(x \wedge y)+m(x \vee y)$, Viszont bármely $z \in L$-re $m(z) = l(L) - h(z)$, ezt az utolsó egyenlőtlenség minden tagjába beírva pontosan a $h(x)$ függvényre vonatkozó fordított irányú egyelőtlenséget kapjuk azaz teljesül az egyenőség.♣

A $d : L \to R$ *normalizált dimenziófüggvény*, ha $d(0) = 0, d(1) = 1, x < y$ esetén $d(x) < d(y)$ és $d(x) + d(y) = d(x \wedge y) + d(x \vee y)$. Véges hosszúságú moduláris háló esetén $d(x) = h(x)/l(L)$ normalizált dimenziófüggvény.

2. Ekvivalenciahálók

Egy A halmaz ekvivalenciarelációi másnéven particiói nyilván egy teljes hálót alkotnak, sőt ez algebrai háló. Ezt $\mathrm{Eq}(A)$ jelöli. Ebben két ekvivalenciareláció π_0 és π_1 egyesítése a következőképen írható le: $x \equiv y(\pi_0 \vee \pi_1)$ akkor és csakis akkor, ha létezik egy véges $x = c_0, c_1, ..., c_n = y \in A$ sorozat, hogy $c_0 \equiv c_1(\pi_0), c_1 \equiv c_2(\pi_1), c_2 \equiv c_3(\pi_0), c_3 \equiv c_4(\pi_1), ...$

Tétel 4. *Minden ekvivalenciaháló féligmoduáris.*

Bizonyitás. Legyen π_0 és π_1 egy A halmaz két ekvivalenciarelációja. Nyilván $\pi_0 \prec \pi_1$ pontosan akkor, ha a π_1 úgy áll elő a π_0-ból, hogy annak két blokkját egyesítjük. Legyen ξ egy tetszőleges ekvivalenciareláció. Könnyű belátni, hogy ekkor $\xi \vee \pi_0$ és $\xi \vee \pi_1$ szomszédosak. ♣

Tétel 5. *Minden ekvivalenciaháló egyszerű.*

Bizonyitás. Csak a véges esetre igazoljuk. Legyen π és ξ két atomja az ekvivalenciahálónak, amely az A halmaz partícióiból áll. Ez azt jelenti, hogy mindkettőnek egyetlen nentriviálos blokkja van, amelyek kételeműek. Legyenek ezek $\{a, b\}$ ill. $\{c, d\}$. Definiálunk egy további τ particiót.

1. ha $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$, akkor τ két blokja $A - \{a, c\}$ és $\{a, c\}$,
2. ha $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \{e\}$, akkor τ két blokja $A - \{e\}$ és $\{e\}$.

Legyen továbbá Θ egy nemtriviális kongruencia, ekkor létezik két, egymástól különböző partició, α ill. β, hogy $\alpha < \beta$, $\alpha \equiv \beta$ (Θ). Nyilván létezik egy a $\pi < \beta$ atom, amelyre $\pi \cap \alpha = \omega$. Ekkor $\gamma \equiv 0$ (Θ). Legyen $\pi \leq \gamma$ egy atom, ekkor $\pi \equiv 0$ (Θ) is teljesül. Egyesítsük mindkét oldalt τ-el, kapjuk, hogy $\iota \equiv \tau$ (Θ) (ι az a partició amelynél A minden eleme egy osztályban van). Ez utóbbi mindkét oldalát elmetszve ξ-vel, kapjuk, hogy $\xi \equiv \omega$ (Θ). Ez azt jelenti, hogy az összes atom egy osztályban van a Θ-nál, azaz $\Theta = \iota$. ♣

Bizonyítás nélkül álljon itt két híres, mély tétel:

Tétel 6. *(***P. M. Whitman, 1946***) Bármely háló beágyazható ekvivalenciahálóba.*

Ennél még nehezebb eredmény:

Tétel 7. *(***P.Pudlák, Jiri Tuma, 1977***) Bármely véges háló beágyazható egy véges halmaz ekvivalenciahálójába.*

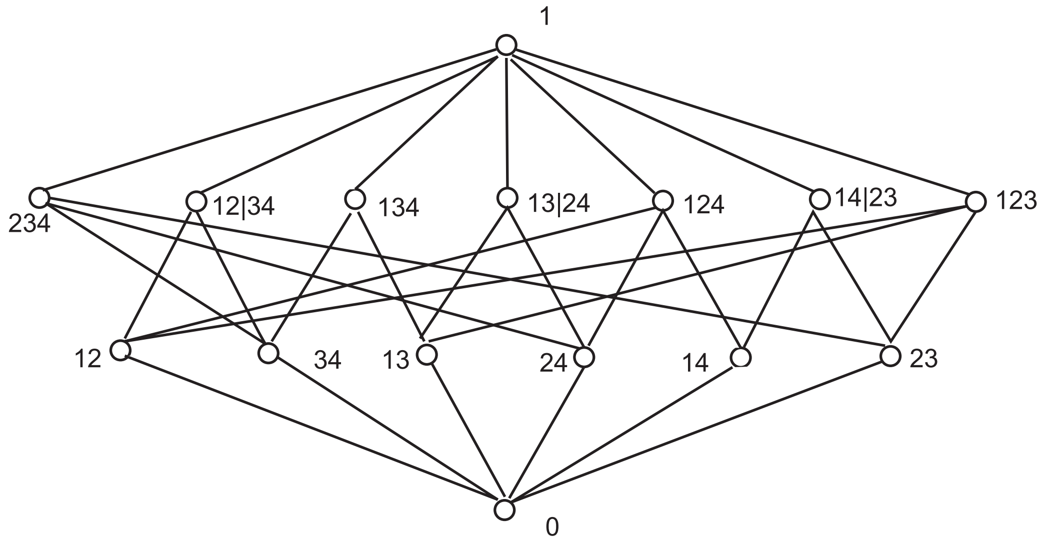

Figure 3. A négyelemű halmaz ekvivalrnciahálója

Jelölések az ábrán:
12 azt jelenti, hogy egyetlen több mint egyelemű osztály van $\{1, 2\}$,
12|34 azt jelenti, hogy két több mint egyelemű osztály van $\{1, 2\}$ és $\{3, 4\}$.