Valószínűségszámítás II. feladatsor

2014. szeptember 8.

Tartalomjegyzék

1. Konvolúció

1.1. Számoljuk ki a $BIN(p,n) * BIN(p,m)$, $POI(\lambda) * POI(\mu)$, $GEO(p) * GEO(p)$ diszkrét konvolúciókat.

1.2. Adjuk meg n darab független, $GEO(p)$ eloszlású valószínűségi változó összegének az eloszlását, az ú.n. negatív binomiális eloszlást.

1.3. Móricka matematikushallgató a BME-n, Valószínűségszámítás II. gyakorlatból próbál átmenni. Ha nem sikerül neki az egyik félévben, akkor a következő félévben újra próbálkozik. Az egymást követő félévek próbálkozásainak kimenetele független, és minden félévben $\frac{2}{3}$ valószínűséggel bukik meg. Ha az aláírást megszerezte, még ugyanabban a félévben próbálkozik az elméleti vizsgával. Ha ez nem sikerül, akkor a következő félévben újra próbálkozik az elméleti vizsgával, egészen addig, amíg át nem megy ezen is. Az egyes félévekben elméletből $\frac{1}{4}$ valószínűséggel megy át. Határozza meg Móricka Valószínűségszámítás II.-vel töltött félévei számának az eloszlását!

1.4. (a) Bizonyítsa be, hogy ha X és Y független standard normális eloszlású valószínűségi változók, valamint a és b valós számok, akkor $U = aX + bY$ és $V = bX - aY$ valószínűségi változók is függetlenek. Milyen eloszlású lesz U és V?

(b) Számolja ki az előbbi alapján két Gauss eloszlás $N(m_1, \sigma_1) * N(m_2, \sigma_2)$ konvolúcióját.

1.5. Számolja ki két Cauchy eloszlás $CAU(m_1, \tau_1) * CAU(m_2, \tau_2)$ konvolúcióját. Először lássa be, hogy elég az $m_1 = m_2 = 0$ esetre kiszámolni!

1.6. Legyen X és Y független $EXP(\lambda)$, illetve $EXP(\mu)$ eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg $Z := X + Y$ sűrűségfüggvényét. Mi történik a $\lambda \to \mu$ határátmenetben?

1.7. Legyenek $X : \Omega \to \mathbb{R}$ és $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változók f és g sűrűségfüggvényekkel. Tudjuk, hogy $Z = X + Y$ sűrűségfüggvénye $f * g$-vel egyezik meg. Következik-e ebből, hogy X és Y függetlenek?

1.8. Legyen X és Y független, $POI(\lambda)$, illetve $E(0,1)$ eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg a $Z := X + Y$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét.

1.9. Legyenek X és Y független azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek közös sűrűségfüggvénye $f(x) = 3x^2 \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$. Határozzuk meg az $U := X + Y$ és a $V := X - Y$ valószínűségi változók sűrűségfüggvényét.

1.10. Legyen X $E(0,1)$ eloszlású és Y tőle független tetszőleges eloszlású valószínűségi változó. Bizonyítsuk be, hogy a

$$Z := \{X + Y\} := (X + Y) - [X + Y]$$

valószínűségi változó eloszlása $E(0,1)$, függetlenül az Y valószínűségi változó eloszlásától. Elég belátni diszkrét vagy abszolút folytonos eloszlású Y-ra.

1.11. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ független és azonos $E(0,1)$ eloszlású valószínűségi változók. Jelölje $f_n(x)$ az $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét. Bizonyítsuk be, hogy

$$f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{[x]} (-1)^k \binom{n}{k} (x-k)^{n-1}.$$

Kompjuter grafika segítségével (pl. Maple) ábrázoljuk az

$$\widetilde{f}_n(x) := \sqrt{\frac{n}{12}} f_n\Big(\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n}{12}} x\Big)$$

függvényt $n = 1, 2, \ldots, 10$-re. Mit látunk? Értelmezzük az eredményt.

1.12. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek közös eloszlása $\mathbf{P}(X_i = 0) = \frac{1}{2} = \mathbf{P}(X_i = 1)$. Legyen $Y := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} X_n$. (A végtelen összeg egy valószínűséggel konvergens!) Bizonyítsuk be, hogy az Y valószínűségi változó egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumban

1.13. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ független és azonos $E(0,1)$ eloszlású valószínűségi változók és legyen $Y := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} X_n$. (A végtelen összeg egy valószínűséggel konvergens!) Bizonyítsuk be, hogy az Y valószínűségi változó $F(y) := \mathbf{P}(Y < y)$ eloszlásfüggvénye folytonos, sőt akárhányszor differenciálható, de sehol sem analitikus függvény.

1.1. Poisson és Gamma eloszlások kapcsolata

1.14. Egy radioaktivitást mérő számlálóberendezés ezredmásodpercenként tud ugrani, és akkor ugrik egyet a $t = \frac{k}{1000}$ időpontban, ha volt beérkező alfa-részecske a $(t - \frac{1}{1000}, t]$ időintervallumban. Jelölje $T(n)$ azt a véletlen időpontot, amikor először mutat n értéket a számláló. Jelölje $N(t)$ a számlálóberendezés állását a t időpontban.

(a) *(A felújításelmélet alaptrükkje)* Melyik igaz a következő két állítás közül?

$$\mathbf{P}(N(t) \leq n) = \mathbf{P}(T(n) \geq t), \quad \mathbf{P}(N(t) < n) = \mathbf{P}(T(n) > t)$$

(b) Lássa be, hogy $\mathbf{P}(N(t) = n) = \mathbf{P}(T(n) \leq t) - \mathbf{P}(T(n+1) \leq t)$!

(c) Fejezze ki $T(n)$ eloszlásfüggvényét az $N(t)$ eloszlásának segítségével!

(d) Tegyük fel, hogy egy ezredmásodperc alatt $p = \frac{1}{500}$ valószínűséggel érkezik alfa-részecske, a múlttól függetlenül. Határozza meg $T(n)$ és $N(t)$ eloszlását!

(e) Milyen abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változóval közelítsük a számlálóberendezés két egymás utáni ugrása közt eltelt időt?

(f) Adjon $T(3)$ eloszlásfüggvényére egyszerű közelítő formulát a (c) pont és a Binomiális eloszlás Poisson-approximációja segítségével. Milyen (nevezetes) abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye ez?

1.15. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek sűrűségfüggvénye xe^{-x}, ha $x \geq 0$, és 0 egyébként. Legyen továbbá $S_0 = 0$ és $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, valamint legyen $N(t) = \max\{n : S_n < t\}$

(a) Adja meg S_2 sűrűségfüggvényét!

(b) Határozza meg $N(t)$ eloszlását, azaz $k = 0, 1, 2, \ldots$-ra $\mathbf{P}(N(t) = k)$ értékét! (Számolás nélkül is megy, az előadáson tanultakra kell hivatkozni)

1.16. Bizonyítsa be a felújításelmélet alaptrükkjének segítségével az alábbi azonosságot:

$$\sum_{k=0}^{6} \binom{10}{k} p^k (1-p)^{10-k} = \sum_{m=4}^{\infty} \binom{6+m}{m} (1-p)^m p^7$$

2. Generátorfüggvények

2.17. Valószínűségeloszlások generátorfüggvényei-e az alábbi függvények?

$$(a) \quad \exp\left(\frac{z-1}{\lambda}\right), \quad \lambda > 0; \qquad (b) \quad \frac{(z+1)^6}{64};$$

$$(c) \quad \frac{2}{2-z}; \qquad (d) \quad \frac{2}{1+z}.$$

2.18. Legyen X egy N-értékű valószínűségi változó. Jelöljük eloszlásának generátorfüggvényét $P(z)$-vel. Írjuk fel az $Y := X + 1$ és a $Z := 2X$ valószínűségi változók eloszlásának generátorfüggvényét.

2.19. Legyen X egy N-értékű valószínűségi változó. Jelöljük eloszlásának generátorfüggvényét $P(z)$-vel. Írjuk fel az $a_n := \mathbf{P}(X \leq n)$, $b_n := \mathbf{P}(X < n)$, $c_n := \mathbf{P}(X \geq n)$, $d_n := \mathbf{P}(X > n+1)$ és $e_n := \mathbf{P}(X = 2n)$ számsorozatok generátorfüggvényeit. (Figyelem: ezek nem valószínűségi eloszlások.)

2.20. Határozzuk meg a p paraméterű geometriai eloszlás generátorfüggvényét feltételes rekurzió és az örökifjú tulajdonság felhasználásával!

2.21. Egy utca autóforgalmát úgy modellezzük, hogy

(a) az időskálát fix és oszthatatlan egy másodpercnyi időegységekre osztjuk,

(b) feltesszük, hogy $p \in (0, 1)$ annak a valószínűsége, hogy az egyes időintervallumokban elhalad az utcán egy autó,

(c) továbbá azt is feltesszük, hogy az egyes időegységekben történő események egymástól függetlenek.

Egy gyalogos akkor tud átmenni az utca túloldalára, ha legalább négy másodpercig forgalommentes az utca. (Feltesszük, hogy az utca belátható: a gyalogos el tudja dönteni, hogy a következő négy másodpercben lesz-e forgalom.) Határozza meg a gyalogos várakozási idejének generátorfüggvényét!

Segítség: Alkalmazza a teljes várhatóérték tételét arra vonatkozóan, hogy az első kocsi mikor érkezik!

2.22. Határozza meg az (n, p) paraméterű negatív binomiális eloszlás generátorfüggvényét! Fejezze ki a generátorfüggvény Taylor-sorának együtthatóit az általánosított binomiális együtthatók segítségével, majd használja fel, hogy $\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$, hogy megkapja a negatív binomiális eloszlás valószínűségeit.

2.23. Egy X valószínűségi változó eloszlása korlátlanul osztható, ha $\forall n \in \mathbb{N}$-re van olyan $Y_1^n, \dots, Y_n^n$ független és azonos eloszlású valószínűségi változó n-es, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i^n \sim X$$

Korlátlanul osztható-e Poisson, a binomiális és a geometriai eloszlás?

2.24. Egy kockával addig dobunk, amíg először sikerül kétszer egymásután hatost dobnunk. Jelölje ν a dobások számát. Számítsuk ki ν eloszlásának generátorfüggvényét és ennek segítségével ν várható értékét és szórásnégyzetét.

2.25. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek közös eloszlása: $\mathbf{P}\big(\xi_i = 1\big) = p$, $\mathbf{P}\big(\xi_i = 0\big) = q$, ahol $0 < p, q < 1$ és $p + q = 1$.

(a) Legyen

$$\nu_{\alpha\beta} := \min\{n \geq 2 : \xi_{n-1} = \alpha,\ \xi_n = \beta\}, \qquad \alpha, \beta \in \{0, 1\}.$$

Számítsuk ki $\nu_{\alpha\beta}$ eloszlásának generátorfüggvényét mind a négy lehetséges $\alpha\beta$ kombinációra.

(b) Legyen

$$\nu_{\alpha\beta\gamma} := \min\{n \geq 3 : \xi_{n-2} = \alpha,\ \xi_{n-1} = \beta,\ \xi_n = \gamma\}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\}.$$

Számítsuk ki $\nu_{\alpha\beta\gamma}$ eloszlásának generátorfüggvényét mind a nyolc lehetséges $\alpha\beta\gamma$ kombinációra.

2.26. Mekkora valószínűséggel osztható egy (n, p) paraméterű negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó k-val? Hova konvergál a k-val oszthatóság valószínűsége, ha $n \to \infty$?

Segítség: A k periódusú sorozatok k dimenziós vektorterében a k-adik egységgyökök hatványai bázist alkotnak!

2.27. Legyenek $X_1, X_2, X_3, \dots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, közös eloszlásfüggvényük $F(x) := \mathbf{P}\big(X_i < x\big)$. Legyen ν ezektől független, $\mathbb{N}$-értékű valószínűségi változó; jelöljük $G(z)$-vel a ν eloszlásának generátorfüggvényét. Mutassuk meg, hogy az $Y := \max\{X_1, X_2, \dots, X_\nu\}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $H(x) = G(F(x))$.

2.28. Legyenek X és Y független, $\mathbb{N}$-értékű valószínűségi változók, melyeknek generátorfüggvényei $U(z)$, illetve $V(z)$. Bizonyítsuk be, hogy a $b_j := \mathbf{P}(X - Y = j)$, $j \in \mathbb{Z}$ számok a $K(z) := U(z)V(1/z)$ függvény Laurent sorfejtésében a z^j tagok együtthatói.

2.1. Véletlen tagszámú összegek, bolyongások

2.29. Legyen $X \sim$ Pesszimista Geom(p); $Y \sim$ Poi(λ); $Z \sim$ Binom$(n,\, p)$;

$$B_i = \begin{cases} 0, & 1 - a \text{ valószínűséggel,} \\ 1, & a \text{ valószínűséggel,} \end{cases}$$

ahol $(B_i)_{i=1}^{\infty}$ függetlenek.

(a) Határozzuk meg X, Y, Z, B_i generátorfüggvényeit.

(b) Határozzuk meg a $\sum\limits_{i=1}^{X} B_i$, $\sum\limits_{i=1}^{Y} B_i$, $\sum\limits_{i=1}^{Z} B_i$ valószínűségi változók generátorfüggvényeit (az üres szumma nullával egyenlő).

(c) Milyen eloszlásúak a fenti szummák? Próbáljuk meg valószínűségszámítási terminusokban is megindokolni a választ.

2.30. Legyenek $X_1, X_2, \dots$ f.a.e. $\mathbb{N}$-értékű valószínűségi változók és ν tőlük független $\mathbb{N}$-értékű valószínűségi változó. Legyen $Y = \sum_{i=1}^{\nu} X_i$. Lássuk be, hogy

$$\mathbf{Var}(Y) = \mathbf{Var}(\nu)\mathbf{E}(X_1)^2 + \mathbf{E}(\nu)\mathbf{Var}(X_1)$$

2.31. Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független $GEO(p_1)$ eloszlású valószínűségi változók és ν tőlük független $GEO(p_2)$ eloszlású valószínűségi változó. Lássa be generátorfüggvény-módszerrel, hogy

$$\sum_{i=1}^{\nu+1}(X_i+1)-1 \sim GEO(p_1p_2)$$

Bizonyítsa a kapott azonosságot a val.szám. jelentése segítségével is!

2.32. Lássa be, hogy minden $0 < p < 1$-hez megadható olyan $p_1, p_2, \dots$ valószínűségi eloszlás és $\lambda > 0$, hogy $\sum_{i=1}^{\nu} X_i \sim GEO(p)$, ahol $X_1, X_2, \dots$ f.a.e. és $k \geq 1$-re $\mathbf{P}(X_i = k) = p_k$, valamint ν tőlük független és $POI(\lambda)$ eloszlású. Mutassa meg ennek segítségével, hogy a geometriai eloszlás korlátlanul osztható.

2.33. Legyenek $\zeta_1, \zeta_2, \dots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, $\mathbf{P}(\zeta_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Legyen $S_n = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i$ egyszerű, szimmetrikus bolyongás $\mathbb{Z}$-n. Legyen $\tau = \min\{n \mid S_n = 1\}$ az első szint elérési ideje. Határozza meg τ lecsengésének pontos aszimtotikáját:

$$\limsup_{k\to\infty} k^{\frac{3}{2}} \cdot \mathbf{P}(\tau = k) = ?$$

Segítség: a generátorfüggvény hatványsorának együtthatóit fejezze ki az általánosított binomiális együtthatók segítségével, határozza meg a $\mathbf{P}(\tau = 2k)$ értékeket, és használja a Stirling-formulát!

2.34. Tekintsük $\mathbb{Z}$ helyett a (végtelen) $\mathbb{G}_g$, g-ed fokú homogén fát mint alapgráfot és rajta a szimmetrikus bolyongást. Azaz: S_n egy véletlen bolyongás $\mathbb{B}_g$-n, amely egy megjelölt csúcsról (origóról) indul és i-dőegységen-ként lép az aktuális hely g szomszédja közül egyet egyenletes g^{-1} valószínűséggel választva. Számoljuk ki a Φ, F, L generátorfüggvényeket. ($\Phi(z)$: egy kijelölt első szomszéd elérési idejének generátorfüggvénye, $F(z)$: origóba való első viszatéés idejének generátorfüggvénye; $L(z)$: origóba való utolsó látogatás idejének generátorfüggvénye.)

2.2. Elágazó folyamatok

2.35. Jelölje $\theta(p)$ annak a valószínűségét, hogy soha nem pusztul ki egy olyan elágazó folyamat, amelyben az utódok eloszlása $GEO(p)$. Rajzolja fel a $p \mapsto \theta(p)$ függvény grafikonját.

2.36. Mekkora a valószínűséggel éri meg az n-edik generációt az az elágazó folyamat, amelyben az utódok eloszlása $GEO(\frac{1}{2})$?

2.37. Tekintsünk egy olyan elágazó folyanatot, amelyben az utódok eloszlásának generátorfüggvénye $P(z)$. Jelölje X a teljes populáció nagyságát, vagyis a keletkező véletlen fa csúcsainak a számát. Legyen $Q(z) = \mathbf{E}(z^X)$. Bizonyítsa be, hogy $Q(z)$ megyezik a $\frac{z}{P(z)}$ függvény inverzfüggvényével!

2.38. Tekintsünk egy olyan elágazó folyamatot, amiben egy egyed közvetlen utódai számának várható értéke 1 és szórása $0 < \sigma < +\infty$. Jelölje X_n az n-edik generációs egyedek számát, tehát $X_0 = 1$, X_1 az ős-egyed gyerekeinek a száma, X_2 az unokák száma, stb.

(a) Várhatóan hány leszármazott lesz összesen?

(b) Adjon formulát $\mathbf{D}^2(X_n)$ értékére, bizonyítsa indukcióval.

2.39. Legyen egy elágazó folyamat utód-eloszlása $GEO(\frac{1}{2})$. Jelölje X a teljes populáció nagyságát.

$$\lim_{k\to\infty} k^{\frac{3}{2}} \cdot \mathbf{P}(X = k) = ?$$

2.40. Egy amőba egy nap alatt két dolgot tehet: $\frac{1}{2}$ valószínűséggel kettéosztódik vagy $\frac{1}{2}$ valószínűséggel elpusztul. Az elágazó folyamat fájának csúcsszámát jelölje X. Mutassa meg generátorfüggvény-módszerrel, hogy $X \sim \tau$, ahol τ az egyszerű, szimmetrikus bolyongásnál az első szint elérési ideje. Adjon valószínűségszámítási jelentést a kapott azonosságnak!

Segítség: Legyen S_n az elágazó folyamat fájának szélességi bejárásánál azoknak a csúcsoknak a száma, akiket már megláttunk, de a szomszédjait még nem néztük meg akkor, amikor az n-edik csúcs szomszédjait nézzük meg.

2.3. Vegyes

2.41. Legyenek $0 < p = 1 - q < 1$ és $0 < a < 1$ valószínűségek, és definiáljuk a μ_a, $\mu_{a,p}$, és $\nu_{\mathrm{Geom}(p)}$ diszkrét eloszlásokat a következőképp:

$$\mu_a(i) = \begin{cases} a, & \text{ha } i = 2, \\ 1 - a, & \text{ha } i = 0, \\ 0, & \text{egyébként;} \end{cases} \qquad \mu_{a,p}(i) = \begin{cases} pa, & \text{ha } i = 2, \\ q, & \text{ha } i = 1, \\ p(1-a), & \text{ha } i = 0, \\ 0, & \text{egyébként;} \end{cases}$$

$$\nu_{\mathrm{Geom}(p)}(i) = \begin{cases} q^{i-1}p, & \text{ha } i = 1,\, 2,\, 3,\, \dots \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases} \qquad \text{(optimista geometriai eloszlás).}$$

(a) Határozzuk meg e három eloszlás P_a, $P_{a,p}$ illetve $P_{\mathrm{Geom}(p)}$ generátorfüggvényeit.

(b) Határozzuk meg annak valószínűségét a függvényében, hogy egy, a fenti μ_a eloszlású utódszámmal működő elágazó folyamat kihal.

(c) Legyen X a valaha is élt egyedek száma egy, a fenti μ_a eloszlású utódszámmal működő elágazó folyamatban. Határozzuk meg X Q_a generátorfüggvényét az órán látott $Q_a(s)/P_a(Q_a(s)) = s$ összefüggés segítségével.

(d) Határozzuk meg annak valószínűségét a és p függvényében, hogy egy, a fenti $\mu_{a,p}$ eloszlású utódszámmal működő elágazó folyamat kihal.

(e) Hasonlítsuk össze az eredményt az 41b pontbeli eredménnyel; mit jelent ez a kihalás valószínűségére nézve a két esetben?

(f) Legyen Y a valaha is élt egyedek száma egy, a fenti $\mu_{a,p}$ eloszlású utódszámmal működő elágazó folyamatban. Határozzuk meg Y $Q_{a,p}$ generátorfüggvényét az órán látott $Q_{a,p}(s)/P_{a,p}(Q_{a,p}(s)) = s$ összefüggés segítségével.

(g) Írjuk fel a 41c pontban szereplő Q_a illetve az első feladat $P_{\mathrm{Geom}(p)}$ generátorfüggvényeiből álló $Q_a \circ P_{\mathrm{Geom}(p)}$ kompozíciót. Hasonlítsuk ezt össze az e) pontban kapott $Q_{a,p}$ kifejezéssel. Mi következik az X és az Y valószínűségi változók eloszlásának kapcsolatára?

(h) Indokoljuk meg valószínűségszámítási terminusokban a d)-ben és f)-ben megállapítottakat.

2.42. Legyenek X_1, X_2, ... nemnegatív egész független és azonos eloszlású valószínűségi változók Q generátorfüggvénnyel, és legyen

$$S_0 = 0, \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} (X_i - 1),$$

azaz egy bolyongó pozíciója n lépés után, aki az i. lépésben $X_i - 1$-et lép (vagyis -1-et, ha $X_i = 0$, 0-t, ha $X_i = 1$, stb.). Legyen továbbá $\tau = \inf\{n > 0 : S_n = -1\}$ a -1 szint első elérési ideje, jelöljük ennek generátorfüggvényét P-vel.

(a) Az első lépésre feltételezve mutassuk meg, hogy $P(s) = Q(P(s)) \cdot s$.

(b) Az 42a rész alapján határozzuk meg P-t, ha X_i eloszlása az 2.41 feladatban szereplő μ_a eloszlás. (Azaz S_n egy egyszerű bolyongás.)

(c) Legyenek most az X_i változók Pesszimista Geom(p) eloszlásúak, az 42a rész alapján határozzuk meg P-t.

(d) A 42c rész alapján határozzuk meg annak valószínűségét p függvényében, hogy a bolyongó valaha eléri a -1 szintet.

2.43. Egy pók $p_k = \frac{1}{\log \frac{3}{2}} \frac{3^{-k}}{k}$ valószínűséggel rak k darab petét $k = 1, 2, \dots$ esetén (tehát biztosan rak legalább egy petét).

(a) Határozza meg a lerakott peték számának generátorfüggvényét!

(b) Minden egyes pete a többitől és a peték számától függetlenül $\frac{1}{2}$ valószínűséggel kel ki. Határozza meg a kikelt peték számának generátorfüggvényét, várható értékét és annak a valószínűségét, hogy pontosan egy kikelt utóda lesz a póknak!

2.44. Jelölje p_n annak a valószínűségét, hogy egy családban pontosan n gyerek van, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Legyen $p_n := \alpha\rho^n$, $n \geq 1$-re, és $p_0 = 1 - \alpha\rho(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots)$, ahol $\rho \in (0, 1)$ és $\alpha > 0$ úgy vannak megválasztva, hogy $\alpha\rho < 1 - \rho$. Tegyük fel, hogy ha egy családban n gyerek van, azok nemenkénti eloszlása egyenletes (a 2^n lehetőség között). Mutassuk meg, hogy minden $k \geq 1$-re, annak a valószínűsége, hogy egy családban pontosan k fiú van $2\alpha\rho^k/(2 - \rho)^{k+1}$.

2.45. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású pozitív egész értékű valószínűségi változók $P(z)$ generátorfüggvénnyel, és legyen $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Legyen

$$Y_k = \begin{cases} 1, & \text{ha } \exists n \text{, hogy } S_n = k, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Legyen $v_k = \mathbf{P}(Y_k = 1)$, és legyen $\{v_k\}$ generátorfüggvénye $V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k$. $V(z) = ?$

2.46. $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n = ?$

3. Markov- és Csebisev egyenlőtlenség, NSZGYT

3.47. Legyen X valószínűségi változó szórása véges. Lássa be, hogy

$$\sqrt{\mathbf{P}(X = 0)} \leq \frac{\mathbf{D}(X)}{|\mathbf{E}(X)|}$$

3.48. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_9$ függetlenek és egyenletes eloszlásúak a $[0, 1]$ intervallumon. Legyen

$$Y = \sqrt[9]{X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 \cdot X_5 \cdot X_6 \cdot X_7 \cdot X_8 \cdot X_9}$$

(a) Adjon alsó becslést a $\mathbf{P}(0,188875 < Y < 0,716531)$ valószínűségre!

(b) Határozza meg Y sűrűségfüggvényét!

3.49. Tegyük fel, hogy az $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ valószínűségi változók sorozatára $\mathbf{E}(|X_i|) \leq C$, ahol $C < \infty$ i-től független konstans. Bizonyítsuk be, hogy e feltétel mellett, ha b_n 0-hoz tartó számsorozat, akkor bármely rögzített $\delta > 0$ mellett

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(|b_n X_n| > \delta\big) = 0.$$

3.50. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ véges szórású valószínűségi változók, amelyekre $\mathbf{E}(X_i) \neq 0$. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{D}\big(X_n\big)/\mathbf{E}\big(X_n\big) = 0,$$

akkor bármely rögzített $\delta > 0$ mellett

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big(\Big|\frac{X_n}{\mathbf{E}(X_n)} - 1\Big| > \delta\Big) = 0.$$

Alkalmazzuk a coupon collector' problémára.

3.51. (a) Bizonyítandó, hogy a Markov egyenlőtlenség **éles**, a következő értelemben: *rögzítve* a $0 < m \leq \lambda$ számokat, létezik olyan nemnegatív X valószínűségi változó, melynek várható értéke $\mathbf{E}(X) = m$ és melyre a Markov egyenlőtlenség telítődik': $\mathbf{P}\big(X \geq \lambda\big) = m/\lambda$.
(b) Bizonyítandó, hogy a Markov egyenlőtlenség **nem éles**, a következő értelemben: rögzített nemnegatív X valószínűségi változóra, melynek várható értéke véges, $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda\mathbf{P}\big(X \geq \lambda\big)/\mathbf{E}\big(X\big) = 0$.

3.52. *(A felújítási függvény korlátossága)* Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ független és azonos eloszlású nemnegatív és nem nullára koncentrált valószínűségi változók. (Azaz: feltesszük, hogy $1 = \mathbf{P}(X_i \geq 0) \geq \mathbf{P}(X_i > 0) > 0$.) Legyen $T(n) := \sum_{i=1}^{n} X_i$ és $N(t) := \max\{n : T_n \leq t\}$.

Bizonyítsa be, hogy bármely $t \geq 0$-ra $M(t) = \mathbf{E}(N(t))$ korlátos:

(a) Lássa be, hogy $\mathbf{E}(e^{-X_i}) < 1$.

(b) Bizonyítsa, hogy a következő végtelen összeg konvergens: $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i < t\Big) < \infty$.

3.53. Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ egyazon $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn definiált, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek közös eloszlásfüggvénye $F(x)$. (Semmit nem teszünk fel függőségi viszonyaikról.) Legyen $M_n := \max_{1 \le i \le n} |X_i|$.
(a) Tegyük fel, hogy valamely $\alpha > 0$-ra $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^\alpha dF(x) < 0$, azaz $\mathbf{E}\big(|X_i|^\alpha\big) < \infty$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor bármely $\varepsilon > 0$-ra, rögzített $\delta > 0$ mellett

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(n^{-(1/\alpha+\varepsilon)}|M_n| > \delta\big) = 0.$$

(b) Tegyük fel, hogy valamely $s > 0$-ra $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(s|x|)dF(x) < 0$, azaz $\mathbf{E}\big(\exp(s|X_i|)\big) < \infty$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor bármely ∞-hez konvergáló b_n számsorozatra, rögzített $\delta > 0$ mellett

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big((b_n \log n)^{-1}|M_n| > \delta\big) = 0.$$

Útmutatás: Használjuk a $\mathbf{P}\big(\max_{1\le i\le n}|X_i| > \lambda\big) = \mathbf{P}\big(\cup_{i=1}^n \{|X_i| > \lambda\}\big) \le \sum_{i=1}^n \mathbf{P}\big(|X_i| > \lambda\big) = n\mathbf{P}\big(|X_i| > \lambda\big)$ megfontolást és Markov-jellegű egyenlőtlenségeket.

3.54. *A normális fluktuációk igazi nagyságrendjének megsejtése:*
Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek várható értéke $\mathbf{E}(X_i) = 0$ és szórásnégyzete $\mathbf{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty$. Legyen $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$. A NSZGYT azt mondja ki, hogy rögzített $\delta > 0$ mellett

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(|S_n|/n > \delta\big) = 0.$$

Bizonyítsuk be a következő (lényegesen erősebb) állítást: bármely ∞-hez tartó b_n számsorozattal, rögzített $\delta > 0$ mellett

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(|S_n|/\big(b_n\sqrt{n}\big) > \delta\big) = 0.$$

3.55. *(NSZGYT felújítási folyamatra.)* Legyenek $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$ független és azonos eloszlású, nem-negatív valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy $\mathbf{E}(\tau_i) =: m < \infty$. Legyen $T(n) := \sum_{i=1}^n \tau_i$ és $N(t) := \max\{n : T(n) \le t\}$. A NSZGYT értelmében $T(n)/n \to m$, valószínűségben. Bizonyítsuk be, hogy a következő duális állítás is igaz: rögzített $\delta > 0$ mellett

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\big(\big|\frac{N(t)}{t} - m^{-1}\big| > \delta\big) = 0.$$

3.56. Legyenek $X_1, X_2, \dots$ véges szórásnégyzetű, nulla várható értékű és páronként korrelálatlan valószínűségi változók. Azaz: minden i-re $\mathbf{E}\big(X_i\big) = 0$ és $\sigma_i^2 := \mathbf{Var}\big(X_i\big) = \mathbf{E}\big(X_i^2\big) < \infty$, továbbá $\mathbf{E}\big(X_iX_j\big) = 0$, ha $i \ne j$. Tegyük fel, hogy $\lim_{i\to\infty} \sigma_i^2/i = 0$. Legyen $S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Bizonyítsuk be, hogy $S_n/n \to 0$ valószínűségben és L^2-ben.

3.57. Legyenek $X_1, X_2, \dots$ azonos eloszlású (de nem feltétlenül független) véges szórásnégyzetű és nulla várható értékű valószínűségi változók. Azaz: minden i-re $\mathbf{E}\big(X_i\big) = 0$ és $\sigma_i^2 := \mathbf{Var}\big(X_i\big) = \mathbf{E}\big(X_i^2\big) < \infty$. Legyen $(r_k)_{k=0}^{\infty}$ nullához tartó pozitív számsorozat. Tegyük fel, hogy az X_i valószínűségi változók kovarianciáira fennáll a következő felső korlát: $\mathbf{Cov}\big(X_i, X_j\big) = \mathbf{E}\big(X_iX_j\big) \le r_{|i-j|}$. (Az egyenlőtlenség baloldalán nincs abszolút érték!) Bizonyítsuk be hogy $(X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n \to 0$ valószínűségben.

3.58. *Monte Carlo integrálás.*
Legyen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mérhető, négyzetesen integrálható függvény. Jelöljük: $I := \int_0^1 f(x)dx$, $J := \int_0^1 |f(x)|^2 dx$. Legyenek $U_1, U_2, \dots$ független és azonos $E(0,1)$ egyenletes eloszlású valószínűségi változók és $I_n := \big(f(U_1) + f(U_2) + \dots + f(U_n)\big)/n$.
(a) Bizonyítsuk be, hogy $I_n \to I$ valószínűségben.
(b) Csebisev egyenlőtlenség segítségével becsüljük meg a $\mathbf{P}\big(|I_n - I| > a/\sqrt{n}\big)$ valószínűségeket ($a > 0$ rögzített, $n \to \infty$).

3.59. (a) Legyenek $X_1, \dots, X_n$ függetlenek és azonos eloszlásúak, $\mathbf{E}(X_i) = 0$. Legyen $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Fejezze ki S_n harmadik és negyedik momentumának értékét X_i momentumai segítségével.

(b) Legyen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ négyszer folytonosan differenciálható függvény. Határozzuk meg a következő határértéket:

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \big\{f\big((x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n\big) - f\big(1/2\big)\big\}\, dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

4. Mértékelmélet

4.1. Mérhetőség

4.60. Azt mondjuk, hogy a $V \subset \mathrm{N}$ halmaznak van Cesàro sűrűsége, ha a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\big(V \cap [0,n]\big)}{n} =: \rho(V)$$

limesz létezik. Jelöljük $\mathcal{C}$-vel N azon részhalmazainak összességét, amelyeknek létezik Cesàro sűrűsége. Adjunk példát olyan $V_1, V_2 \in \mathcal{C}$ halmazokra, amelyekre $V_1 \cap V_2 \notin \mathcal{C}$, és ezzel bizonyítsuk, hogy $\mathcal{C}$ nem halmazalgebra.

4.61. *A Vitali halmaz konstrukciója — példa nem Lebesgue-mérhető halmazra.*
Az $I := [0,1)$ alaphalmazon értelmezzük a következő ekvivalencia-relációt: $x \sim y$ akkor és csak akkor, ha $x - y$ racionális. Konstruáljuk a $V \subset I$ halmazt, úgy, hogy az pontosan egy elemet tartalmazzon a fenti ekvivalencia-reláció minden egyes ekvivalencia osztályából. (Figyelem: E konstrukció során használjuk a *kiválasztási axiómát.*) Bizonyítandó, hogy a V halmaz *nem* Lebesgue mérhető.
Útmutatás: Lássuk be, hogy az I intervallum előáll a V halmaz megszámlálható (mod 1)-kongruens másának diszjunkt uniójaként.

4.62. (a) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető függvény. (Azaz: bármely nyílt $B \subset \mathbb{R}$ halmazra $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}$.) Bizonyítandó, hogy bármely $B \in \mathcal{B}$ halmazra is $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}$.
(b) Legyenek $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető függvények. Bizonyítandó, hogy $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is Borel-mérhető.

4.63. (a) Legyenek r_n, $n \in \mathrm{N}$, és r valós számok és $\lim_{n\to\infty} r_n = r$. Bizonyítsuk be, hogy

$$r = \sup_m \left(\inf_{n>m} r_n \right) = \inf_m \left(\sup_{n>m} r_n \right).$$

(b) Legyen $(\Omega, \mathcal{F})$ tetszőleges mérhető tér, $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ valós értékű függvények sorozata és $f : \Omega \to \mathbb{R}$, ahol $f(\omega) := \inf_n f_n(\omega)$. Bizonyítandó, hogy bármely rögzített $a \in \mathbb{R}$ számra

$$f^{-1}([a,\infty)) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}([a,\infty)),$$
$$f^{-1}((a,\infty)) = \bigcup_{m=1}^{\infty} f^{-1}([a+1/m,\infty)).$$

A fenti azonosságok alapján lássuk be, hogy mérhető függvények sorozatának infimuma is mérhető.
(c) Az (a) és (b) pont segítségével lássuk be, hogy mérhető függvények sorozatának pontonkénti limesze is mérhető függvény.

4.64. (a) Legyen Ω alaphalmaz és $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ Ω részhalmazainak tetszőleges gyüjteménye. Bizonyítandó, hogy létezik egy *legkisebb* $\mathcal{F}$ σ-algebra, melyre $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$. Ezt hívjuk az $\mathcal{S}$ részhalmazrendszer által generált σ-algebrának.
(b) Legyenek $(\Omega, \mathcal{F})$ és $(\Xi, \mathcal{G})$ mérhető terek, ahol $\mathcal{G}$ az $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(\Xi)$ részhalmazrendszer által generált σ-algebra. Bizonyítandó, hogy a $T : \Omega \to \Xi$ leképezés akkor és csak akkor mérhető, ha bármely $S \in \mathcal{S}$ részhalmazra $T^{-1}(S) \in \mathcal{F}$.

4.65. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ indikátorváltozók ugyanazon az $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető téren (azaz X_i értékkészlete a $\{0,1\}$ kételemű halmaz), ahol $\mathcal{F}$ a legszűkebb σ-algebra, amire nézve mérhetőek az X_i változók. Lássa be, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} X_n$ mérhető függvény $(\Omega, \mathcal{F})$-ből $([0,1], \mathcal{B})$-be, és fordítva: a valós számok kettes számrendszerbeli kifejtése is mérhető függvény $([0,1], \mathcal{B})$-ből $(\Omega, \mathcal{F})$-be.

4.2. Mértékek

4.66. Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ valószínűségi mező, és tegyük fel, hogy $\mathcal{A}$ egy olyan halmazalgebra, amire $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$. Definiáljuk két $\mathcal{F}$-beli halmaz távolságát a szimmetrikus differenciájuk valószínűségével (avagy a halmazok indikátorváltozóinak L_1-távolságával):

$$d(A,B) = \mathbf{P}(A \circ B) = \|\mathbb{1}(A) - \mathbb{1}(B)\|_1$$

(a) Lássa be, hogy

$$d(A,C) \le d(A,B) + d(B,C), \quad d(A,B) = d(A^c, B^c), \quad d(\cup_{k=1}^n A_k, \cup_{k=1}^n B_k) \le \sum_{k=1}^n d(A_k, B_k)$$

Az utóbbi bizonyításánál jól jön a

$$\forall \omega \in \Omega: \quad |\mathbb{1}(\omega \in \cup_{k=1}^n A_k) - \mathbb{1}(\omega \in \cup_{k=1}^n A_k)| \le \left| \sum_{k=1}^n \mathbb{1}(\omega \in A_k) - \sum_{k=1}^n \mathbb{1}(\omega \in B_k) \right|$$

egyenlőtlenség.

(b) Lássa be, hogy minden "bonyolult" $\mathcal{F}$-beli halmaz jól közelíthető "egyszerű" $\mathcal{A}$-beli halmazzal:

$$\forall B \in \mathcal{F} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathcal{A}: \quad d(A,B) < \varepsilon$$

Segítség: Elég belátni, hogy az $\mathcal{A}$-beli halmazokkal jól közelíthető halmazok szigma-algebrát alkotnak.

4.67. (a) Legyenek $\mathbf{P}_1$ és $\mathbf{P}_2$ valószínűségi mértékek ugyanazon az $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető téren. Legyen $\mathcal{A}$ olyan halmazalgebra, amire $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$. Azt mondjuk, hogy $\mathbf{P}_1$ és $\mathbf{P}_2$ kölcsönösen szinguláris, ha van olyan $H \in \mathcal{F}$, hogy $\mathbf{P}_1(H) = 1$ és $\mathbf{P}_2(H) = 0$. Lássa be, hogy a két mérték akkor és csak akkor kölcsönösen szinguláris, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathcal{A}: \quad \mathbf{P}_1(A) \ge 1 - \varepsilon, \quad \mathbf{P}_2(A) \le \varepsilon$$

(b) Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek közös eloszlása $\mathbf{P}(X_i = 0) = p \ne \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(X_i = 1) = 1 - p$. Legyen $Y := \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} X_n$. Bizonyítsuk be, hogy az Y valószínűségi változó eloszlásfüggvénye folytonos, de szinguláris.

Megj.: Egy korábbi feladat szerint, ha $p = 1/2$, akkor Y egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumban.

4.68. Ha $H \subseteq \mathbb{R}^2$ egy síkidom (azaz a sík mérhető részhalmaza), akkor jelölje $T(H)$ a síkidom területét. Jelölje továbbá B_r az origó középpontú, r sugarú körlapot és $n, m \in \mathbb{Z}$ esetén jelölje $G_{n,m}$ azon síkbeli pontok halmazát, amiknek x koordinátája n és $n+1$ közé, y koordinátája pedig m és $m+1$ közé esik.

Bizonyítsa be, hogy ha H_k, $k = 1, 2, \ldots$ mérhető, véges területű síkidomok sorozata, akkor a következő két feltétel ekvivalens egymással:

(a) $\lim_{k\to\infty} T(H_k) = 0$

(b) $\forall m \forall n \quad \lim_{k\to\infty} T(H_k \cap G_{n,m}) = 0$ és $\lim_{r\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} T(H_k \setminus B_r) = 0$

4.3. Integrálás

4.69. Legyen $f: [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ függvény a következőképpen értelmezve:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad 0 < x - y \le 1, \\ -1, & \text{ha} \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad 0 < y - x \le 1, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Számolják ki a következő kettős integrálokat:

$$I := \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(x,y) dy \right) dx, \qquad J := \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(x,y) dx \right) dy.$$

Értelmezzék az eredményt Fubini tételének tükrében.

4.70. Legyen Y valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(y) := \mathbf{P}\big(Y < y\big)$. Tegyük fel, hogy véges a második momentuma és legyen $m := \mathbf{E}\big(Y\big)$, $\sigma^2 := \mathbf{Var}\big(Y\big)$. Számolják ki a következő kettős integrált

$$I := \int_{-\infty}^\infty \left(\int_x^\infty (y - m) dF(y) \right) dx.$$

Értelmezék az eredményt Fubini tételének tükrében.

4.71. Monoton konvergencia-tétel:

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ mértéktér és $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ nemnegatív mérhető függvények monoton növő sorozata és $f = \sup_n f_n$. Ekkor

$$\int_\Omega f(\omega) d\mu(\omega) = \sup_n \int_\Omega f_n(\omega) d\mu(\omega)$$

Ez az egyenőség akkor is igaz, ha $\int_\Omega f(\omega) d\mu(\omega) = \infty$. Lássa be a monoton konvergenciatételt az $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}$ (Borel-algebra), $\mu = \lambda$ (Lebesgue-mérték) esetben. Használja a síkidomok területére, mint mértékre vonatkozó monoton osztálytételt! Milyen feltétel mellett igaz a monoton konvergenciatétel monoton csökkenő függvénysorozatokra?

4.72. Fatou-lemma:

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ mértéktér és $f_1, f_2, \ldots$ nemnegatív, mérhető függvények sorozata. Legyen $f = \liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_n (\inf_{m \geq n} f_m)$. Ekkor

$$\int_\Omega f(\omega) d\mu(\omega) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(\omega) d\mu(\omega)$$

Lássa be a Fatou-lemmát a monoton konvergencia-tétel segítségével!

Mutasson példát arra, amikor egyenletesen integrálható függvények liminfjének integrálja szigorúan kisebb az integálok liminfjénél.

4.73. Dominált konvergencia-tétel:

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ mértéktér és f_n mérhető függvények sorozata, amelyek pontonként konvergálnak az f függvényhez:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$$

Továbbá tegyük föl, hogy van olyan $g \geq 0$ domináló függvény, amire amire $|f_n(\omega)| \leq g(\omega)$ és $\int_\Omega g(\omega) d\mu(\omega) < \infty$. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(\omega) d\mu(\omega) = \int_\Omega f(\omega) d\mu(\omega)$$

Lássa be a dominált konvergencia-tételt úgy, hogy a Fatou-lemmát alkalmazza a $g - f_n$, illetve a $g + f_n$ függvénysorozatokra.

4.74. Példa arra, amikor a limeszképzés és az integrálás nem cserélhető fel:

Legyen f_λ a λ paraméterű exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye és $f = \lim_{\lambda\to 0} f_\lambda$. Lássa be, hogy

$$\lim_{\lambda\to 0} \int_0^\infty f_\lambda(x) dx \neq \int_0^\infty f(x) dx$$

Lássa be (a dominált konvergencia-tétel felhasználása nélkül, direkt módon), hogy nincs olyan $g \geq 0$ domináló függvény, amire $f_\lambda(x) \leq g(x)$ minden $\lambda \leq \lambda_0$-ra és $\int_0^\infty g(x) dx < \infty$.

4.75. Egy tétel, ami két vonatkozásban is erősebb a dominált konvergencia-tételnél:

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ valószínűségi mező és X_n nemnegatív valószínűségi változók sorozata. Azt mondjuk, hogy az X_n sorozat mértékben konvergál nullához, ha

$$\forall \delta > 0 : \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n > \delta) = 0$$

Továbbá: egy X_n sorozat egyenletesen integrálható, ha

$$\lim_{K\to\infty} \sup_{n\in\mathrm{N}} \mathbf{E}\big(\mathbb{1}[X_n > K] \cdot X_n\big) = 0$$

(a) Lássa be, hogy $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n) = 0$ akkor és csak akkor, ha az X_n sorozat egyenletesen integrálható és mértékben konvergál nullához.

(b) Lássa be a monoton osztálytétel segítségével, hogy ha $\forall \omega \in \Omega$ esetén $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0$, akkor az X_n sorozat mértékben tart nullához. Mutasson példát rá, hogy van olyan X_n sorozat, ami mértékben tart nullához, de $\forall \omega \limsup_{n\to\infty} X_n(\omega) = 1$.

(c) Lássa be a Markov-egyenlőtlenség segítségével, hogy ha van olyan $Y \geq 0$ valószínűségi változó, amire $\mathbf{E}(Y) < \infty$ és $X_n \leq Y$, akkor az X_n sorozat egyenletesen integrálható. Mutasson példát olyan egyenletesen integrálható X_n sorozatra, amire $\mathbf{E}(\sup_n X_n) = \infty$.

5. Valószínűségben való konvergencia

5.76. Legyenek az $X_1, X_2, \dots$ és Y valószínűségi változók egyazon $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn definiálva és legyenek eloszlásfüggvényeik $F_1(x)$, $F_2(x)$, $\dots$, illetve $G(x)$. Bizonyítsuk be, hogy ha $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} Y$, akkor $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = G(x)$ a G eloszlásfüggvény minden folytonossági pontjában.

5.77. Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek közös eloszlásfüggvénye $F(x)$. Tegyük fel, hogy $F(x) < 1$ minden $x < \infty$-re. Legyen $M_n := \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi (i) és (ii) állítások ekvivalensek:

(i) Megfelelően választott $A_n \in \mathbb{R}$ konstansokkal, bármely $0 < \varepsilon$-ra

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big(|M_n - A_n| > \varepsilon\Big) = 0.$$

(ii) Tetszőleges $0 < c$-re

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - F(x+c)}{1 - F(x)} = 0.$$

Megjegyzés: Az (ii) feltétel lényegében azt állítja, hogy $F(x)$ konvergenciája 1-hez, amint $x \to \infty$, exponenciálisnál gyorsabb. A feladat szerint ekkor M_n lényegében determinisztikus, alig fluktuál.

5.78. Legyenek az $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ és X valószínűségi változók egyazon $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn értelmezve és $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$.

(a) Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egyenletesen folytonos függvény és $Y_n := f(X_n)$, ill. $Y := f(X)$, lássuk be, hogy $Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} Y$.

(b) Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és $Y_n := f(X_n)$, ill. $Y := f(X)$, bizonyítsuk be, hogy $Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} Y$.

(c) Bizonyítandó, hogy ha az X_n valószínűségi változók m.b. (egyenletesen) *korlátosak* (azaz: létezik $M < \infty$ úgy, hogy $\mathbf{P}\big(\forall n \in \mathrm{N} : |X_n| \le M\big) = 1$, akkor $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\big(X_n\big) = \mathbf{E}\big(X\big)$. Mutassuk be egy példán keresztül, hogy a korlátosság szükséges feltétel.

5.79. Legyenek az $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots, Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots, X$ és Y valószínűségi változók egyazon $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn értelmezve és tegyük fel, hogy $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ és $Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} Y$. Bizonyítandó, hogy

(a) $X_n Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} XY$.

(b) Ha 1 valószínűséggel $Y_n \neq 0$ és $Y \neq 0$, akkor $X_n / Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X/Y$.

5.80. Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} dx_1\, dx_2 \,\cdots\, dx_n = \frac{2}{3}.$$

5.81. Legyen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos. Bizonyítandó, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) dx_1\, dx_2 \,\cdots\, dx_n = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\left((x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n}\right) dx_1\, dx_2 \,\cdots\, dx_n = f\left(\frac{1}{e}\right).$$

5.82. *A Laplace transzformáció invertálása.*
Legyen $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ folytonos és korlátos függvény. Az f függvény $\widehat{f}$ Laplace transzformáltját a következőképpen definiáljuk:

$$\widehat{f} : (0, \infty) \to R, \qquad \widehat{f}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda y} f(y) dy.$$

(a) Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független és azonos exponenciális eloszlású valószínűségi változók: $\mathbf{P}\big(X_k > x\big) = e^{-\lambda x}$, $x > 0$; $\mathbf{E}\big(X_k\big) = \lambda^{-1}$; $\mathbf{Var}\big(X_k\big) = \lambda^{-2}$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathbf{E}\Big(f(S_n)\Big) = (-1)^{n-1} \frac{\lambda^n \widehat{f}^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!},$$

ahol $\widehat{f}^{(n-1)}$ a $\widehat{f}$ függvény $(n-1)$-edik deriváltját jelöli.
(b) Bizonyítsuk be a Laplace transzformáció következő inverziós formuláját (mely folytonos és korlátos f esetén érvényes):

$$f(y) = \lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n/y)^n \widehat{f}^{(n-1)}(n/y)}{(n-1)!}.$$

5.83. Legyen $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ az n-dimenziós valós euklideszi tér egységgömb-felszíne. S^{n-1}-en egyértelműen meghatározott a $\nu^{(n-1)}$ valószínűségi mérték, mely invariáns az $\mathbb{R}^n$ tér ortogonális transzformációira. Azaz: bármely $A \subset S^{n-1}$ Borel-mérhető halmazra és az $\mathbb{R}^n$ tér bármely H ortogonális transzformációjára $\nu^{(n-1)}(HA) = \nu^{(n-1)}(A)$. (Ezt az egyértelműen meghatározott mértéket nevezzük az S^{n-1} gömbfelszín Haar mértékének. Ez nem egyéb, mint az egyenletes eloszlású mérték S^{n-1}-en.)

(a) Legyen $\mathbf{X}$ egy olyan véletlen vektor $\mathbb{R}^n$-ben, melynek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ komponensei független és azonos $N(0,1)$ eloszlású valószínűségi változók. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbb{R}^n$ tér tetszőleges H ortogonális transzformációját alkalmazva az $\mathbf{Y} := H\mathbf{X}$ véletlen vektor $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ komponensei szintén független és azonos $N(0,1)$ eloszlású valószínűségi változók lesznek. Ebből és az egyenletes mérték unicitásából bizonyítsuk, hogy $\mathbf{X}/|\mathbf{X}| \in S^{n-1}$ eloszlása pontosan $\nu^{(n-1)}$. (Azaz: bármely Borel mérhető $A \subset S^{n-1}$ esetén $\mathbf{P}\big(\mathbf{X}/|\mathbf{X}| \in A\big) = \nu^{(n-1)}(A)$.)

(b) Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független és azonos $N(0,1)$ standard normális eloszlású valószínűségi változók és

$$R_n := \left(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2\right)^{1/2}.$$

Bizonyítandó, hogy $R_n/\sqrt{n} \xrightarrow{\mathbf{P}} 1$, amint $n \to \infty$.

(c) Válasszunk egy véletlen P pontot az S^{n-1} gömbfelszínen egyenletes eloszlással (azaz a $\nu^{(n-1)}$ Haar mérték szerint) és jelöljük e pont $\mathbb{R}^n$-beli koordinátáit $(Y_1^{(n)}, Y_2^{(n)}, \ldots, Y_n^{(n)})$-el. A fenti (a) és (b) pontok felhasználásával bizonyítsuk az alábbi határeloszlás tételeket:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big(\sqrt{n}Y_1^{(n)} < y\Big) = \Phi(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx,$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big(\sqrt{n}Y_1^{(n)} < y_1;\ \sqrt{n}Y_2^{(n)} < y_2;\Big) = \Phi(y_1)\Phi(y_2).$$

Útmutatás: $\mathbf{P}\big(\sqrt{n}Y_1^{(n)} < y\big) = \mathbf{P}\big(X_1/R_n < y\big)$, a feladat jelöléseivel.

6. Borel-Cantelli-lemma, majdnem biztos konvergencia, NSZET

6.84. Legyenek az $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ valószínűségi változók egyazon $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn értelmezve és legyen $Y_n := \sup_{m\geq n} |X_m|$. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi két állítás ekvivalens:

(i) $X_n \xrightarrow{\mathbf{m.b.}} 0$, amint $n \to \infty$.
(ii) $Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$, amint $n \to \infty$.

6.85. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független valószínűségi változók. Lássuk be, hogy pontosan akkor lesz $\sup_n X_n < \infty$ 1 valószínűséggel, ha $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_n > A) < \infty$ valamely pozitív véges A számmal.

6.86. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók. Bizonyítsuk be, hogy a következő két állítás ekvivalens:

(i) $\mathbf{E}|X_i| < \infty$.
(ii) $\mathbf{P}(|X_n| > n \quad \text{végtelen sok } n\text{-re }) = 0$.

6.87. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független valószínűségi változók, melyeknek eloszlása rendre

$$\mathbf{P}\Big(X_n = n^2 - 1\Big) = n^{-2}, \quad \mathbf{P}\Big(X_n = -1\Big) = 1 - n^{-2}.$$

Bizonyítandó, hogy minden $n \in$ N-re $\mathbf{E}\big(X_n\big) = 0$, ám

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = -1, \quad \text{m.b.}$$

6.88. Legyenek az $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ és X valószínűségi változók egyazon $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőn értelmezve. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi két állítás ekvivalens:

(i) $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$, amint $n \to \infty$.

(ii) Minden $k \mapsto n_k$ részsorozatban van egy $j \mapsto n_{k_j}$ rész-részsorozat, amelyre $X_{n_{k_j}} \xrightarrow{\mathbf{m.b.}} X$, amint $j \to \infty$.

6.89. Bizonyítsa, hogy tetszőleges $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változó-sorozathoz létezik olyan determinisztikus $c_1, c_2, \ldots$ számsorozat, hogy $\frac{X_n}{c_n} \xrightarrow{\mathbf{m.b.}} 0$.

6.90. Fogalmazzon meg szükséges és elégséges feltételt arra, hogy független $X_i \sim EXP(\lambda_i)$ valószínűségi változók sorozata mikor tart eloszlásban, illetve majdnem biztosan nullához.

6.91. (a) Lássa be, hogy ha egyazon valószínűségi mezőn értelmezett nemnegatív valószínűségi változók várható értékei összegezhetőek, akkor a valószínűségi változók részletösszegei is majdnem biztosan konvergálnak egy majdnem biztosan véges valószínűségi változóhoz. Segítség: Funkanalból tudjuk, hogy a részletösszegek L_1-ben konvergálnak...

(b) Legyenek $X_i \sim EXP(\lambda_i)$ független valószínűségi változók. Legyen $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Bizonyítsa be, hogy $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\lambda_i} = \infty$ esetén $S_n \xrightarrow{\mathbf{m.b.}} \infty$. Segítség: alkalmazza a Markov-egyenlőtlenséget e^{-S_n}-re. Lássa be, hogy $\prod_{i=1}^\infty \frac{\lambda_i}{\lambda_i+1} = 0$.

6.92. Végtelen sok független kísérletet végzünk: az n-edik kísérlet $n^{-\alpha}$ valószínűséggel sikeres, $0 < \alpha < 1$. Legyen továbbá $k \geq 1$. Akkor örülünk, ha végtelen sokszor fordul elő, hogy k közvetlenül egymást követő kísérletünk sikeres. Mekkora valószínűséggel örülünk?

6.93. (A leghosszabb tiszta fej sorozat, I.)
Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek közös eloszlása: $\mathbf{P}(X_k = 1) = p$, $\mathbf{P}(X_k = 0) = q$, ahol $p + q = 1$. Rögzítsünk egy $\lambda > 1$ paramétert és jelöljük $A_k^{(\lambda)}$-val a következő eseményeket: $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$A_k^{(\lambda)} := \Big\{\exists r \in \big[[\lambda^k], [\lambda^{k+1}] - k\big] \cap \mathrm{N} : X_r = X_{r+1} = \cdots = X_{r+k-1} = 1\Big\}.$$

Egyszerűen szólva: az $A_k^{(\lambda)}$ esemény azt jelenti, hogy $[\lambda^k]$ és $[\lambda^{k+1}] - 1$ között van valahol egy k hosszú tisztán 1-esekből álló tömör sorozat. Bizonyítandó, hogy

(a) Ha $\lambda < p^{-1}$, akkor 1-valószínűséggel az $A_k^{(\lambda)}$ események közül csak véges sok következik be.

(b) Ha $\lambda > p^{-1}$, akkor 1-valószínűséggel az $A_k^{(\lambda)}$ események közül végtelen sok bekövetkezik.

(c) Mi történik $\lambda = p^{-1}$ esetén?

6.94. (A leghosszabb tiszta fej sorozat, II.)
Legyen

$$R_n := \sup\{k \geq 0 : X_n = X_{n+1} = \cdots = X_{n+k-1} = 1\}.$$

Azaz: R_n az n-el kezdődő tiszta 1-es sorozat hossza. (Ha $X_n = 0$, akkor $R_n = 0$.) Bizonyítandó, hogy

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{R_n}{\log n} = |\log p|^{-1}\right) = 1.$$

Útmutatás: $\alpha > 0$ rögzített paraméterre legyen

$$B_n^{(\alpha)} := \{R_n > \alpha \log n / |\log p|\}.$$

Ha $\alpha > 1$, akkor a Borel-Cantelli lemma direkt állításából egyszerű számolás útján adódik, hogy 1-valószínűséggel csak véges sok $B_n^{(\alpha)}$ következik be. Ha $\alpha \leq 1$, akkor az előző feladat megfontolásaiból következik, hogy 1-valószínűséggel végtelen sok $B_n^{(\alpha)}$ bekövetkezik.

6.95. *A McMillan tétel legegyszerűbb alakja.*
Legyen $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_r)$, ahol p_i, $i = 1, 2, \dots, r$ pozitív számok, melyekre $p_1 + p_2 + \dots + p_r = 1$. Azaz: adott egy valószínűségi eloszlás az $\{1, 2, \dots, r\}$ halmazon. A $\mathbf{p}$ eloszlás *entrópiáját* a következőképpen definiáljuk: $H(\mathbf{p}) := -\sum_{j=1}^{r} p_j \log p_j$. Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek közös eloszlása $\mathbf{P}(X_n = j) = p_j$. Azaz: független azonos kísérleteket végzünk, melyeknek lehetséges kimenetelei $\{1, 2, \dots, r\}$ indexekkel vannak jelölve és X_k a k-adik kísérlet eredményét jelöli. Definiáljuk az $R_n := \prod_{k=1}^{n} p_{X_k}$ valószínűségi változókat. Az R_n azt mondja meg, hogy *mi az a priori valószínűsége a bekövetkezett $X_1, X_2, \dots, X_n$ sorozatnak.* Bizonyítandó, hogy

$$\mathbf{P}\Big(\lim_{n\to\infty} n^{-1} \log R_n = -H(\mathbf{p})\Big) = 1.$$

6.96. *A NSZET megfordítása.*
(a) Legyen Z nem-negatív valószínűségi változó és

$$Y := [Z] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{Z \geq n\}}.$$

Lássuk be, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\Big(Z \geq n\Big) \leq \mathbf{E}\Big(Z\Big) \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\Big(Z \geq n\Big).$$

(b) Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, amelyekre $\mathbf{E}\big(|X_n|\big) = \infty$. Bizonyítsuk be, hogy bármely rögzített $M < \infty$-re

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\Big(|X_n| \geq Mn\Big) = \infty$$

és

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|X_n|}{n} = \infty, \quad \text{m.b.}$$

(c) Legyen $S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n$, ahol $X_1, X_2, \dots$ a (b) pontbeli valószínűségi változók. Bizonyítsuk be, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{n} = \infty, \quad \text{m.b.}$$

6.97. *„Nem-iterált logaritmus tétel"*
(a) Legyen X standard normális($N(0,1)$) eloszlású valószínűségi változó. Bizonyítsuk be, hogy bármely $x > 0$ valós számra

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \leq \mathbf{P}\Big(X > x\Big) \leq \frac{1}{x} \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}}$$

Útmutatás: Hasonlítsuk össze a deriváltakat.
(b) Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független $N(0,1)$ eloszlású valószínűségi változók. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathbf{P}\Big(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\sqrt{2 \log n}} = 1\Big) = 1.$$

(c) Legyen $S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n$, ahol $X_1, X_2, \dots$ a (b) pontbeli valószínűségi változók. Bizonyítandó, hogy bármely $C > \sqrt{2}$ mellett

$$\mathbf{P}\Big(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n \log n}} < C\Big) = 1.$$

Megjegyzés: Az Iterált Logaritmus Tétel állítása:

$$\mathbf{P}\Big(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \log\log n}} = 1\Big) = 1.$$

6.98. (a) Legyen $X \sim POI(\mu)$. Adjon a Stirling-formula segítségével minél egyszerűbb alakú $f(x)$ függvényt, amire

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(\mathbf{P}(X \geq x))}{f(x)} = -1$$

(b) Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ függetlenek és $POI(\mu)$ eloszlásúak. Definiáljuk az $\mathbf{a}(n) \in \mathbb{R}_+$ számsorozat tagjait az

$$\mathbf{a}(n)^{\mathbf{a}(n)} = n$$

összefüggés segítségével. Lássa be, hogy

$$\mathbf{P}\big(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\mathbf{a}(n)} = 1\big) = 1$$

7. Nagy eltérés-elmélet

7.1. Logaritmikus konvexitás, Legendre-transzformáció

7.99. A konvex szeparációs tulajdonság:

(a) Legyen $H \subseteq \mathbb{R}^2$ egy konvex, zárt halmaz és $(x, y) \notin H$ egy pont. Lássa be, hogy van olyan egyenes, ami szétválasztja őket.

(b) Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos konvex függvény. Lássa be, hogy f előáll a nála nem nagyobb affin lineáris függvények supremumaként:

$$f(x) = \sup\{c(x) + d : \forall y \in [a, b]\text{-re } c(y) + d \le f(y)\}$$

7.100. Feldobunk egy érmét hatvanszor, jelölje a fejek számát X. Adjunk felső becslést a

$$\mathbf{P}(|X - 30| \ge 20)$$

valószínűségre a Csebisev-egyenlőtlenség segítségével! Jobb becslés is adható az exponenciális Markov-egyenlőtlenség segítségével:

(a) Legyen $Y_\beta = e^{\beta X}$, ahol $0 < \beta$. Lássa be, hogy $\mathbf{E}(Y_\beta) = 2^{-60}(1 + e^\beta)^{60}$.

(b) Adjon felső becslést a $\mathbf{P}(X \ge 50)$ valószínűségre oly módon, hogy a Markov-egyenlőtlenséget alkalmazza az Y_β nemnegatív valószínűségi változóra.

(c) Keresse meg azt a β-t, amelyikre az előbbi becslés a legélesebb. (A feladat visszavezethető az $f(\beta) = \log(1 + e^\beta) - \frac{5}{6}\beta$ konvex függvény minimalizálására.)

(d) Lássa be, hogy $\mathbf{P}(|X - 30| \ge 20) \le 2 \cdot 3^{60} \cdot 5^{-50} < 10^{-6}$

7.101. Egy X valószínűségi változó logaritmikus momentumgeneráló függvényét az $\hat{I}(\lambda) = \log(\mathbf{E}(e^{\lambda X}))$ képlettel definiáljuk.

(a) Határozza meg $aX+b$ logaritmikus momentumgeneráló függvényét és független valószínűségi változók összegének logaritmikus momentumgeneráló függvényét.

(b) Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ függetlenek és azonos eloszlásúak, valamint ν tőlük független, N-értékű valószínűségi változó. Legyen $Y = \sum_{n=1}^{\nu} X_i$. Fejezze ki az Y véletlen tagszámú összeg logaritmikus momentumgeneráló függvényét X_1 és ν logaritmikus momentumgeneráló függvénye segítségével.

(c) Számítsa ki a következő nevezetes eloszlások logaritmikus momentumgeneráló függvényét (az értelmezési tartományaikkal együtt): Bernoulli, Binomiális, Poisson, Exponenciális, Gamma, Geometriai, Negatív binomiális, Normális, Cauchy.

7.102. Egy pozitív függvényt logaritmikusan konvexnek nevezünk, ha a logaritmusa konvex.

(a) Milyen feltételnek kell teljesülnie egy logaritmikusan konvex függvény deriváltjaira? Lássa be, hogy egy logaritmikusan konvex függvény konvex.

(b) Lássa be, hogy logaritmikusan konvex függvények supremuma is logaritmikusan konvex és hogy minden folytonos, logaritmikusan konvex $f(x)$ függvény előállítható a nála kisebb, $a^x \cdot b$ alakú függvények supremumaként $(a, b > 0)$.

(c) Bizonyítsa be, hogy logaritmikusan konvex függvények számszorosa, pozitív kitevőjű hatványa, szorzata, összege is logaritmikusan konvex.

(d) Lássa be az előbbiek segítségével, hogy egy diszkrét eloszlású valószínűségi változó logaritmikus momentumgeneráló függvénye konvex.

7.103. Egy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény $\hat{f}$ Legendre-transzformáltját a következő képlettel definiáljuk:

$$\hat{f}(\lambda) = \sup_{x\in[a,b]} \{\lambda x - f(x)\}$$

Egy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény f^{co} konvex burkolója az f-nél nem nagyobb affin lineáris függvények supremuma.

(a) Lássa be, hogy $\hat{f}$ konvex, és hogy $f \leq g$ esetén $\hat{g} \leq \hat{f}$.

(b) Vezesse le a
$$\forall x \forall \lambda : \hat{f}(\lambda) + f(x) \geq \lambda x$$
összefüggésből, hogy $\hat{\hat{f}} \leq f^{co}$.

(c) Lássa be, hogy differenciálható f esetén $\hat{f}$ értelmezési tartománya megegyezik f' értékkészletével. Miért definiáljuk $+\infty$-nek $\hat{f}$ értékét az értelmezési tartományán kívül? Megj: konvex függvények esetén ez a természetes konvenció.

(d) Legyen $g(\lambda) = A \cdot f(a\lambda + b) + B\lambda + C$ (ahol $A \geq 0$). Lássa be a Legendre-transzformáció Jolly-Joker-képletét:
$$\hat{g}(x) = A\hat{f}(\frac{x-B}{aA}) + (\frac{-b}{a})x + (\frac{bB}{a} - C)$$

7.104. A Legendre-transzformáció involúció:

(a) Lássa be, hogy ha f affin lineáris függvény, akkor $\hat{\hat{f}} = f$.

(b) Lássa be, hogy egy differenciálható, szigorúan konvex f függvény Legendre-transzformáltjának deriváltja megegyezik f deriváltjának inverzfüggvényével és azt, hogy $\hat{\hat{f}} = f$.

(c) Lássa be, hogy tetszőleges f-re $\hat{\hat{f}} \geq f^{co}$, és így $\hat{\hat{f}} = f^{co}$.

7.105. Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ és $g : [c,d] \to \mathbb{R}$, akkor $\{f,g\}^{co}$, az f és g együttes konvex burkolója azoknak az affin lineáris függvények supremuma, melyek f-nél és g-nél is kisebbek. $\{f,g\}^{co}$ értelmezési tartománya $[\min\{a,c\}, \max\{b,d\}]$. Lássa be, hogy ha f és g konvex és folytonos, akkor $\max\{f,g\}$ Legendre-transzformáltja $\{\hat{f},\hat{g}\}^{co}$ és hogy $\{f,g\}^{co}$ Legendre-transzformáltja $\max\{\hat{f},\hat{g}\}$.

7.106. (a) Lássa be, hogy egy X valószínűségi változó $\hat{I}(\lambda)$ logaritmikus momentumgeneráló függvényének $\hat{\hat{I}}(x) = I(x)$ Legendre-transzformáltját, azaz a nagy eltérés-rátafüggvényét a következő képlettel számolhatjuk:
$$I(x) = x \cdot \hat{I}'^{-1}(x) - \hat{I}\big(\hat{I}'^{-1}(x)\big)$$

(b) Legyen $m = \mathbf{E}(X)$. $I(m) =?$ $I'(m) =?$ $I''(m) =?$

(c) Számítsa ki a Bernoulli, Binomiális, Poisson, Exponenciális, Gamma, Geometriai, Negatív binomiális, Normális eloszlások nagy eltérés-rátafüggvényeit (az értelmezési tartományaikkal együtt)!

7.107. (a) Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ függetlenek és $POI(\mu)$ eloszlásúak. Legyen $Y_i = \mu - X_i$. Határozza meg Y_1 $I_Y(x)$ rátafüggvényét.

(b) Lássa be, hogy $x \geq 0$-ra $I_Y(x) \geq \frac{x^2}{2\mu}$.

(c) Legyen $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ Bizonyítsa, hogy
$$\mathbf{P}\big(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{2\log(n)\mu n}} \geq -1\big) = 1$$

7.2. Bernstein-egyenlőtlenség

7.108. Húzzunk be az egység sugarú körbe 100 darab húrt egymástól függetlenül oly módon, hogy az egyes húrok végpontjait is egymástól függetlenül és az egységkörön egyenletes eloszlással választjuk. Jelölje X a húrok összhosszát. Adjon alsó becslést a
$$\mathbf{P}\big(|X - \frac{400}{\pi}| < 10\frac{\sqrt{4\pi^2 - 32}}{\pi}\big)$$
valószínűségre a Bernstein-egyenlőtlenség felhasználásával.

7.109. (Lásd 3.59. feladat) Legyen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *háromszor* folytonosan differenciálható függvény. Határozzuk meg a következő határértéket:

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left\{ f\big((x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n\big) - f\big(1/2\big) \right\} dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

7.110. *(A Bernstein-egyenlőtlenség aszimptotikus élessége)* Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ f.a.e., $\mathbf{P}(X_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Legyen $Y_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$.

(a) Adjon felső becslést $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|Y_n| \geq \lambda)$ értékére a Bernstein-egyenlőtlenség segítségével.

(b) Az 7.100. feladat megoldásához hasonlóan lássa be, hogy $\mathbf{P}(|Y_n| \geq \lambda) \leq 2\exp(-n \cdot I(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}))$, ahol $I(x)$ a $BER(\frac{1}{2})$ változó nagy eltérés-rátafüggvénye. Adjon felső becslést $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|Y_n| \geq \lambda)$ értékére ezzel a módszerrel is. Segítség: a 7.106. feladat alapján könnyű kiszámítani a rátafüggvény második deriváltját $x = 0$-ban...

(c) A De Moivre-Laplace CHT és a 6.97. feladat elején szereplő becslés segítségével mutassa meg, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan λ_0, hogy $\lambda \geq \lambda_0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|Y_n| \geq \lambda) \geq 2\exp\big(-(1+\varepsilon)\cdot\frac{\lambda^2}{2}\big)$$

7.3. Mértékcsere memo

Legyen $(\Omega, \mathcal{F})$ egy mérhető tér, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ egy mérhető függvény, $\mathbf{P}_1$ és $\mathbf{P}_2$ pedig két valószínűségi mérték ezen a mérhető téren. Ekkor X eloszlása különbözhet a két különböző mértékre nézve! Tehát tulajdonképp jobb ha úgy gondolunk rá, hogy nem is ugyanarról a valószínűségi változóról van szó! Pl. lehetséges, hogy

$$\mathbf{E}_1(X) := \int_\Omega X(\omega) d\mathbf{P}_1(\omega) \neq \int_\Omega X(\omega) d\mathbf{P}_2(\omega) = \mathbf{E}_2(X)$$

Miért is érdekes az ilyesmi? Pl. statisztikában: jön egy mérés a való világból (ez az $X(\omega)$ valamilyen $\omega \in \Omega$-ra), de a valódi valószínűséget nem ismerjük, van viszont kétféle hipotézisünk arról, hogy milyen lehet: ez a $\mathbf{P}_1$ és a $\mathbf{P}_2$. Mindkét valószínűségi mérték segítségével kiszámolunk ezt-azt, és utána eldöntjük, h melyik hipotézist szeretjük jobban.

Definíció: A $\mathbf{P}_2$ mérték abszolút folytonos a $\mathbf{P}_1$ mértékre nézve, ha

$$\forall A \in \mathcal{F} : \mathbf{P}_1(A) = 0 \implies \mathbf{P}_2(A) = 0$$

Radon-Nikodym-tétel: Ha $\mathbf{P}_2$ abszolút folytonos a $\mathbf{P}_1$-re nézve, akkor (és csak akkor) létezik sűrűségfüggvénye, vagy más néven Radon-Nikodym-féle derivátja: van egy olyan ($\mathbf{P}_1$-majdnem mindenütt egyenlőség erejéig egyértelműen meghatározott) $\mathcal{F}$-mérhető $f : \Omega \to R$ függvény, hogy minden $A \in \mathcal{F}$-re amire

$$\mathbf{P}_2(A) = \mathbf{E}_2(\mathbb{1}[A]) = \int_A 1 d\mathbf{P}_2(\omega) = \int_A f(\omega) d\mathbf{P}_1(\omega) = \mathbf{E}_1(f \cdot \mathbb{1}[A])$$

És természetesen teljesül a sűrűségfüggvényektől elvárható $f \geq 0$ és $\int_\Omega f(\omega) d\mathbf{P}_1(\omega) = \mathbf{E}_1(f) = 1$. Pontosan ezek a tulajdonságok kellenek ahhoz, hogy f valószínűségi sűrűségfüggvény legyen a $\mathbf{P}_1$-re nézve, azaz ahhoz, hogy $\mathbf{P}_2(A) := \int_A f(\omega) d\mathbf{P}_1(\omega)$ tényleg valószínűségi mérték legyen. Jelölés: $f(\omega) = \frac{d\mathbf{P}_2}{d\mathbf{P}_1}(\omega)$
Az előbbi feltételek mellett $\mathbf{P}_1$ akkor és csak akkor abszolút folytonos a $\mathbf{P}_2$-re nézve, ha a sűrűségfüggvény $\mathbf{P}_1$-majdnem mindenütt pozitív, azaz $\mathbf{P}_1(f = 0) = 0$, és ekkor a $\mathbf{P}_1$-nek a $\mathbf{P}_2$-re vonatkozó sűrűségfüggvénye $\frac{1}{f}$. Jelölésben: $\frac{d\mathbf{P}_2}{d\mathbf{P}_1} \cdot \frac{d\mathbf{P}_1}{d\mathbf{P}_2} \equiv 1$. Általánosabban: $\frac{d\mathbf{P}_2}{d\mathbf{P}_1} \cdot \frac{d\mathbf{P}_3}{d\mathbf{P}_2} = \frac{d\mathbf{P}_3}{d\mathbf{P}_1}$.

Várható érték számolása: $\mathbf{E}_2(Y) = \mathbf{E}_1(Yf)$

Nagy eltérés-elméletben (és statisztikában is) sokszor használjuk a következő mértékcserét: $\mathbf{P}$ az eredeti valószínűségi mérték, X egy valószínűségi változó, és $\mathbf{P}_\lambda$ az a torzított valószínűségi mérték, amire $\frac{d\mathbf{P}_\lambda}{d\mathbf{P}}(\omega) = \frac{e^{\lambda X(\omega)}}{Z(\lambda)}$, ahol $Z(\lambda)$ az a szám, amivel le kell osztanunk, hogy sűrűségfüggvényt kapjunk: $Z(\lambda) = \mathbf{E}(e^{\lambda X})$. Ha F jelöli az X eloszlásfüggvényét a $\mathbf{P}$ szerint (azaz ha tetszőleges B Borel-halmazra

$\mathbf{P}(X \in B) = \int_B 1 dF(x))$ és F_λ jelöli a X eloszlásfüggvényét a $\mathbf{P}_\lambda$ szerint, akkor az $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mérhető téren F és F_λ két valószínűségi mértéket határoz meg, és az F_λ sűrűségfüggvénye az F-re vonatkozóan $\frac{dF_\lambda}{dF}(x) = \frac{e^{\lambda x}}{Z(\lambda)}$.

Némileg zavaros jelölés: azt mondjuk, hogy $X^{(\lambda)}$ torzított valószínűsági változó legyen olyan, hogy az eloszlásfüggvénye legyen F_λ, legyen továbbá $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ekkor amit zavarosan $\mathbf{E}(\varphi(X^{(\lambda)}))$ -val jelölünk, az tulajdonképp

$$\mathbf{E}_\lambda(\varphi(X)) = \mathbf{E}(\varphi(X)\frac{d\mathbf{P}_\lambda}{d\mathbf{P}}) = \mathbf{E}(\varphi(X)\frac{e^{\lambda X}}{Z(\lambda)}) = \frac{1}{Z(\lambda)}\int_\Omega \varphi(X(\omega))e^{\lambda X(\omega)}d\mathbf{P}(\omega) = \frac{1}{Z(\lambda)}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{\lambda x}dF(x)$$

7.4. Cramér-tétel

7.111. Mértékcsere avagy exponenciális torzítás:

Legyen X egy valószínűségi változó, legyen az eloszlásfüggvénye F. Az F eloszlás által generált exponenciális eloszláscsalád tagjai: Legyen $\mu \in \mathcal{D}(\hat{I})$, és legyen $Z(\mu) = \mathbf{E}(e^{\mu X}) = \exp(\hat{I}(\mu))$, és legyen

$$F_\mu(x) = \frac{\mathbf{E}(e^{\mu X}\mathbb{1}[X < x])}{Z(\mu)}$$

(a) Lássa be, hogy F_μ tényleg eloszlásfüggvény. Ha X diszkrét eloszlású, adja meg az F_μ atomjainak súlyát, ha X abszolút folytonos eloszlású, adja meg az F_μ eloszlásfüggvényhez tartozó sűrűségfüggvényt, és általános eloszlások esetén pedig az F_μ eloszlüggvényhez tartozó mértéknek az $F = F_{\mu=1}$ mértékre vonatkozó Radon-Nikodym-féle deriváltját.

(b) Mutassa meg, hogy ${X^{(\mu)}}^{(\lambda)} \sim X^{(\mu+\lambda)}$

(c) Exponenciális torzítás és konvolúció kapcsolata: Lássa be (pl. diszkrét és abszolút folytonos esetben), hogy tetszőleges F és G eloszlásfüggvényekre

$$(F * G)_\mu = F_\mu * G_\mu$$

(d) Mi a $BIN(n, \frac{1}{2})$, $POI(1)$, $EXP(1)$, $GEO(\frac{1}{2})$, $N(0, 1)$ valószínűségi változók által generált exponenciális eloszláscsalád? (Segítség: a torzított valószínűségi változók is nevezetes eloszlásúak lesznek!)

(e) Fejezze ki az F_μ exponenciálisan torított eloszlás $\hat{I}_\mu$ logaritmikus monentumgeneráló függvényét $\hat{I}$ segítségével. Ha $Y \sim X^{(\mu)}$, akkor mi az összefüggés $Z_X(\mu)$ és $Z_Y(-\mu)$ között?

(f) Deriváltak: Adjon valószínűségszámítási jelentést $\hat{I}'(\lambda)$-nak és $\hat{I}''(\lambda)$-nak és lássa be ennek segítségével még egyszer, hogy $\hat{I}$ szigorúan konvex függvény (ha X nem elfajult).

7.112. Legyen X egy valószínűségi változó, jelölje $Z(\lambda)$ a momentumgeneráló függvényét, $X^{(\mu)}$ a μ-vel való exponenciális torzítottját, és legyen $Z_\mu(\lambda) = \mathbf{E}\big(\exp(\lambda X^{(\mu)})\big)$. Írjon föl azonosságot $Z(\lambda + \mu)$, $Z_\mu(\lambda)$ és $Z(\mu)$ között.

7.113. (a) Lássa be, hogy az X valószínűségi változó által generált exponenciális eloszláscsalád egyértelműen paraméterezhető az eloszlások várható értékeinek segítségével is.

(b) Legyen $[a, b]$ a legszűkebb intervallum , amire $\mathbf{P}(X \in [a, b]) = 1$. Mutassa meg, hogy $a \neq b$ esetén az $\hat{I}'$ függvény értékkészlete az (a, b) nyílt intervallum.

Segítség: $\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\mathbf{P}(X^{(\lambda)} \geq b-\varepsilon)}{\mathbf{P}(X^{(\lambda)} \leq b-2\varepsilon)} = ?$

7.114. Legyenek $X_1, X_2, \ldots X_{100}$ függetlenek és azonos eloszlásúak, $\mathbf{P}(X_1 = 0) = \frac{3}{4}$ és $\mathbf{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{4}$. A Cramér-tétel bizonyítási módszereivel lássa be, hogy

$$\frac{1}{101}\frac{3^{50}}{4^{50}} < \mathbf{P}(S_{100} \geq 50) < \frac{3^{50}}{4^{50}}$$

Segítség: az alsó becsléshez használni kell, hogy a binomiális eloszlás unimodális.

7.115. *A butított Stirling-formula.* Ha a_n és b_n két pozitív tagú számsorozat, akkor azt mondjuk, hogy a_n és b_n exponenciálisan ekvivalensek, házi jelölésben $a_n \asymp b_n$, ha $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = 0$.

(a) Bizonyítsa be kézzel (tehát az "igazi" Stirling-formula felhasználása nélkül), hogy

$$n! \approx n^n e^{-n}$$

(b) Lássa be, hogy tetszőleges $p(n)$ polinomra $|p(n)| \approx 1$, és hogy $n^n \approx n^{n+1} \approx n^{n-1} \approx (n+1)^n \approx (n+1)^{n+1}$, stb.

(c) Lássa be, hogy ha $a_n \approx b_n$, akkor $\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\big(a_n c_n\big) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\big(b_n c_n\big)$.

7.116. (a) Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, p paraméterű indikátorváltozók (avagy Bernoulli-változók), azaz $\mathbf{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbf{P}(X_i = 0) = p$.

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log \mathbf{P}\big(\frac{S_n}{n} \in [-2,0]\big) =?$$

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log \mathbf{P}\big(\frac{S_n}{n} \in (-2,0)\big) =?$$

(b) Lássa be a butított Stirling-formula segítségével a Cramér-tételt független indikátorváltozók összegeire:

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log \mathbf{P}\big(S_n = \lfloor nx \rfloor\big) = I(x) = x \cdot \log(\frac{x}{p}) + (1-x)\cdot \log(\frac{1-x}{1-p}),$$

ahol $S_n \sim BIN(n,p)$.

(c) Vezesse le az előbbiből a rendőrelv segítségével, hogy $\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log \mathbf{P}\big(\frac{S_n}{n} \geq x\big) = I(x)$, ha $x \geq p$. Miért nem igaz a képlet $x < p$ esetén? Miért igaz és mit jelent a képlet $x = 2$ esetén?

(d) Ellenőrizze le, hogy $I(x)$ Legendre-transzformáltja valóban $\hat{I}(\lambda) = \log(q + pe^{\lambda})$, azaz a p paraméterű indikátorváltozó logaritmikus momentumgeneráló függvénye. Végezze el a függvényvizsgálatot, rajzolja fel $I(x)$ grafikonját. $I(0) =?$ $I(1) =?$ $I(2) =?$ $I(p) =?$ $I'(p) =?$ $I''(p) =?$ Mi a valószínűségszámítási jelentése ezeknek?

7.117. Ha $X \sim N(0,1)$, akkor $\mathbf{P}\Big(X > x\Big) \approx e^{-\frac{x^2}{2}}$, lásd a 6.97 feladat eleji alsó és felső becslést. Ezen formula segítségével bizonyítsa direkt módon a Cramér-tételt az $X_i \sim N(0,1)$ speciális esetben, azaz mutassa meg, hogy

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log \mathbf{P}(\frac{S_n}{n} \in [a,b]) = \inf_{x\in[a,b]} \frac{x^2}{2}$$

7.118. Legyen a a legnagyobb olyan szám, amire $\mathbf{P}(a \leq X) = 1$. Mutassa meg, hogy

$$\mathbf{P}(X = a) = 0 \iff \lim_{x\to a_-} I(x) = +\infty$$

Mivel egyenlő $I(a)$, ha $\mathbf{P}(X = a) > 0$?

7.119. *Laplace-lemma*: Legyen $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan folytonos és alulról korlátos függvény, amire teljesül $\int e^{-J(x)}dx < +\infty$. Lássa be a rendőrelv segítségével, hogy ekkor

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log\Big(\int e^{-nJ(x)}dx\Big) = \inf_x J(x)$$

Segítség: Hajtson végre mértékcserét: legyen egy új valószínűségi mérték sűrűségfüggvénye $\frac{e^{-J(x)}}{\int e^{-J(y)}dy}$. Írja át az integrálokat várható érték alakba.

7.120. Legyen X olyan, hogy valamilyen $\lambda_0 > 0$-ra teljesül $\mathbf{E}(e^{\lambda_0|X|}) < +\infty$. Vezesse le a Borel-Cantelli-lemma segítségével a Cramér-tételből a nagy számok erős törvényét olyan $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változókra, amelyek függetlenek és X-el azonos eloszlásúak!

7.121. A Cramér tétel állításának heurisztikus megfogalmazása: Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ függetlenek és azonos eloszlásúak F eloszlásfüggvénnyel, és legyen $I(x)$ az X_1 logaritmikus momentumgeneráló függvényének Legendre-transzformáltja (azaz X_1 rátafüggvénye) . Ekkor $1 \ll n$ esetén

$$\mathbf{P}(\frac{S_n}{n} \approx x) \approx e^{-nI(x)}$$

Az exponenciális torzítás heurisztikus jelentése: legyen X eloszlásfüggvénye F, $X^{(\mu)}$ eloszlásfüggvénye pedig F_μ. Ekkor

$$\mathbf{P}(X^{(\mu)} \approx x) = \mathbf{P}(X \approx x) \cdot e^{\mu x - \hat{I}(\mu)}$$

(a) Adjon heurisztikus magyarázatot $I(\mathbf{E}(X_1))$ értékére!

(b) Lássa be a heurisztikus érvelések segítségével is és precízen (azaz a torzított valószínűségi változó logaritmikus momentumgeneráló függvényének Legendre-transzformálásával és a Jolly-Joker képlettel) is, hogy $X^{(\mu)}$ rátafüggvénye $I(x) - \mu x + \hat{I}(\mu)$.

(c) Vezesse le heurisztikus érveléssel és számolja ki precízen is az $Y = aX + b$ lineárisan transzformált valószínűségi változó rátafüggvényét. Ha f_n jelöli $\sum_{k=1}^n \frac{X_k}{n}$ sűrűségfüggvényét és g_n jelöli $\sum_{k=1}^n \frac{Y_k}{n}$ sűrűségfüggvényét, akkor kapott képlet miben és miért különbözik az $g_n(y) = \frac{1}{a} \cdot f_n(\frac{y-b}{a})$ sűrűségfüggvény-transzformációs képlettől?

(d) Lássa be heurisztikus érvelésekkel és precízen is, hogy fix k-ra $\frac{S_k}{k}$ rátafüggvénye $kI(x)$.

(e) A rátafüggvény milyen tulajdonsága olvasható ki a

$$\mathbf{P}(S_{2n} \approx n \cdot x_1 + n \cdot x_2) \geq \mathbf{P}(S_n \approx n \cdot x_1) \cdot \mathbf{P}(S_{2n} - S_n \approx n \cdot x_2)$$

egyenlőtlenségből?

(f) Számítsa ki heurisztikusan a Laplace-lemma segítségével, valamint precízen is a következő limesz értékét:

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \mathbf{E}(e^{\lambda S_n})$$

(g) Legyenek $Y_1, Y_2, \ldots$ az $X_1, X_2, \ldots$-tól és egymástól függetlenek és azonos eloszlásúak. Legyen $I_{X+Y}(x)$ az $X_1 + Y_1$ rátafüggvénye. Adja meg kétféleképp $I_{X+Y}(x)$ értékét: egyrészt számítsa ki $\hat{I}_X + \hat{I}_Y$ Legendre-transzformáltját, másrészt a Cramér tétel heurisztikus jelentése és a Laplace-lemma segítségével számítsa ki a következő határértéket:

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \left(\mathbf{P}(\frac{S_n^X + S_n^Y}{n} \approx x)\right)$$

7.122. Nagy eltérés-tétel felújítási folyamatokra:

(a) Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független és azonos eloszlású nemnegatív valószínűségi változók (felújítási idők). Legyen $T(0) = 0$, $T(n) = \sum_{i=1}^n X_i$ (az n-edik felújítási időpont), és $N(t) = \sup\{n : T(n) \leq t\}$ (a felújítások száma t-ig). Legyen I az X_1 rátafüggvénye és $m = \mathbf{E}(X_1)$. Fejezze ki I segítségével azt a J rátafüggvényt, amire $y_1 \leq \frac{1}{m} \leq y_2$ esetén

$$\lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t} \log \mathbf{P}\big(\frac{N(t)}{t} \leq y_1\big) = J(y_1) \quad \text{és} \quad \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t} \log \mathbf{P}\big(\frac{N(t)}{t} \geq y_2\big) = J(y_2)$$

(b) Ellenőrizze, hogy a kapott formulát kielégítik az $EXP(\mu)$ eloszlás I, valamint a $POI(\mu)$ eloszlás J rátafüggvényei. Mi a valószínűségszámítási jelentése ennek az azonosságnak?

(c) Milyen azonosság teljesül a binomiális és geometriai eloszlás rátafüggvényeire? (Lényeges, h az "optimista" és "pesszimista" geometriai közül melyiket tekintjük!)

7.123. Legyen X eloszlása $POI(100)$. Körülbelül hány nullával kezdődik $\mathbf{P}(X \geq 272)$? Számolja ki többféleképp és hasonlítsa össze az eredményt:

(a) Becsülje a valószínűséget alulról-felülről úgy, hogy használja a $\frac{\mathbf{P}(X=n+1)}{\mathbf{P}(X=n)} = \frac{100}{n+1}$ összefüggést és a Striling-formulát:

$$1 < \frac{n!}{\sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n}} < e^{\frac{1}{12n}}$$

(b) Használja a Cramér-tétel heurisztikus becslését! Mikor kap jobb becslést, ha 100 darab független $POI(1)$ eloszlású valószínűségi változó összegeként írja fel X-et, vagy ha 50 darab $POI(2)$ eloszlású összegeként?

(c) Adjon precíz alsó-felső becslést a Cramér-tétel bizonyítási módszereivel (felső becslés Turbo Markovval, alsó becslés mértékcserével és a Poisson eloszlás unimodális tulajdonságának felhasználásával).

8. Karakterisztikus függvények

8.124. Valószínűségeloszlások karakterisztikus függvényei-e az alábbi függvények?

$$(a)\quad \frac{1}{1+t^2}, \qquad (b)\quad \exp(-t^4), \qquad (c)\quad \sin t,$$

$$(d)\quad \cos t, \qquad (e)\quad \frac{1+\cos t}{2}.$$

8.125. Bizonyítsa be a dominált konvergencia-tétel segítségével, hogy ha $\mathbf{E}(|X|) < \infty$, akkor X karakterisztikus függvénye differenciálható 0-ban, és a derivált értéke $i\mathbf{E}(X)$.

8.126. *(A Laplace-eloszlás)*

(a) Legyen $X_1, X_2 \sim EXP(\lambda)$ függetlenek, és Y tőlük független, $\mathbf{P}(Y = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Lássa be, hogy $X_1 - X_2$ és $Y \cdot X_1$ eloszlása azonos, ún. Laplace-eloszlású.

(b) Az inverz Fourier transzformáció tulajdonságainak felhasználásával, újabb integrálás nélkül határozza meg a Cauchy eloszlás karakterisztikus függvényét.

8.127. Az X valószínűség változó sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{\pi \cosh(x)}$. Számoljuk ki X karakterisztikus függvényét. Segítség: írjuk fel a sűrűséget a következő alakban:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k e^{-(2k+1)|x|}$$

8.128. Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Útmutatás: Integráljuk az e^{iz}/z komplex függvényt az ε és T sugarú felső félkörök és az ezeket összekötő valós szakaszok által képezett kontúron ....

8.129. Számoljuk ki az $E(a, b)$ egyenletes-, $N(m, \sigma)$ normális-, $EXP(\lambda)$ exponenciális- és a $CAU(0, 1)$ Cauchy eloszlások karakterisztikus függvényét.
Útmutatás: A CAU karakterisztikus függvényének számolásakor használjuk a reziduumtételt.

8.130. Legyen X egy szabályos dobókocka által mutatott szám, Y pedig X-től független, E(0, 1) eloszlású.

(a) Határozzuk meg X karakterisztikus függvényét.

(b) Határozzuk meg Y karakterisztikus függvényét.

(c) Határozzuk meg $X + Y$ karakterisztikus függvényét. Ebből olvassuk le mi $X + Y$ eloszlása.

(d) Határozzuk meg $X - Y$ karakterisztikus függvényét. Ebből olvassuk le mi $X - Y$ eloszlása.

8.131. Emlékeztetőül: $X \sim \text{Cauchy}(b,\, a)$ $(a > 0,\ b \in \mathbb{R})$, ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{a}{a^2 + (x-b)^2},$$

a standard eset az $a = 1,\ b = 0$. A standard Cauchy eloszlás karakterisztikus függvényét meghatároztuk: $\varphi_{\text{St.Cau}}(t) = e^{-|t|}$.

(a) Mutassuk meg, hogy Cauchy$(b,\, a)$ eloszlás a standard Cauchy eloszlás lineáris transzformáltjaként kapható.

(b) Az 131a) rész és $\varphi_{\text{St.Cau}}$ segítségével határozzuk meg a Cauchy$(b,\, a)$ eloszlás karakterisztikus függvényét.

(c) A karakterisztikus függvények segítségével ellenőrizzük, hogy egy Cauchy$(b_1,\, a_1)$ és egy tőle független Cauchy$(b_2,\, a_2)$ valószínűségi változó összegének eloszlása Cauchy$(b_1 + b_2,\, a_1 + a_2)$.

(d) Meg tudnánk-e ugyanezt csinálni momentumgeneráló függvényekkel? Miért?

(e) Eloszlás karakterisztikus függvénye-e a $t \mapsto e^{-(|t|+1)^2} \cdot e$ függvény?

8.132. Bizonyítsuk be, hogy két független és azonos eloszlású valószínűségi változó különbsége nem lehet $E(-1,1)$ eloszlású.
Útmutatás: Írjuk fel mindkettő karakterisztikus függvényét és lássuk be, hogy ezek nem lehetnek azonosak.

8.133. Legyen $f(x) = 1 - |x|$, ha $|x| \leq 1$ és $f(x) = 0$, ha $|x| > 1$. Határozzuk meg az f sűrűségfüggvényű eloszlás karakterisztikus függvényét, és fordítva: mutassunk olyan valószínűségi eloszlást, aminek f a karakterisztikus függvénye. Ha X karakterisztikus függvénye f, akkor $\mathbf{E}(|X|) =$?

8.134. (a) Legyenek $X_1, X_2, X_3, \ldots$ valószínűségi változók függetlenek és azonos $CAU(0,1)$ Cauchy eloszlásúak. Határozzuk meg az $Y_n := n^{-1}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ valószínűségi változó karakterisztikus függvényét.
(b) Mutassuk meg egy példával, hogy abból, hogy valószínűségi változók összegének karakterisztikus függvénye egyenlő a tagok karakterisztikus függvényeinek szorzatával, nem következik a tagok függetlensége.

8.135. Legyen $\varphi(t)$ egy tetszőleges eloszlás karakterisztikus függvénye. Bizonyítsuk be, hogy φ *pozitív definit* függvény, azaz tetszőleges $n \in \mathrm{N}$, $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ és $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ mellett

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \bar{c}_j \varphi(t_i - t_j) \geq 0.$$

Útmutatás: Írjuk fel a szummát, mint egy *nem-negatív* kifejezés (valószínűségi változó) várható értékét.

8.136. Legyen $\varphi(t)$ egy tetszőleges eloszlás karakterisztikus függvénye. Bizonyítsuk be, hogy $\psi(t) := 1/(2-\varphi(t))$ is karakterisztikus függvény.

8.137. Magyarázzuk a karakterisztikus függvények segítségével a

$$\frac{\sin t}{t} = \frac{\sin t/2}{t/2} \cos t/2$$

azonosságot.

8.138. Bizonyítsuk be valószínűségszámítási úton a

$$\frac{\sin t}{t} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{t}{2^k}$$

azonosságot.

8.139. (a) Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ f.a.e. $EXP(1)$ eloszlásúak, továbbá $Y_1, \ldots, Y_n$ függetlenek, $Y_k \sim EXP(k)$. Lássa be karakterisztikusfüggvény-módszerrel, hogy $M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\} \sim Y_1 + \cdots + Y_n$. Segítség: azt kell belátni, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{it}{k}} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{it}{k}\right)^{-1}$$

(b) Lássa be, hogy $M_n - \log(n)$-nek van határeloszlása, ahogy $n \to \infty$. (A határeloszlást *Gumbel*-eloszlásnak nevezik).

(c) Számítsa ki a Gumbel-eloszlás momentumgeneráló függvényét.

(d) Legyen $Z_n = Y_n - \frac{1}{n}$. Lássa be a Kolmogorov-lemma segítségével, hogy a $Z = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ összeg jól definiált. Milyen eloszlású Z?

(e) Lássa be valószínűségszámítási módszerrel az ú.n. Weierstrass-azonosságot:

$$\Gamma(z+1) = e^{-\gamma \cdot z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} \cdot e^{\frac{z}{n}}$$

ahol $\Gamma(z)$ a gamma-függvény, γ az Euler-konstans: $\gamma = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log(n)$

8.1. Mértékek gyenge konvergenciája, Határeloszlás-tételek

8.140. Bizonyítsuk be a NSZGYT-t a karakterisztikus függvények módszerével.

8.141. Bizonyítsuk be, hogy ha az F_n, F, G_n, G eloszlásokra $F_n \Rightarrow F$ és $G_n \Rightarrow G$, akkor $F_n * G_n \Rightarrow F * G$.

8.142. Igazoljuk, hogy ha $X_n \Rightarrow X$, $a_n \to a$, $b_n \to b$, akkor $a_n X_n + b_n \Rightarrow aX + b$.

8.143. Mutassuk meg a karakterisztikus függvények módszerével, hogy $\mathrm{B}(n, p_n) \Rightarrow \mathrm{POI}(\lambda)$ ahogy $n \to \infty$, ha $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$.

8.144. Legyen $X_p \sim GEO(p)$. Lássa be karakterisztikusfüggvény-módszerrel, hogy $p \cdot X_p$ határeloszlása $EXP(1)$, ahogy $p \to 0_+$

8.145. Egy kísérlet kimenetelei legyenek az A,B és C események.

$$\mathbf{P}(A) = p, \qquad \mathbf{P}(B) = q, \qquad \mathbf{P}(C) = r; \qquad p + q + r = 1.$$

Végezzük el a kísérletet n-szer egymástól függetlenül. Jelöljük ν_n-nel, ill. μ_n-nel az A, ill. B esemény gyakoriságát. Milyen eloszláshoz tart a $\frac{\nu_n - np}{\sqrt{n}}$ és $\frac{\mu_n - np}{\sqrt{n}}$ valószínűségi változók együttes eloszlása?

8.146. (a) Mutassuk meg, hogy $F_n \Rightarrow F$-ből következik, hogy a ψ_n karakterisztikus függvények egyenlő mértékben egyenletesen folytonosak, azaz $\forall \varepsilon > 0$-ra $\exists \delta > 0$, hogy $\forall n$-re $|\psi_n(s) - \psi_n(t)| < \varepsilon$, hacsak $|s - t| < \delta$.

(b) Mutassuk meg, hogy $F_n \Rightarrow F$-ból következik, hogy $\psi_n(t) \to \psi(t)$ kompakt halmazokon egyenletesen.

(c) Igazoljuk, hogy a konvergencia nem szükségszerűen egyenletes $\mathbb{R}$-en.

8.147. Legyenek az $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változók függetlenek, a következő eloszlásokkal $\mathbf{P}\big(X_i = 0\big) = q_i$, $\mathbf{P}\big(X_i = 1\big) = p_i$, $p_i + q_i = 1$. Legyen $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Tegyük fel hogy $\sum_{i=1}^{\infty} p_i q_i = \infty$. Bizonyítsunk NSZGYT-t és CHT-t az S_n valószínűségi változó sorozatra.

8.148. Legyenek $X_1, X_2, X_3, \ldots$ független, $\mathrm{E}(0,1)$ eloszlású valószínűségi változók. Bizonyítsuk be, hogy ha $n \to \infty$, akkor

$$Y_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} kX_k - \frac{n^2}{4}}{\frac{1}{6} n^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow N(0,1)$$

8.149. Ebben a feladatban $\sqrt{z}$ azt a komplex analitikus függvényt jelöli, ami a negatív valós számokon kívül minden komplex számra értelmezve van a következő módon: $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ esetén $\arg(\sqrt{z}) = \frac{1}{2}\arg(z)$ és $|\sqrt{z}| = \sqrt{|z|}$, az $\mathrm{Im}(z) \leq 0$ tartományra pedig a $\sqrt{\bar{z}} = \overline{\sqrt{z}}$ azonosság segítségével terjesztjük ki. Ekkor persze $z \geq 0 \implies \sqrt{z} \geq 0$, $\sqrt{1} = 1$, és $|z - 1| \leq 1$ esetén a $\sqrt{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} (z-1)^k$ Taylor-sorfejtés érvényes.

Legyen $T(n)$ az a véletlen időpont, amikor a 0-ból indított egyszerű, szimmetrikus bolyongás n-edszerre tér vissza 0-ba.

(a) Számitsa ki $T(n)$ karakterisztikus függvényét.

(b) Lássa be karakterisztikusfüggvény-módszerrel, hogy $n \to \infty$ esetén $\frac{T(n)}{n^2}$ eloszlásban konvergál egy olyan határeloszláshoz, aminek a karakterisztikus függvénye $\exp(-\sqrt{-2it})$. Segítség:

$$\lim_{n\to\infty} (1 - a_n)^n = e^{-z}, \text{ ha } \lim_{n\to\infty} n \cdot a_n = z$$

8.150. (a) Legyen X valószínűségi változó eloszlása az előző feladatban kapott határeloszlás. Legyen $a > 0$ esetén aX eloszlásfüggvénye F_a. Lássa be, hogy X eloszlása *stabilis*, azaz minden $a > 0$-hoz es $b > 0$-hoz van olyan $c > 0$, hogy $F_a * F_b = F_c$. Fejezze ki c értékét a es b segítségével. (Kétféle bizonyítás is adható: karakterisztikus függvényes és határeloszlás-tételes)

(b) Milyen más stabilis eloszlásokról tanult a félév során? Mi a közös a karakterisztikus függvényeikben? Ott hogyan fejezhető ki a és b segítségével c?

8.151. Lássa be, hogy

$$\mathbf{P}(|X| > K) \leq K \int_0^{\frac{2}{K}} \big(1 - \mathrm{Re}(\varphi(t))\big) dt$$

Ennek segítségével lássa be, hogy a 8.149. feladatban kapott határeloszlásra $\mathbf{P}(|X| > K) \leq C \cdot K^{-\frac{1}{2}}$.

8.152. *(CHT felújítási folyamatokra)* Legyenek $\tau_1, \tau_2, \dots$ egymásutáni események közötti független és azonos eloszlású várakozási idők, melyeknek várható értéke $\mathbf{E}\big(\tau_i\big) = m \in (0, \infty)$ és szórásnégyzete $\mathbf{Var}\big(\tau_i\big) = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Legyen $\nu_t := \max\{n : \sum_{i=1}^n \tau_i < t\}$ a $[0, t)$ időintervallumban bekövetkezett események száma. A CHT felhasználásánal bizonyítandó a következő határeloszlás tétel:

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{P} \left(\frac{\nu_t - \frac{t}{m}}{\sigma \sqrt{\frac{t}{m^3}}} < x \right) = \Phi(x).$$

ahol Φ az $N(0, 1)$ eloszlás eloszlásfüggvénye.

8.153. Egy szabályos érmével végzünk egymás utáni dobásokat mindaddig, amíg a dobások eredményeinek sorzatában mind a fej-, mind pedig az irásdobások száma el nem éri az n számot. Jelölje ν_n a szükséges dobások számát. Meghatározandó a $\big(\nu_n - 2n\big)/\sqrt{2n}$ valószínűségi változó határeloszlása, amint $n \to \infty$. Segítség: bizonyítás közben használhatjuk a CHT-t.