TELJES HÁLÓ, LEZÁRÁSI OPERÁTOR, ALGEBRAI HÁLÓ

Definició 1. *Az L háló teljes, ha bármely részhalmazának van legkisebb felső és legnagyobb alsó korlátja.*

Definició 2. *A $F \subseteq P(A)$ lezárási rendszer, ha zárt a metszetre nézve, azaz $X \subseteq F$ esetén $\bigcap X \in F$. F elemei a zárt halmazok.*

Definició 3. *A $\mathrm{C} : P(A) \longrightarrow P(A)$ leképezés lezárási operátor A-n, ha*

(1) $X \subseteq \mathrm{C}(X)$, azaz extenziv,
(2) $X \subseteq Y$ esetén $\mathrm{C}(X) \subseteq \mathrm{C}(Y)$, azaz monoton,
(3) $\mathrm{C}(X) = \mathrm{C}(\mathrm{C}(X))$, azaz idenpotens.

(1)Legyen F egy lezárási rendszer A-n és definiáljuk

$$\mathrm{C}(X) = \bigcap\{K, X \subseteq K \in F\}$$

Ekkor C nyilván monoton és extenziv. Igazoljuk, hogy idenpotens is. $\mathrm{C}(X) \subseteq \mathrm{C}(X) \in F$, igy alkalmazva C-t és figyelembe véve a monotonitást kapjuk; $\mathrm{C}(\mathrm{C}(X)) \subseteq \mathrm{C}(X)$, ami az exenzitivitás miatt $\mathrm{C}(\mathrm{C}(X)) = \mathrm{C}(X)$, azaz C idenpotens.

(2) Induljunk ki egy C lezárási operátorból. Definiáljuk:

$$F = \{\mathrm{C}(X), X \subseteq A\}.$$

Ez F lezárási rendszer A-n, azaz ha $X_i \in F$ akkor $\bigcap X_i \in F$. Valóban, mivel $\cap X_i \subseteq X_j$ minden j-re, C monotonitását figyelembe véve kapjuk, hogy $\mathrm{C}(\bigcap X_i) \subseteq \mathrm{C}(X_j) = X_j$, azaz $\mathrm{C}(\cap X_i) \subseteq \bigcap X_j$, ami az extenzivitást figyelembe véve kapjuk, hogy $\bigcap X_i \in F$.

Állitás 1. *Legyen C lezárási operátor A-n és F a hozzá tartozó lezárási rendszer. Ez teljes háló. $X \subseteq F$ esetén $\bigwedge X = A$, ha $X = \emptyset$, $\bigwedge X = \bigcap X$, ha $X \neq \emptyset$, $\bigvee X = \mathrm{C}(\bigcup X)$.*

Bizonyitás. $\mathrm{C}(\bigcup X)$ az X felső korlátja, $\bigcup X \subseteq \mathrm{C}(\bigcup X)$. Ha H zárt és $K \subseteq H$ minden $K \in X$-re akkor $\bigcup X \subseteq H$, ezért $\mathrm{C}(\bigcup X) \subseteq \mathrm{C}(H) = H$, mert H zárt, tehát $\mathrm{C}(\bigcup X)$ a kegkisebb felső korlát. ♣

Tétel 1. *Minden teljes háló izomorf egy lezárási rendszerhez tartozó zárt halmazok hálójához.*

Bizonyitás. Ha L teljes háló, akkor a főideálok $\{(a]\}$ lezárási rendszert alkotnak és az $a \longrightarrow (a]$ izomorfizmus.♣

Definició 4. *Az L teljes háló a eleme kompakt, ha abbol, hogy valamely $X \subseteq L$-re $a \leq \bigvee X$ következik, hogy az X-nek valamely X' véges részhalmazára $a \leq \bigvee X'$. A L teljes háló algebrai, ha minden eleme kompakt elemek egyesítése.*

Date: February 8, 2009.

Fontos algebrai halok:
Con(A): kongruenciaháló
Sub(A): részalgebra háló
Eq(A): ekvivalencia háló (partició háló)
Geometriában különféle altér hálók, pl. euklideszi terek alterei.

Definició 5. *A* C *lezárási operátor algebrai, ha* $\mathrm{C}(X) = \bigcup(\mathrm{C}(Z_i))$ *ahol* Z_i*-k véges részhalmazai* X*-nek.*

A P részben rendezett halmaz *irányitott*, ha bármely véges részhalmazának van felső korlátja.

Állitás 2. *Legyen* C *lezárási operátor* A*-n.* C *akkor és akkor algebrai, ha zárt az irányitott halmazok egyesitésére.*

Legyen C egy lezárási operátor és K zárt, azaz $\mathrm{C}(K) = K$. K végesen generált, ha $K = \mathrm{C}(Z)$ valamely véges Z-re.

Legyen S egy félháló. $I \subseteq S$ *ideál*, ha (i) $a \in I, b \leq a$ esetén $b \in I$, (ii) ha $a, b \in I$ akkor $a \vee b \in I$. Az ideálok a halmazelméleti tartalmazásra nézve hálót alkotanak az S ideálhálóját, amelyet Id(S) jelöl. Ez algebrai háló, amelynek kompakt elemei a főideálok.

Tétel 2. *Ha* C *algebrai lezárási operátor, akkor a zárt halmazok algebrai hálót alkotnak, amelynek kompakt elemei a végesen generált zárt halmazok. Megforditva, minden algebrai háló izomorf egy algebrai lezárási operátor zárt halmazainak hálójával, mégpedig egy nullelemes félháló ideálhálójával.*

Bizonyitás.

(I) Legyen C algebrai letárási operátor, kimutatjuk, hogy a kompakt elemek pontosan a a végesen generált zárt halmazok. Legyen $Z \subseteq A$ véges és $H = \mathrm{C}(Z)$. Legyen G zárt halmazokból álló halmaz, amelyre $H \subseteq \bigvee G$. Mivel C algebrai és Z véges ezért létezik egy véges $Y \subseteq \bigcup G$, hogy $Z \subseteq \mathrm{C}(Y)$. Igy $H \subseteq \mathrm{C}(Y) \subseteq \mathrm{C}(\bigcup G) = \bigvee G$. Válasszunk $G' \subseteq G$-t, hogy G' véges és $Y \subseteq \bigcup G'$. Ekkor $H \subseteq \bigvee G'$, azaz minden végesen generált kompakt.

(II) Legyen H kompakt eleme a zárt halmazok hálójának, akkor nyilván $H \subseteq \bigvee\{C(Z), Z \subseteq H, Z\text{véges}\}$. Van tehát véges sok véges részhalmaz $Z_0, Z_1, ...Z_k \subseteq H$, hogy

$$H \subseteq \bigvee\{\mathrm{C}(Z_0), \mathrm{C}(Z_1), \dots \mathrm{C}\, Z_k)\} = \mathrm{C}(\mathrm{C}(Z_0), \mathrm{C}(Z_1), \dots \mathrm{C}(Z_k)) = \mathrm{C}(Z_0 \cup Z_1 \cup \dots \cup Z_k)$$

Ha $Y = Z_0 \cup \dots \cup Z_k$, akkor $Y \subseteq H \subseteq \mathrm{C}(Y)$. Mivel H zárt, azaz $H \subseteq \mathrm{C}(Y)$ igy a kompakt végesen generált.

A zárt halmazok hálója algebrai, mert minden zárt halmaz véges részhalmazai lezártjainak az egyesitése.

(III) Legyen L egy algebrai háló és jelölje S a kompalt elemeinek halmazát. Két kompakt elem egyesitése is kompakt, ezért S félháló. Ha $X \subseteq S$, akkor legyen $\mathrm{C}(X)$ az X által generált ideál, azaz

$$\mathrm{C}(X) = \{y, y \leq x_1 \vee \dots \vee x_k \text{ valamely } x_1, \dots, x_k \in X \text{ -re } \}.$$

C nyilván algebrai lezárási operátor, mert bármely $y \in C(X)$ benne van valamely $x_1, \dots, x_k$ elemek átal generált ideálban, azaz $C(\{x_1, \dots, x_k\})$ -ban.♣