Sztochasztikus folyamatok feladatsor

2014. szeptember 8.

Tartalomjegyzék

Némelyik nehezebb feladathoz van megoldás(ötlet) a legutolsó fejezetben!

1. Diszkrét idejű Markov láncok

1.1. Elérési idők várható értékei, elérési valószínűségek

Ezeknek a feladatoknak a megoldásához igazából nem kell sokat tudni Markov láncokról, szerintem mehet azelőtt is, hogy a Markov lánc definícója elhangozna előadáson. Sok az átfedés a 1.9. alfejezettel.

1.1. Tekintsük az origóból indított egyszerű, szimmetrikus bolyongást. Legyenek a és b pozitív egészek. Az origótól bal felé b lépésnyire van egy gödör és jobb fele a lépésnyire van egy másik gödör. A bolyongó előbb-utóbb bele fog esni valamelyik gödörbe.

(a) Mekkora valószínűséggel fog a bal szélső gödörbe esni a bolyongó?

(b) Várhatóan hány lépést tesz a bolyongó, amíg gödörbe esik?

1.2. Tekintsük az egyszerű, szimmetrikus bolyongást az egész számok halmazán. -100-nál és 100-nál van egy-egy gödör. Ha a bolyongó az origóból indul, várhatóan hányszor jár 50-ben, mielőtt gödörbe esik?

1.3. Az egyszerű, aszimmetrikus bolyongás olyan, hogy a bolyongó p valószínűséggel jobbra lép egyet, $1-p$ valószínűséggel pedig balra lép egyet. A bolyongást az origóból indítjuk. Tegyük fel, hogy $p > \frac{1}{2}$. Jelölje $a > 0$, $b > 0$ pozitív egészekre $\mathbf{P}_{a,b}$ annak a valószínűséget, hogy a bolyongó előbb éri el az a koordinátájú pontot a $-b$ koordinátájú pontnál.

(a) Számítsa ki $\mathbf{P}_{a,b}$ értékét.

(b) Milyen esemény valószínűségét adja meg $\mathbf{P}_{\infty,b} := \lim_{a\to\infty} \mathbf{P}_{a,b}$? Segítség: Használja a monoton osztálytételt (avagy más néven a mérték folytonosságát) és a nagy számok erős törvényét!

1.4. Egy szabályos érmét dobálok. Várhatóan hányszor kell feldobnom az érmét, hogy FFF-et lássak? És hogy FIF-et lássak?

Segítség: érdemes egy nyolc állapotú állapotteret felrajzolni. (A harmadik érmedobás után van csak értelme állapotokról beszélni). Használjon Maple-t vagy Mathematica-t az adódó egyenletrendszer megoldására.

1.5. Egy bűvésznek van három cilindere és két nyula. Eredetileg az első kalapban van mindkét nyúl. A bűvész időnként belenyúl egy egyenletesen választott kalapba, és ha ott van nyúl, akkor megragadja (az egyiket), és átteszi a másik két kalap valamelyikébe (ismét egyenletesen választ). Mekkora valószínűséggel éri el előbb azt az állapotot, amikor a második kalapban két nyúl van, mint azt, amikor a második és harmadik kalapban egy-egy nyúl van? Szabad Maple-t vagy Mathematica-t használni a megoldáshoz (de a megoldandó egyenletredszer mátrixos alakját le kell írni).

1.6. Tekintsünk egy egyszerű bolyongást azon a gráfon aminek a csúcsai A, B, C, D, E és élei: AB, AC, BC, CD, BD, BE, DE

(a) Tegyük fel, hogy a bolyongó az A csúcsból indul. Mennyi a C csúcs első eléréséig megtett lépések számának várható értéke?

(b) Tegyük fel, hogy a bolyongó a C csúcsból indul. Mennyi az első visszatérésig megtett lépések számának várható értéke?

(c) Tegyük fel, hogy a bolyongó az A csúcsból indul. Várhatóan hányszor jár E-ben mielőtt először elérné a C csúcsot?

(d) Tegyük fel, hogy a bolyongó a B csúcsból indul. Mennyi annak a valószínűsége, hogy előbb éri el az A csúcsot, mint a C csúcsot?

1.7. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ egymásutáni kockadobások számszerű eredményei és $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Legyen

$$T_1 = \min\{n \geq 1 : S_n \text{ osztható 7-tel}\},$$
$$T_2 = \min\{n \geq 1 : S_n - 1 \text{ osztható 7-tel}\}.$$

Számoljuk ki $\mathbf{E}(T_1)$-et és $\mathbf{E}(T_2)$-t.

1.2. A Markov-tulajdonság

1.8. Kovácsék naponta olvassák az újságot, majd a szoba sarkában lévő újságkupac tetejére teszik a kiolvasott példányt. Esténként 1/3 valószínűséggel, valamelyik családtag fogja a teljes újságkupacot és kidobja a szemétbe. Valahányszor öt újság gyűlik fel a kupacban, Kovács úr fogja magát és kidobja a kupacot (1 valószínűséggel). Tekintsük esténként (tehát az esetleges selejtezés után) a kupacban lévő újságok számát.

(a) Ésszerű-e Markov lánccal modellezni a folyamatot? Ha igen, azonosítsuk a Markov lánc állapotterét és írjuk fel az átmenetvalószínűségek mátrixát.

(b) Vasárnap este üres volt az újságkupac. Mekkora valószínűséggel lesz csütörtök este pontosan egy újság a kupacban? Számítsa ki esetszétválasztással és mátrix hatványozással is.

1.9. Írjuk le egy olyan elágazó folyamat átmenet mátrixát, amelyben az egyes egyedek leszármazottainak száma geometriai eloszlású. (E Markov lánc állapottere nem véges, hanem megszámlálható végtelen — no de sebaj!)

1.10. Tekintsünk egy Markov láncot a $\{0, 1\}$ kételemű állapottéren, melynek átmenet mátrixa

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Feltéve, hogy a lánc a kezdeti $n = 0$ időpontban a 0 állapotból indul, mennyi annak a valószínűsége, hogy $n = 3$ időpontban azz 1 állapotban lesz?

1.11. *Bernoulli-Laplace urnamodell keverésre*
Két urnában vannak golyóink: N darab mindkettőben. A golyók közül N kék és N piros. A golyókat a következő képpen keverjük: időegységenként kiválasztunk véletlenszerűen egy-egy golyót mindkét urnából és a kettőt kicseréljük. (Az egyes urnákban lévő golyók száma nem változik, de a színek eloszlása igen.) Írjuk le a folyamat S állapotterét és P átmenet mátrixát.

1.12. *Markov-lánc kontrakció*

(a) Az X_t diszkrét idejű Markov lánc állapotainak halmaza $S = \{1, 2, 3\}$, átmenetmátrixa pedig

$$P = \begin{pmatrix} 3/7 & 3/7 & 1/7 \\ 1/11 & 2/11 & 8/11 \\ 1/11 & 3/11 & 7/11 \end{pmatrix}.$$

A kezdeti $t = 0$ időpillanatban a lánc állapotainak eloszlása tetszőleges μ_0. Legyen

$$Y_t = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad X_t = 1 \\ 2 & \text{ha} \quad X_t \neq 1. \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy az Y_t folyamat szintén Markov láncot alkot és számítsuk ki az átmenetmátrixát.

(b) Legyen $X_1, X_2, \dots$ homogén Markov-lánc az S véges állapottéren, P átmenetmátrixszal. Legyen $\varphi : S \to \hat{S}$, nem feltétlenül injektív leképezés. Fogalmazzon meg egyszerű feltételt P-re, hogy $Y_1, Y_2, \dots$ is Markov-lánc legyen, ahol $Y_i := \varphi(X_i)$. Adja meg az új Markov-lánc átmenetmátrixát.

(c) Legyen S az a $\binom{2n}{n}$-elemű halmaz, aminek az elemei a Bernoulli-Laplace urna lehetséges konfigurációi. Tekinsük ezen az állapottéren a B-L modell keverési modell dinamikáját. Legyen φ az a függvény, ami megmondja az első urnában levő piros golyók számát. Mutassuk meg, hogy teljesülnek a Markov-lánc kontrakció feltételei.

1.13. Legyen $X_1, X_2, \dots, X_n$ olyan valószínűségi változó-sorozat, amire $X_i \in S$, ahol S megszámlálható. Lássa be, hogy a következő három feltétel ekvivalens:

(a) $X_1, X_2, \dots, X_n$ Markov-lánc: Minden k-ra

$$\mathbf{P}(X_{k+1} = s_{k+1} | X_1 = s_1, \dots, X_k = s_k) = \mathbf{P}(X_{k+1} = s_{k+1} | X_k = s_k)$$

(b) Vannak olyan $P^1, \dots, P^{n-1}$ sztochasztikus mátrixok (a felső index itt nem hatványt jelöl!), amikre

$$\mathbf{P}(X_1 = s_1, \dots, X_k = s_k) = \mathbf{P}(X_1 = s_1) \prod_{i=1}^{k-1} P^i_{s_i, s_{i+1}}$$

(c) A jelen ismeretében múlt és jövő függetlenek, azaz minden k-ra és minden $M \subseteq S^{k-1}$, $J \subseteq S^{n-k}$ és $s_k \in S$ esetén

$$\mathbf{P}\big((X_1, \dots, X_{k-1}) \in M \text{ és } (X_{k+1}, \dots, X_n) \in J | X_k = s_k\big) = \\ \mathbf{P}\big((X_1, \dots, X_{k-1}) \in M | X_k = s_k\big)\mathbf{P}\big((X_{k+1}, \dots, X_n) \in J | X_k = s_k\big)$$

1.14. Legyen X_t, $t \in \mathrm{N}$, Markov lánc, melynek állapottere S véges halmaz. Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset S$ állapotok részhalmazai és $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ rögzített időpontok. Következik-e a Markov tulajdonságból, hogy

$$\mathbf{P}(X_{t_n} \in A_n | X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_{n-1}} \in A_{n-1}) = \mathbf{P}(X_{t_n} \in A_n | X_{t_{n-1}} \in A_{n-1})?$$

1.15. Legyen $X_0, X_1, \ldots, X_n$ homogén, véges állapotterű Markov-lánc μ_0 kezdeti eloszlással es P átmenetmátrixszal. Mutassuk meg, hogy a $Y_i = X_{n-i}$ megfordított folyamat is egy (nem feltétlenül homogén) Markov-lánc! Adjuk meg a kezdeti eloszlását és az átmenetmátrixokat (mátrixműveletek segítségével). Mutassuk meg, hogy az átmenetmátrixok valóban sztochasztikusak, azaz a sorösszegeik 1-et adnak.

1.16. Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$ egy nem feltétlenül homogén Markov lánc az S véges állapottéren. Legyen $x_{n+1} \in S$ az állapottér valamelyik állapota. Tegyük továbbá fel, hogy $\mathbf{P}(X_{n+1} = x_{n+1}) > 0$. Igaz-e, hogy az az $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ sztochasztikus folyamat is Markov lánc, aminek állapottere S, és aminek az eloszlását a következőképp definiáljuk: tetszőleges $A \subseteq S^n$-re

$$\mathbf{P}\big((Y_1, \ldots, Y_n) \in A\big) := \mathbf{P}\big((X_1, \ldots, X_n) \in A | X_{n+1} = x_{n+1}\big)$$

1.17. Legyen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata, melyeknek közös eloszlása $\mathbf{P}(\xi_j = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(\xi_j = 0)$. Legyen $X_n := \xi_n + \xi_{n+1} + \xi_{n+2}$. Markov lánc-e az X_n, $n \in \mathrm{N}$, valószínűségi változó sorozat?

1.18. A ξ_t, $t = 1, 2, \ldots$ valószínűségi változók legyenek függetlenek és azonos $\mathbf{P}(\xi_t = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(\xi_t = -1)$ eloszlásúak. Vizsgáljuk meg, hogy Markov láncot alkotnak-e a következő valószínűségi változó sorozatok:
(a) $X_t := \xi_t \xi_{t+1}$ (beugratós kérdés!);
(b) $Y_t := \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_t$;
(c) $Z_t := \Phi(\xi_t, \xi_{t+1})$, ahol $\Phi(-1,-1) = 1$, $\Phi(-1,1) = 2$, $\Phi(1,-1) = 3$, $\Phi(1,1) = 4$.
A Markov láncokra számítsuk ki az egy lépéses átmenetvalószínűség-mátrixokat.

1.19. Legyen $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata, $g : \mathbb{R} \to \{1, 2, \ldots, N\}$ és $f : \{1, 2, \ldots, N\} \times \mathbb{R} \to \{1, 2, \ldots, N\}$ rögzített (mérhető) függvények. Értelmezzük az X_t, $t = 0, 1, 2, \ldots$ folyamatot a következő képpen: $X_0 = g(\xi_0)$, $X_{t+1} = f(X_t, \xi_{t+1})$. Markov láncot alkot-e az X_t sorozat? Ha igen, számítsuk ki az átmenet-mátrixát (a ξ_t valószínűségi változók közös eloszlásának és az f és g függvények ismeretében).

1.20. Legyen X_n irreducibilis Markov lánc az $\{1, 2, \ldots, N\}$ állapottéren. Bizonyítsuk be, hogy léteznek $C < \infty$ és $\rho < 1$ konstansok, úgy, hogy bármely i és j állapotokra

$$\mathbf{P}\big(X_m \neq j, m = 0, 1, \ldots, n \big| X_0 = i\big) \le C\rho^n.$$

Mutassuk meg, hogy ebből következik $\mathbf{E}\big(T\big) < \infty$, ahol T a j állapot első elérésének ideje.
Útmutatás: Létezik $\delta > 0$, úgy, hogy bármely i és j állapotokra, annak a valószínűsége, hogy i-ből indulva az első N lépés során a Markov lánc eléri a j állapotot, nagyobb, mint δ. Miért?

1.21. (a) Legyen X nemnegatív egész értékű valószínűségi változó, melynek véges a második momentuma, azaz $\mathbf{E}(X^2) < \infty$. Fejezzük ki az $S := \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbf{P}(X \ge k)$ mennyiséget $\mathbf{E}(X)$ és $\mathbf{Var}(X)$ segítségével.
(b) Az 1.20. feladat jelöléseivel adjon felső becslést $\mathbf{E}(T^2)$-re!

1.3. Állapotok osztályozása, periodicitás

1.22. N urnába egymástól függetlenül, azonos valószínűséggel golyókat helyezünk el, sorban egymás után. Jelölje X_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ az n-edik golyó elhelyezése után üresen maradt urnák számát. Mutassuk meg, hogy az X_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ sorozat Markov láncot alkot. Számítsuk ki az átmenetvalószínűségek mátrixát és osztályozzuk az állapotokat.

1.23. Osztályozzuk az alábbi Markov láncok állapotait
(a)

$$S = \{1, 2, 3\}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$S = \{1,2,3,4\}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$S = \{1,2,3,4,5\}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(d)

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.24. Egy elemi számelméleti tétel szerint ha $m, n \in \mathrm{N}$ relatív prímek, akkor létezik $x, y \in \mathbb{Z}$ úgy, hogy

$$mx + ny = 1.$$

E tétel felhasználásával bizonyítsuk a következő állításokat:
(a) Ha $m, n \in \mathrm{N}$ relatív prímek, akkor az

$$\mathrm{N} \setminus \{mx + ny : x, y \in \mathrm{N}\}$$

halmaz véges.
(b) Legyen $J \subset \mathrm{N}$. Tegyük fel, hogy J zárt az összeadásra nézve (azaz $(x, y \in J) \Rightarrow (x + y \in J)$) és a J-beli számok legnagyobb közös osztója d. Ekkor a J halmaz csak végs sok kd, $k \in \mathrm{N}$ alakú számot nem tartalmaz.

1.25. Bizonyítandó, hogy azonos irreducibilis komponenshez tartozó állapotoknak azonos a periódusa.

1.4. Véges Markov láncok stacionárius eloszlása

1.26. Tekintsünk egy Markov láncot a $\{1, 2, 3\}$ háromelemű állapottéren, melynek átmenet mátrixa

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.6 & 0.0 & 0.4 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

Mennyi a valószínűsége annak, hogy a lánc *hosszú idő után* az 1 állapotban lesz? Oldják meg a feladatot két féle képpen:
(1) Kompjuter algebra (pl. Maple) segítségével írják fel a P mátrix P^n hatványait, $n = 2, 3, 4, 10, 20, 50, 100$ értékekre. Mit tapasztalnak?
(2) Számolják ki közvetlenül a Markov lánc stacionárius eloszlását.

1.27. Legyen X_n egy diszkrét S állapotterű Markov lánc, melynek átmenet mátrixa $(P_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta \in S}$ és kezdeti eloszlása: $\mathbf{P}(X_0 = \alpha) = \pi(\alpha)$. Bizonyítandó, hogy az X_t Markov lánc, mint sztochasztikus folyamat akkor és csak akkor stacionárius, ha $\sum_{\alpha \in S} \pi(\alpha) P_{\alpha,\beta} = \pi(\beta)$.

1.28. Az eső minden nap a többitől függetlenül, $\frac{1}{3}$ valószínűségggel esik, és ha esik, akkor pontosan délben esik. Egy öreg kertész akkor locsolja meg a kertjét, ha látja, hogy se ma délben, se tegnap, se tegnapelőtt nem érte víz (azaz locsolás vagy eső) a kertet. Várhatóan hányszor locsol egy évben?

1.29. Legyen $X_1, X_2, \ldots$ irreducibilis Markov lánc az S véges állapottéren. Lássa be, hogy $Y_i := (X_i, X_{i+1})$ is irreducibilis Markov lánc a $G = \{(x_1, x_2) : P_{x_1,x_2} > 0\}$ állapottéren. Mi az így származtatott Markov lánc átmenetmátrixa, stacionárius eloszlása?

1.30. A $P = (P_{i,j})_{i,j=1}^{N}$ sztochasztikus mátrixot *duplán sztochasztikusnak*, vagy *bisztochasztikusnak*, nevezzük, ha nem csak sorösszegei, hanem oszlop-összegei is egyenlőek 1-el. Legyen az X_t Markov lánc irreducibilis az $S = \{1, 2, \ldots, N\}$ állapot-halmazon és átmenetvalószínűségeinek mátrixa bisztochasztikus. Mutassuk meg, hogy az X_t Markov lánc stacionárius eloszlása egyenletes az S halmazon, és fordítva: ha a stacionárius eloszlás egyenletes, akkor az átmenetmátrix bisztochasztikus.

1.31. Legyen $X_1, X_2, \ldots$ homogén Markov-lánc az S véges állapottéren, P átmenetmátrixszal. Legyen $\varphi : S \to \hat{S}$, nem feltétlenül injektív leképezés. Azt mondjuk, hogy a Markov lánc kontrakció feltételei teljesülnek, ha tetszőleges $u, v \in \hat{S}$-ra és $x, z \in \varphi^{-1}(u)$-ra teljesül, hogy

$$\sum_{y \in \varphi^{-1}(v)} P_{x,y} = \sum_{y \in \varphi^{-1}(v)} P_{z,y}$$

Ekkor $Y_1, Y_2, \ldots$ is Markov-lánc , ahol $Y_i := \varphi(X_i)$, ezt kellett belátni a 1.12. feladatban. Az új Markov-lánc állapottere $\hat{S}$, átmenetmátrixa $\hat{P}_{u,v} = \sum_{y \in \varphi^{-1}(v)} P_{x,y}$, ahol x akármelyik $\varphi^{-1}(u)$-beli elem. Lássa be, hogy ha az eredeti Markov lánc irreducibilis, akkor az összehúzott Markov lánc is az, és fejezze ki $\hat{P}$ stacionárius eloszlását a P stacionárius eloszlásának segítségével.

1.32. Tekintsünk egy Markov láncot a $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ hatelemű állapottéren, melynek átmenet mátrixa

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.3 & 0.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.9 & 0.0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.0 & 0.0 & 0.25 & 0.25 \\ 0.0 & 0.0 & 0.7 & 0.0 & 0.3 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

Azonosítsuk a Markov lánc irreducibilis osztályait. Melyek ezek közül lényegesek és melyek a lényegtelenek? Tegyük fel, hogy a lánc $n = 0$ időpontban a 0 állapotból indul. Mennyi annak a valószínűsége, $n \gg 1$ (nagyon kései) időpontban a 0 állapotban lesz? Válaszoljuk mg ugyanezt a kérdést, ha feltesszük, hogy a Markov lánc $n = 0$-kor az 5 állapotból indul.

1.33. Tekintsük azt a Markov-láncot, aminek az állapottere $S = \{x, y, z\}$ és átmenet-mátrixa

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.6 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

(a) Határozza meg a stacionárius eloszlást!

(b) Az x-ből indított Markov-lánc várhatóan hányat lép, amíg y-ba ér? Határozza meg a megtett lépések számának eloszlását is mátrixműveletek segítségével!

(c) Az x-ből indított Markov-lánc várhatóan hányszor jár z-ben, mielőtt y-ba érne?

1.34. Tekintsünk egy Markov láncot az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ötelemű állapottéren, melynek átmenetmátrixa:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Irreducibilis-e a Markov lánc?
(b) Mennyi a periódusa a Markov láncnak?
(c) Számoljuk ki közelítőleg a $P_{2,1}^{(1000)}$, $P_{2,2}^{(1000)}$ és $P_{2,4}^{(1000)}$ ezer lépéses átmenet valószínűségeket.
(d) Tegyük fel, hogy a Markov lánc az 1 állapotból indul és jelöljük T-vel az 1-be való első visszatérés idejét. Számoljuk ki T eloszlását és várható értékét. Minden további számolás nélkül adjuk meg $\pi(1)$-et (heurisztikusan).
(e) Számoljuk ki az invariáns (stacionárius) eloszlást. Ennek ismeretében mondjuk meg (heurisztikusan), hogy mennyi az első visszatérés idejének várható értéke, feltéve, hogy a folyamat a 2 állapotból indult.

1.35. Legyen X_n, $n = 0, 1, 2, \dots$ irreducibilis Markov lánc a *véges* S állapottéren, melynek átmenetmátrixát jelöljük P-vel. Legyen

$$T := \min\{n > 0 : X_n = X_0\}$$

a kezdő állapotba való első visszatérés ideje. Tegyük fel, hogy a kezdeti állapot $X_0 = z$ és minden $y \in S$-re legyen

$$r(y) := \mathbf{E}\Big(\sum_{i=0}^{T-1} 1\!\!1_{\{X_i = y\}}\Big),$$

a kezdő állapotba való első visszatérés előtt az y állapotban töltött idő várható értéke. Vegyük észre, hogy ha $X_0 = z$, akkor $r(z) = 1$.

(a) Egy későbbi feladatban (a 4.180.-ban) be fogjuk látni az

$$\mathbf{E}\Big(\sum_{i=1}^{T} 1\!\!1_{\{X_i = y\}}\Big) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{T}\sum_{x \in S} 1\!\!1_{\{X_{i-1} = x\}} P_{x,y}\right)$$

azonosságot. Ennek a felhasználásával bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{x \in S} r(x) P_{x,y} = r(y),$$

azaz az $r(x)$ számokból képezett sorvektor az 1 sajátértékhez tartozó baloldali sajátvektora a Markov lánc P átmenetmátrixának.

(b) Lássa be a fentiekből, hogy a Markov lánc π stacionárius eloszlására és a z-ből indított Markov lánc T visszatérési idejére teljesül a $\mathbf{E}(T) = \frac{1}{\pi(z)}$ összefüggés. Ugyanezt lássa be heurisztikusan is a NSZT segítségével: számolja meg kétféleképpen, hogy $1 \ll n$ esetén $X_1, \dots, X_n$ közt körülbelül hányszor szerepel z.

1.36. Legyenek $X_1, X_2, \dots$ egymásutáni kockadobások számszerű eredményei és $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Legyen

$$T_1 = \min\{n \geq 1 : S_n \text{ osztható 8-cal}\},$$
$$T_2 = \min\{n \geq 1 : S_n - 1 \text{ osztható 8-cal}\}.$$

Számoljuk ki $\mathbf{E}\big(T_1\big)$-et és $\mathbf{E}\big(T_2\big)$-t.
Útmutatás: Tekintsük (S_n mod 8)-at mint Markov láncot $\{0, 1, 2, \dots, 7\}$-en.

1.37. *A felújítási paradoxon*

Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független és X-el azonos eloszlású, pozitív egész értékeket felvevő valószínűségi változók (ú.n. felújítási idők), és tegyük fel hogy $\mathbf{P}(X \leq M) = 1$ valamilyen $M \in$ N-re. Legyen $1 \leq x \leq M$-re $p_x := \mathbf{P}(X = x)$. $T_0 = 0$, $T_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$ (felújítási időpontok). Legyen α_n a legutóbbi felújítás óta eltelt idő az n időpontban, β_n pedig a következő felújítási időpontig hátralevő idő (és ha $n = T_k$ maga egy felújítási időpont, akkor legyen $\alpha_n = 0$, $\beta_n = X_{k+1}$). Legyen $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$ annak a felújítási intervallumnak a hossza, amibe n beleesik.

(a) Mutassa meg, hogy $Y_n := (\alpha_n, \beta_n)$ Markov láncot alkot. Milyen feltétel kell, hogy teljesüljön X eloszlására, hogy a Markov lánc aperiodikus legyen?

(b) Számítsa ki a Markov lánc stacionárius eloszlását: Jelöljük $\alpha_\infty, \beta_\infty, \gamma_\infty$-vel a stacionárius állapotban az eltelt, hátralevő és teljes időt. Lássa be, hogy $\pi(\alpha_\infty = x, \beta_\infty = y) = \frac{p_{x+y}}{\mathbf{E}(X)}$.

(c) Lássa be az előző részfeladat eredményéből, hogy $\mathbf{P}(\gamma_\infty = x) = \frac{x p_x}{\mathbf{E}(X)}$. Ezt hívják a felújítási idők eloszlásából vett hossz-torzított mintának. Az a felújítási paradoxon, hogy egy kései időpont felújítási intervallum-hosszának az eloszlása nem egyezik meg a felújítási intervallumok hosszának eloszlásával.

(d) Lássa be, hogy $\mathbf{E}(\gamma_\infty) > \mathbf{E}(X)$. Segítség: $\mathbf{E}(\gamma_\infty) - \mathbf{E}(X) = ?$

(e) A stacionárius állapotban mi $\mathbf{P}(\alpha_\infty = y | \gamma_\infty = x)$, azaz rögzített γ_∞ mellett mi az α_∞ feltételes eloszlása?

(f) Markov láncok bevezetése nélkül, heurisztikusan is kiszámítható, hogy $\mathbf{P}(\gamma_\infty = x) = \frac{xp_x}{\mathbf{E}(X)}$: legyen $1 \ll n$. A nagy számok törvénye segítségével saccolja meg, hogy körülbelül hány felújítás volt n-ig. Körülbelül hány volt ezek közül x hosszú? Mennyi az x hosszú intervallumok összhossza? Ha egyenletes eloszlással választok az $1, \dots, n$ időpontok közül, akkor a választott intervallum hossza kábé mekkora valószínűséggel lesz x?

1.38. Tekintsük az 1.8 feladatban leírt Markov láncot (Kovácsék ujságos kupaca ...).
(a) Hosszú idő után mennyi a kupacban lévő újságok számának várható értéke?
(b) Tegyük fel, hogy kezdetben 0 újság van a kupacban. Várhatóan hány nap múlva lesz újból üres a kupac?

1.39. Legyen X_n Markov lánc az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ötelemű állapottéren, melynek átmenetmátrixa:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 & 3/5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

(a) Irreducibilis-e a Markov lánc? Aperiodikus-e a Markov lánc?
(b) Határozzuk meg a Markov lánc stacionárius (invariáns) eloszlását.
(c) Tegyük fel, hogy $X_0 = 1$. Mennyi az 1 állapotba való első visszatérésig megtett lépések számának várható értéke?
(d) Újból tegyük fel, hogy $X_0 = 1$ Mennyi a 4 állapot első eléréséig megtett lépések számának várható értéke?
(e) Ugyancsak $X_0 = 1$ kezdeti feltétel mellett, mennyi annak a valószínűsége, hogy a folyamat előbb éri el az 5 állapotot, mint a 3-at?

1.40. Az X_t diszkrét idejű Markov lánc állapotainak halmaza $S = \{1, 2, 3\}$, átmenetvalószínűségeinek mátrixa P, stacionárius eloszlása π. Mutassuk meg, hogy ha $P_{1,1} = P_{2,2} = P_{3,3}$ és $\pi(1) = \pi(2) = \pi(3)$, akkor $P_{1,2} = P_{2,3} = P_{3,1}$ és $P_{1,3} = P_{3,2} = P_{2,1}$.

1.41. Legyen L páratlan szám. Tekintsünk egy olyan Markov láncot, aminek az állapottere a mod L maradékosztályok halmaza, és minden x álapotból $p_{x,x+1}$ valószínűséggel jobbra lép, $p_{x,x-1}$ valószínűséggel balra lép, és $p_{x,x}$ valószínűséggel helyben marad a bolyongó, $p_{x,x-1} + p_{x,x} + p_{x,x+1} = 1$. Mutassa meg, hogy ha minden x-re $p_{x,x}$ azonos, valamint a stacionárius eloszlás is egyenletes, akkor p_x is konstans és q_x is konstans.

Segítség: Először lássuk be, hogy van egy olyan w konstans, hogy minden x-re

$$\pi(x)p_{x,x+1} = \pi(x+1)p_{x+1,x} + w$$

1.42. Legyenek X_n és Y_n *független* Markov láncok a $\{0, 1, 2\}$ háromelemű állapottéren. Mindkét lánc átmenet mátrixa

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Tegyük fel, hogy $X_0 = 0$ és $Y_0 = 2$ és legyen

$$T = \inf\{n > 0 : X_n = Y_n\}$$

(a) Számoljuk ki $\mathbf{E}(T)$-t.
(b) Mennyi $\mathbf{P}(X_T = 2)$?
(c) Hosszú időn keresztül az idő hanyad részét tölti a két Markov lánc azonos állapotban?
Útmutatás: Tekintsük $Z_n = (X_n, Y_n)$-t mint Markov láncot a $\{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$ kilenc elemű állapottéren.

1.43. Aladár és Béla, két régi jóbarát nem tudják egymásról, hogy mindketten beiratkoztak a Műegyetemre. Aladár az X menzát szereti jobban, Béla az Y menzát, de mindketten szeretik a változatosságot. Ezért Aladár elhatározza, hogy az első nap az X menzába megy, majd ezután minden X menzás napot követő tanítási napon $1/2$ valószínűséggel az Y menzába megy, és $1/2$ valószínűséggel újra az X menzába megy, viszont minden Y menzás napot követő tanítási napon $3/4$ valószínűséggel az X menzába megy, és $1/4$ valószínűséggel újra az Y menzába megy. Béla pedig az Y menzával kezdi az első tanévet, és úgy tervezi, hogy minden Y menzás napot követő tanítási napon $1/2$ valószínűséggel az Y menzába megy, és $1/2$ valószínűséggel az X menzába, viszont minden X menzás napot követő tanítási napon $2/3$ valószínűséggel az Y menzába megy, és $1/3$ valószínűséggel az X menzába. Ehhez mindketten tartják is magukat egészen addig, amikor egy szép napon először mennek ugyanabba a menzába, ahol is találkoznak. Ettől kezdve minden nap megbeszélik, hogy a következő nap együtt mennek ebédelni, mégpedig (a demokrácia szabályait maximálisan szem előtt tartva) X menzás napot követően Y menzába mennek $7/12$ valószínűséggel és újra az X menzába $5/12$ valószínűséggel, illetve Y menzás nap után X menzába mennek $5/8$ valószínűséggel és újra Y-ba $3/8$ valószínűséggel.

(a) Várhatóan hanyadik tanítási napon találkoznak először?

(b) Mi a valószínűsége, hogy az X menzában látják meg egymást először?

(c) Hosszú tanulmányaik során közelítőleg ebédjeik hány százalékát fogják az X menzában elfogyasztani?

1.5. Reverzibilitás

1.44. Legyen X_n egy diszkrét S állapotterű Markov lánc, melynek átmenet mátrixa $(P_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in S}$ és kezdeti eloszlása: $\mathbf{P}(X_0 = \alpha) = \pi(\alpha)$. Mutassa meg, hogy stacionárius Markov lánc megfordítottja is stacionárius Markov lánc. Mi a megfordított Markov lánc átmenetmátrixa? Milyen összefüggést kell teljesítenie a Markov lánc stacionárius eloszlásának és átmenetmátrixának ahhoz, hogy a megfordított sztochasztikus folyamat ugyanolyan eloszlású legyen, mint az eredeti? Megj: az ilyen Markov láncokat *reverzibilisnek* nevezzük.

1.45. Ez a 1.29. feladat folytatása. Igaz-e hogy ha az eredeti Markov lánc reverzibilis, akkor a származtatott kétlépéses Markov lánc is reverzibilis?

1.46. Lássa be, hogy egy Markov lánc átmenetmátrixa akkor és csak akkor szimmetrikus, ha bisztochasztikus és reverzibilis.

1.47. Dobókockát azonos valószínűséggel és az előző mozgatásoktól függetlenül, diszkrét időegységenként átfordítjuk az egyik oldaláról a szomszédos négy oldal valamelyikére. Írjuk le a Markov lánc átmenetvalószínűségeinek mátrixát és találjuk meg a stacionárius eloszlását.

1.48. (a) Legyen G olyan irányítatlan véges gráf, ami esetleg tartalmaz hurokéleket és párhuzamos éleket. A bolyongó mindig egyenletesen választ az aktuális csúcsból kiinduló utak közül (tehát a hurokélek duplán számítanak). Mi a bolyongás stacionárius eloszlása?

(b) Tekintsük azt a bolyongást az $S = \{1, 2, \ldots, 100\}$ állapottéren. ami a szélekről mindig 1-el beljebb lép, a belső pontokban pedig $\frac{1}{3}$ valószínűséggel balra, $\frac{2}{3}$ valószínűséggel jobbra lép. Mi a stacionárius eloszlás?

1.49. Tekintsük a szomszédok közül egyenletesen választó bolyongást a következő egyszerű G gráfon: $V(G) = \{A, B, C, D, E, F, G\}$, és B, C, D, E, F, G pontok közül bármelyik kettőt él köti össze, valamint A össze van kötve B-vel és C-vel.

(a) Az A-ból indított bolyongás várhatóan hány lépést tesz meg, mielőtt A-ba visszaér?

(b) Ha a bolyongó B-ből indul, várhatóan hány lépést tesz meg azelőtt, hogy A-ba érne?

1.50. *A Boze-Einstein-eloszlás, avagy Markov lánc Monte Carlo*

Egy bűvésznek van r doboza és n megkülönböztethetetlen nyula. Minden másodpercben mindkét kezével egyszerre belenyúl valamelyik kalapba (a két kézzel egymásól függetlenül, mindkettővel egyenletesen választ kalapot). Ha a bal kézre eső kalapban van nyúl, akkor átteszi a jobb kézre eső kalapba, egyébként pedig nem csinál semmit. Mi a Markov lánc stacionárius eloszlása?

1.51. *Az Ehrenfest-féle urnamodell stacionárius eloszlása*

Van két kutya (egy vizsla és egy labrador) és n bolha. A bolhák ide-oda ugrálhatnak a kutyák között. Minden lépésben egy egyenletesen választott bolha gondol egyet, és átugrik a másik kutyára.

(a) Lássa be, hogy a vizslán levő bolhák száma Markov láncot alkot. Aperiodikus-e ez a Markov lánc?

(b) Számítsa ki a stacionárius eloszlását.

Segítség: Könnyebb kiszámítani egy nagyobb állapotterű Markov lánc stacionárius eloszlását, aminek már szimmetrikus lesz az átmenetmátrixa, lásd 1.31. feladat.

1.52. Mutassuk meg, hogy a Bernoulli-Laplace-féle urnamodell (lásd 1.11 és 1.12 feladatok) egyetlen stacionárius eloszlása $\pi(k) = \binom{N}{k}^2 \Big/ \binom{2N}{N}$.

Segítség: Könnyebb kiszámítani a nagyobb állapotterű Markov lánc stacionárius eloszlását...

1.6. A spektrális rés

1.53. Tekintsük az irreducibilis $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ átmenetmátrixot. Lássa be, hogy ha P-nek van sajátbázisa és a P jobb oldali sajátvektoraiból, mint oszlopokból összerakunk egy invertálható U mátrixot, akkor U^{-1} sorai P baloldali sajátvektorai lesznek. Mi lesz U^{-1} első sora, ha U első oszlopa csupa egyesből áll?

1.54. Vegyük azt a sztochasztikus mátrixot az $S = \{1,2\}$ állapottéren, amire $P_{1,1} = \frac{1}{2}$, $P_{2,2} = \frac{3}{4}$.

(a) P^{100} elemei körülbelül hány tizedesjegyben térnek el $\lim_{n\to\infty} P^n$ elemeitől?

(b) $P^{100} =$?

1.55. Legyen $\pi_1 > 0, \pi_2 > 0$, $\pi_1 + \pi_2 = 1$, $0 < r \leq 1$. Van-e olyan Markov lánc az $S = \{1,2\}$ állapottéren, aminek (π_1, π_2) a stacionárius eloszlása és r a spektrális rése?

Segítség: a kételemű állapottéren bármilyen Markov lánc reverzibilis, és a spektrális rés a determináns segítségével kifejezhető.

1.56. Tekintsük az egyszerű, szimmetrikus bolyongást a modulo 3 mardékosztályokon. Határozza meg az átmenetmátrix sajátértékeit, sajátaltereit és spektrális rését.

1.57. (a) Lássa be, hogy egy véges állapotterű, irreducibilis Markov átmenetmátrix spektrális rése akkor és csak akkor 1, ha van olyan $0 < m < +\infty$, hogy tetszőleges μ_0 kezdeti eloszlásból indítva az $X_1, X_2, \ldots$ Markov-láncot, ha $n_2 - n_1 \geq m$, akkor X_{n_1} és X_{n_2} független valószínűségi változók.

(b) Maple vagy Mathematica segítségével számítsa ki a 1.4 feladatban definiált Markov-lánc átmenetmátrixának Jordan-féle normálalakját.

1.58. *A korallációs hossz avagy a keverési idő*

Egy irreducibilis, aperiodikus, P átmenetmátrixú $X_1, X_2, \ldots$ Markov lánc spektrális résének $l = \frac{1}{r}$ reciprokát "nevezzük" az $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változó-sorozat korrellációs hosszának, avagy a Markov lánc keverési idejének. Miért így definiáljuk? Mert ekkor a P^l mátrix második legnagyobb sajátértékének abszolútértéke $\left(1 - \frac{1}{l}\right)^l \approx e^{-1}$. Ha ez nem lenne elég meggyőző, akkor definiálhatnánk a korellációs hosszt $l = \frac{10}{r}$-nek, és akkor P^l mátrix második legnagyobb sajátértékének abszolútértéke kábé e^{-10} lenne, ami már tényleg nagyon kicsi, tehát akkor X_n és X_{n+l} tényleg már "majdnem független" lenne. Tekintsük az alábbi három származtatott Markov láncot:

(a) A "lusta" Markov láncot, aminek a bolyongója minden lépésben feldob egy szabályos érmét, és ha fej, akkor a P átmenetmátrix szerint lép egyet, ha pedig írás, akkor helyben marad.

(b) Az $X_2, X_4, X_6, \ldots$ "ritkított" Markov-láncot.

(c) Azt a ritkított valószínűségi változó-sorozatot, amit úgy kapunk, hogy minden n-re X_n-et mindentől függetlenül p valószínűséggel töröljük.

Adjunk heurisztikus tippet mindhárom esetben arra, hogy hányszorosára változik a korellációs hossz. Mindhárom esetben adjunk meg egy olyan nemnegatív egészértékű ν valószínűségi változót, hogy $\mathbf{E}(P^\nu) = F(P)$ legyen a származtatott Markov lánc átmenetmátrixa, ahol F a ν generátorfüggvénye. Mi a köze a heurisztikus tippjeinknek $F'(1)$-hez? Segítség: $\frac{1}{\mathbf{E}(\nu)}$ a "ritkító pontfolyamat" sűrűsége. Milyen értelemben voltak jók a tippek?

1.59. Tekintsük az $X_1, X_2, \ldots$ véges állapotterű, irreducibilis Markov láncot, melynek átmenetmátrixa P és spektrális rése r. Tegyük fel, hogy mátrix sajátértékei mind különbözőek. Az alábbi kérdésekre először adjunk heurisztikus választ a 1.58. feladathoz hasonlóan.

(a) Ha a Markov lánc stacionárius, mi a megfordított Markov lánc spektrális rése?

(b) Legyen $Y_1, Y_2, \ldots$ egy másik, az előbbitől teljesen független Markov lánc, aminek átmenetmátrixa Q és spektrális rése r_2. Mi a $Z_n = (X_n, Y_n)$ Markov lánc spektrális rése? Segítség: az új átmenetmátrix sajátvektorai mind összeeszkábálhatóak a régi mátrixok sajátvektoraiból.

1.60. Legyen $\varphi : S \to \hat{S}$ az $X_1, X_2, \cdots \in S$ Markov lánc kontrakciója (lásd 1.31. feladat). Mutassa meg, hogy a $\varphi(X_1), \varphi(X_2), \ldots$ Markov lánc spektrális rése nagyobb vagy egyenlő az eredeti Markov lánc spektrális résénél.

1.61. Határozza meg a 1.34. feladatban definiált Markov lánc összes 1 abszolútértékű sajátértékéhez tartozó jobb-és baloldali sajátvektorát.

1.62. Lássa be a 1.20. feladat felhasználásaával, hogy ha P egy szigorúan szubsztochasztikus irreducibilis átmenetmátrix, azaz ha P elemei nemnegatívak, minden sorösszeg kisebb vagy egyenlő 1-nél, van olyan sor, aminek az összege kisebb, mint 1, és a $G := \{(x, y) : P_{x,y} > 0\}$ irányított gráf erősen összefüggő, akkor $I - P$ invertálható mátrix.

1.63. Tekintsük azt az $X_1, X_2, \ldots$ Markov-láncot, aminek az állapottere $S = \{1, 2, 3\}$ és átmenet-mátrixa

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tegyük fel, hogy $\mu_0(3) = 0$ teljesül a kezdeti eloszlásra.

(a) Nevezzük P-nek az átmenetmátrix utolsó sorának és oszlopának elhagyásával kapható 2×2-es szubsztochasztikus mátrixot. Határozza meg P legnagyobb λ sajátértékét és a hozzá tartozó $(v(1), v(2))^T$ jobboldali sajátvektort.

(b) Körülbelül hány nullával kezdődik $\mathbf{P}(X_n \neq 3)$, ha $1 \ll n$?

(c) Lássa be, hogy az az $Y_1^n, Y_2^n, \ldots, Y_n^n$ sztochasztikus folyamat is (nem feltétlenül homogén) Markov lánc, aminek állapottere $S = \{1, 2\}$ és aminek eloszlását a következő módon definiáljuk:

$$\mathbf{P}(Y_1^n = i_1, \ldots, Y_n^n = i_n) := \mathbf{P}(X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n | X_n \neq 3)$$

(d) Mutassa meg, hogy az előző részfeladatban definiált Markov lánc átmenetmátrixa

$$\mathbf{P}(Y_{k+1}^n = j | Y_k^n = i) = \frac{P_{i,j} w(j)}{P_{i,1} w(1) + P_{i,2} w(2)}$$

ahol $(w(1), w(2))^T = P^{n-k-1}(1, 1)^T$.

(e) Fix k esetén lássa be, hogy

$$\hat{P}_{i,j} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_{k+1} = j | X_k = i, X_n \neq 3) = \frac{1}{\lambda} P_{i,j} \frac{v(j)}{v(i)}$$

Tehát ez az átmenetvalószínűség-mátrixa a Markov-láncunknak amellett a feltétel mellett, hogy "soha nem jut el" az elnyelő állapotba. Lássa be direkt számolással, hogy a $\hat{P}$ mátrix sztochasztikus.

1.64. *A diszkrét Fourier-transzformáció a konvolúciót szorzásba viszi*

Tekintsük az egyszerű, szimmetrikus bolyongást a modulo L maradékosztályokon, ahol L páratlan szám.

(a) A CHT segítségével adjon heurisztikus becslést a Markov lánc keverési idejének nagyságrendjére (lásd 1.58. feladat), ha $1 \ll L$.

(b) Jelölje P a Markov lánc átmenetmátrixát. Ekkor

$$P_{x,y} = \frac{1}{2}\mathbb{1}[\, x \equiv y + 1 \bmod L \,] + \frac{1}{2}\mathbb{1}\,[x \equiv y - 1 \bmod L\,]$$

Legyen U az az $L \times L$-es mátrix, amire $U_{x,y} = \exp(2\pi i \frac{xy}{L})$, $0 \leq x, y \leq L - 1$. Ellenőrízze, hogy $U^{-1} = \frac{1}{L} U^*$, ahol U^* az U konjugált transzponáltja. Mutassa meg, hogy $U^{-1} P U$ diagonális mátrix. Lássa be a L'Hospital-szabály segítségével, hogy P spektrális rése körülbelül $\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{L^2}$, ha $1 \ll L$.

1.7. Megszámlálható Markov láncok

1.65. Tekintsük a következő sorbanállási problémát: X_n a sorbanálló vásárlók száma n-kor. Minden $(n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$ időintervallumban $p \in (0, 1)$ valószínűséggel egy új vásárló érkezik és a sor végére áll. Ettől függetlenül, ugyanebben az időintervallumban a sor elején álló vásárlót $q \in (0, 1)$ valószínűséggel kiszolgálják és ő elhagyja a sort. Legfeljebb egy új vásárló érkezhet és legfeljebb egy vásárlót szolgálnak ki egységnyi időintervallumonként. A különböző időintervallumokban történő események egymástól függetlenek.

(a) Markov lánc-e az X_n folyamat? Ha igen, írjuk le az állapotterét és átmenetmátrixát és állapítsuk meg, hogy irreducibilis-e, illetve, aperiodikus-e.

(b) Mely (p, q) paraméter értékekre lesz az X_n Markov lánc pozitív rekurrens, null rekurrens illetve tranziens?

(c) A pozitív rekurrens esetben határozzuk meg a Markov lánc π stacionárius (invariáns) eloszlását. Mennyi a sor átlagos hossza a stacionárius állapotban? Segítség: Detailed balance...

(d) A tranziens esetben határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy kezdetben j hosszú sorral indulva, valaha is kiürül a sor.

1.66. Tekintsük a következő sorbanállási problémát: X_n a sorbanálló vásárlók száma n-kor. Minden $(n,\ n+1]$, $n \in \mathbb{N}$ időintervallumban $p \in (0,\ 1)$ valószínűséggel egy új vásárló érkezik és a sor végére áll. Ettől függetlenül, ugyanebben az időintervallumban a sor elején álló vásárlót $q \in (0,\ 1)$ valószínűséggel kiszolgálják és ő elhagyja a sort. Legfeljebb egy új vásárló érkezhet és legfeljebb egy vásárlót szolgálnak ki egységnyi időintervallumonként. A különböző időintervallumokban történő események egymástól függetlenek. Tegyük fel, hogy a sor 1 vásárlóval indul: $X_0 = 1$. Legyen τ az az időtartam, amíg ez a sor először kiürül:

$$\tau = \inf\{n \geq 1 \,:\, X_n = 0\}.$$

(a) Az első lépésre feltételezéssel határozzuk meg τ generátorfüggvényét.

(b) Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy a sor valaha kiürül. Mely p illetve q értékekre lesz a sor rekurrens (azaz $\mathbb{P}\{\tau < \infty\} = 1$)?

(c) Határozzuk meg τ várható értékét.

(d) Az eddigiek alapjan hatarozza meg, hogy hosszútávon az idő hány százalékában pihen a pénztáros.

1.67. Egy sztochasztikus önszabályozó rendszer próbál egy bizonyos paramétert a 0 közelében tartani, és ezt a következőképp teszi: a paraméter az n diszkrét idő függvényében egy X_n Markov lánc, melynek állapottere $\mathbb{Z}$, és átmenetvalószínűségei

$$P_{i,i+1} = \begin{cases} p, & \text{ha } i > 0, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{ha } i = 0, \\ q, & \text{ha } i < 0, \end{cases} \qquad P_{i,i-1} = \begin{cases} q, & \text{ha } i > 0, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{ha } i = 0, \\ p, & \text{ha } i < 0, \end{cases} \qquad \text{ahol } q = 1 - p.$$

(a) Milyen p értékekre lesz a lánc tranziens, rekurrens illetve pozitív rekurrens?

(b) Milyen p értékekre lesz az alábbi egy valószínűségi eloszlás $\mathbb{Z}$-n?

$$\pi(i) = \begin{cases} \dfrac{q-p}{2q}, & \text{ha } i = 0, \\ \dfrac{q-p}{4pq} \cdot \left(\dfrac{p}{q}\right)^{|i|}, & \text{ha } i \neq 0. \end{cases}$$

(c) Mutassuk meg, hogy – amennyiben értelmes – π a lánc stacionárius eloszlása.

(d) Teljesíti-e a lánc és π stacionárius eloszlása a részletes egyensúly feltételt?

1.68. Tekintsük a következő Markov láncot az $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ állapottéren. Adottak a $p_1, p_2, \ldots$ pozitív számok melyek összege 1: $\sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1$. Ha a Markov lánc a 0 állapotba ér, a $\left(p_j\right)_{j=1}^{\infty}$ eloszlás szerint választja ki következő állapotát. Ha valamely $j > 0$ állapotban van, akkor determinisztikus módon a $j-1$ állapotba lép.

(a) Írjuk fel a Markov lánc átmenetmátrixát. Irreducibilis és aperiodikus-e a Markov lánc?

(b) A Markov lánc nyilvánvaló módon rekurrens. (Miért?) Milyen feltételnek kell a $\big(p_j\big)_{j=1}^{\infty}$ eloszlásnak eleget tennie ahhoz, hogy a Markov lánc pozitív rekurrens legyen?

Segítség: Számoljuk ki a 0-ba való első visszatérés idejének várható értékét.

(c) A pozitív rekurrens esetben számítsa ki a stacionárius eloszlást.

Megjegyzés: Vessük össze az eredményt a 1.37. feladattal. A β_n "hátralévő idő" stacionárius eloszlását számítottuk ki.

1.69. Tekintsük az X_n Markov láncot az $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ állapottéren, melynek átmenet valószínűségei:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\big(X_{n+1} = j+2 \big| X_n = j\big) = p, \\ &\mathbf{P}\big(X_{n+1} = \max(j-1, 0) \big| X_n = j\big) = 1 - p, \end{aligned} \qquad j \in S.$$

Mely p értékekre lesz a Markov lánc tranziens, null rekurrens, illetve pozitív rekurrens? Segítség: generátorfüggvény-módszer!

1.70. Tekintsünk egy elágazó folyamatot, melynél egy szülő gyermekei számának eloszlása $\big(p_i\big)_{i=0}^{\infty}$. Ebből irreducibilis Markov láncot csinálunk, úgy, hogy ha a populáció kihal, a következő lépésben egy új egyedet ültetünk be kívülről. Mely $\big(p_i\big)_{i=0}^{\infty}$ eloszlásokra lesz az így értelmezett Markov lánc pozitív rekurrens, null rekurrens, illetve tranziens?

1.71. Legyen X_n Markov lánc az $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ állapottéren, melynek átmenet mátrixa az alább megadottak egyike. Állapítsuk meg, mely esetekben lesz a Markov lánc pozitív rekurrens, null rekurrens, illetve tranziens. A pozitív rekurrens esetekben számoljuk ki a stacionárius (invariáns) eloszlást.
(a) $P_{j,j+1} = (j+1)/(j+2)$, $P_{j,0} = 1/(j+2)$.
(b) $P_{j,j+1} = 1/(j+2)$, $P_{j,0} = (j+1)/(j+2)$.
(c) $P_{j,j+1} = (j^2+1)/(j^2+2)$, $P_{j,0} = 1/(j^2+2)$.

1.72. Legyen $\vec{X}_n = (X_n^1, \dots, X_n^d)$ olyan d-dimenziós bolyongás, aminek a koordinátái független, egy dimenziós, egyszerű, szimmetrikus bolyongások. (Vigyázat, ez nem pont ugyanaz a d-dimenziós bolyongás, mint amiről a Pólya-tétel szól! Ez a bolyongó a $\mathbb{Z}^d$ rács elemi kockáinak az átlóin lépeget.)

(a) Ha $\vec{X}_0 = \vec{0}$, akkor mennyi $\mathbf{P}(\vec{X}_n = \vec{0})$?

(b) A $d = 1, 2, 3, \dots$ esetek közül melyikben rekurrens, illetve tranziens a bolyongás? Állításának igazolásához használja a Stirling-formula következő alakját: vannak olyan $0 < c_1 < c_2 < +\infty$ konstansok, hogy minden $n \geq 1$-re

$$c_1\sqrt{n}\frac{n^n}{e^n} \leq n! \leq c_2\sqrt{n}\frac{n^n}{e^n}$$

(c) A fentiek felhasználásával döntse el, hogy a (Pólya-féle) első-szomszéd bolyongás a $\mathbb{Z}^2$ rácson rekurrens-e vagy pedig tranziens.

1.73. Legyenek $X_1, X_2, X_3, \dots$ független és azonos eloszlású, egész értékű valószínűségi változók, melyeknek van várható értékük és $\mathbf{E}\big(X_i\big) = 0$. Legyen $S_0 = 0$ és

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

(Azaz: S_n bolyongás $\mathbb{Z}$-n, melynek egymásutáni lépései $X_1, X_2, \dots$.) Legyen továbbá

$$G_n(x) := \mathbf{E}\Big(\sum_{j=0}^{n} \mathbb{1}_{\{S_j = x\}}\Big),$$

a $[0, n]$ időintervallumban az x rácsponton töltött részidő várható értéke. (E függvényt a bolyongás Green-függvényének nevezzük.)
(a) Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in \mathrm{N}$ és $x \in \mathbb{Z}$ esetén

$$G_n(0) \geq G_n(x).$$

Útmutatás: Tekintsük az x rácspont első elérésének idejét.
(b) Emlékezzünk a Nagy Számok Gyenge Törvényére: bármely $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big(|S_n| < \varepsilon n\Big) = 1.$$

Ennek segítségével bizonyítsuk be, hogy rögzített $\varepsilon > 0$ mellett

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{|x|<\varepsilon n} G_n(x) = 1.$$

(c) Az (a) és (b) pontok eredményének felhasználásával bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{n\to\infty} G_n(0) = \infty.$$

(d) A fentiek alapján lássuk be, hogy az S_n Markov lánc rekurrens.
(e) Alkalmazható-e a fenti okoskodás magasabb dimenziós bolyongásra?

1.74. Legyen $\left(p_k\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ valószínűségi eloszlás $\mathbb{Z}$-n, melyről feltesszük, hogy

$$p_1 > 0, \qquad p_k = 0, \quad \text{ha } k > 1$$

és várható értéke negatív:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} kp_k =: \mu < 0.$$

Értelmezzük az X_n Markov láncot az $S = \{0, 1, 2, 3\dots\}$ állapottéren, melynek átmenetmátrixa:

$$P_{i,j} = \begin{cases} p_{j-i} & \text{ha } j > 0, \\ \sum_{k\le 0} p_{k-i} & \text{ha } j = 0. \end{cases}$$

Más szóval: X_n bolyongás, melynek lépés eloszlása $\left(p_k\right)_{k\in\mathbb{Z}}$, de nem léphet a negatív félegyenesre. Feladatunk célja bebizonyítani, hogy az X_n bolyongás pozitív rekurrens.
(a) Tegyük fel, hogy $\pi(j)$, $j \in S$, egy invariáns eloszlás. Bizonyítsuk be, hogy minden $i > 0$-ra

$$\pi(i) = \sum_{j=i-1}^{\infty} \pi(j)p_{i-j}.$$

(b) Legyen $q_k = p_{1-k}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Bizonyítsuk be, hogy az

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} s^k q_k.$$

egyenletnek létezik egy és csakis egy $s^* \in (0, 1)$ megoldása.
Útmutatás: $\left(q_k\right)_{k=0}^{\infty}$ olyan valószínűségi eloszlás N-en, melynek várható értéke 1-nél nagyobb. A fenti egyenlet jobb oldalán ennek az eloszlásnak a generátorfüggvénye szerepel.
(c) A (b) pont beli s^* érték felhasználásával határozzuk meg az X_n Markov lánc stacionárius (invariáns) eloszlását.

1.75. Egy Markov lánc állapotai a nem-negatív egész számok: $S = \{0, 1, 2, \dots\}$. Átmenet valószínűség mátrixa:

$$P_{k,l} = e^{-\lambda} \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} p^\nu q^{k-\nu} \frac{\lambda^{l-\nu}}{(l-\nu)!}.$$

$(p, q > 0,\ p + q = 1.)$ Bizonyítandó, hogy

$$P_{k,l}^{(n)} \to e^{-\lambda/q} \frac{(\lambda/q)^l}{l!},$$

amint $n \to \infty$. Segítség: szemléletes jelentése van ...

1.76. (a) Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független, azonos eloszlású pozitív egész értékű valószínűségi változók $F(z)$ generátorfüggvénnyel, és legyen $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Legyen

$$Y_k = \begin{cases} 1, & \text{ha } \exists n, \text{ hogy } S_n = k, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Legyen $u_k = \mathbf{P}(Y_k = 1)$. $U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k = ?$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n = ?$

1.77. *Szubharmonikus függvények és tranziencia I.*

Ennek a feladatnak lesz még folytatása, a 4.189. feladat.

Legyen S diszkrét (véges vagy megszámlálható) állapottér és felette a $\big(P_{x,y}\big)_{x,y\in S}$ sztochasztikus mátrix. Az $f : S \to \mathbb{R}$ függvényről azt mondjuk, hogy (a P átmenet mátrix szerint) *szuperharmonikus az $x \in S$ pontban*, ha

$$\sum_{y\in S} P_{x,y} f(y) \le f(x).$$

Rögzítsünk egy $z \in S$ állapotot. Legyen $\mathcal{A}_z$ azon $f : S \to \mathbb{R}$ függvények halmaza, melyekre

(i) $f(z) = 1$,

(ii) minden $y \in S$-re $0 \le f(y) \le 1$,

(iii) f szuperharmonikus minden $x \neq z$ pontban.

(a) Értelmezzük a $g_z : S \to \mathbb{R}$ függvényt a következőképpen:

$$g_z(x) = \inf_{f\in\mathcal{A}_z} f(x).$$

Mutassuk meg, hogy $g_z \in \mathcal{A}_z$.

(b) Mutassuk meg, hogy bármely $x \neq z$ pontban

$$\sum_{y\in S} P_{x,y} g_z(y) = g_z(x),$$

azaz a g_z függvény *harmonikus* az $S \setminus \{z\}$ halmazon.
Útmutatás: Feltéve, hogy $\sum_{y\in S} P_{x,y} g_z(y) < g_z(x)$ valamely $x \neq z$ pontban, mutassuk meg, hogy g_z csökkenthető lenne egy picivel az x pontban, úgy, hogy szuperharmonikus tulajdonsága megmaradna minden $y \neq z$ pontban.

(c) Mutassuk meg, hogy ha $g_z(x) < 1$ valamely $x \neq z$ pontban, akkor

$$\inf_{y\in S} g_z(y) = 0.$$

Útmutatás: Feltéve, hogy $\inf_{y\in S} g_z(y) =: \varepsilon > 0$ tekintsük a $h_z(x) = (g_z(x) - \varepsilon)/(1 - \varepsilon)$ függvényt.

(d) Legyen X_n Markov lánc az S-en, melynek átmenetmátrixa P, de tegyük a z állapotot elnyelővé. Legyen $\hat{g}_z(x)$, $x \in S$, annak a valószínűsége, hogy az x állapotból indított lánc valaha is eléri a z elnyelő állapotot, azaz $\hat{g}_z(x) = \mathbf{P}_x(T_z < +\infty)$. Bizonyítandó, hogy $\hat{g}_z(x)$ harmonikus az $S \setminus \{z\}$ halmazon, és hogy $\hat{g}_z \in \mathcal{A}_z$.

1.8. Markov-lánc NSZT

1.78. Legyen P irreducibilis átmenetmátrix az S véges állapottér felett és legyen $\pi = \pi P$ a hozzá tartozó stacionárius eloszlás. Ha $f, g : S \to \mathbb{R}$, akkor definiáljuk a stacionárius mértékre vonatkozó belső szorzatukat a következő módon:

$$\langle f, g\rangle_\pi := \sum_{x\in S} f(x)g(x)\pi(x)$$

Ekkor $\sqrt{\langle f, f\rangle_\pi} = \|f\|_2$ az (S, π) mértéktér szerinti L_2-normája f-nek.

(a) Lássa be, hogy $\mathbf{Var}_\pi(f) = \langle f, f\rangle_\pi - \langle \mathbb{1}, f\rangle_\pi^2$.

(b) Mi a P mátrix $\langle\ ,\ \rangle_\pi$-ra vonatkozó adjungáltjának valószínűségszámítási jelentése? Milyen Markov-láncoknak lesz önadjungált a P-je?

(c) Mi a valószínűségszámítási jelentése a $\langle \mathbb{1}, f\rangle_\pi = \langle \mathbb{1}, Pf\rangle_\pi$ azonosságnak?

(d) Legyen X_1, X_2 a stacionárius állapotból indított Markov lánc első két lépése. Lássa be, hogy ha $f : S \to \mathbb{R}$, akkor

$$\frac{1}{2}\mathbf{Var}\big(f(X_2) - f(X_1)\big) = \langle f, (I - P)f\rangle_\pi$$

1.79. Lássa be, hogy reverzibilis Markov láncok spektrális rését a következő szélsőérték-probléma megoldásával is megkaphatjuk:

$$r = \min_f \left\{ \frac{\frac{1}{2}\mathbf{Var}\big(f(X_2) - f(X_1)\big)}{\mathbf{Var}(f(X_1))} \right\}$$

ahol f a nemkonstans függvényeken fut végig.

Segítség: $\mathbf{E}_\pi(f) = 0$ és $\mathbf{Var}_\pi(f) = 1$ feltehető, Lagrange-féle multiplikátor-módszer.

1.80. *Nagy számok törvénye Markov láncokra*

Legyen $X_0, X_1, X_2, \ldots$ véges állapotterű, irreducibilis, (esetleg periodikus) Markov lánc, jelölje P az átmenetmátrixát, μ_0 a kezdeti eloszlását és π a stacionárius eloszlását. Legyen $i \in S$ az állapottér tetszőleges eleme. Jelölje T_0 az i első elérésének időpontját, T_k pedig a k-adik visszatérés időpontját i-be. Legyen $f : S \to \mathbb{R}$. Legyen $Y_0 = \sum_{n=0}^{T_0-1} f(X_n)$ és $k \geq 1$-re $Y_k = \sum_{n=T_{k-1}}^{T_k-1} f(X_n)$.

(a) Lássa be a 1.35. feladat segítségével, hogy $\mathbf{E}(Y_1) = \mathbf{E}(T_1 - T_0) \cdot \langle \mathbb{1}, f\rangle_\pi$.

(b) Jelölje $\nu(N)$ a bolyongó i-ben tett látogatásainak számát az N időpont előtt. Lássa be a Kolmogorov-féle NSZT és a felújításelmélet alaptrükkje segítségével, hogy $\frac{\nu(N)}{N}$ majdnem biztosan $\pi(i)$-hez konvergál.

(c) Bizonyítsa be, hogy majdnem biztosan

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} f(X_n)}{N} = \langle \mathbb{1}, f\rangle_\pi$$

1.81. *A Green-Kubo formula*

Az előző feladat feltevéseivel és jelöléseivel dolgozunk tovább. Tegyük fel továbbá, hogy a Markov lánc aperiodikus, hogy $\langle \mathbb{1}, f\rangle_\pi = 0$, és hogy $\mu_0 = \pi$.

(a) Fejezze ki $\mathbf{Cov}(f(X_n), f(X_m))$ értékét $\langle\ ,\ \rangle_\pi$ és P segítségével.

(b) Lássa be, hogy az $I - P$ operátor megszorítása az $\mathbf{E}_\pi(f) = 0$ függvényekből álló P-invariáns altérre invertálható.

(c) Lássa be, hogy $\langle \mathbb{1}, f\rangle_\pi = 0$ esetén

$$\sigma^2 = \lim_{N\to\infty} \mathbf{Var}\Big(\frac{\sum_{n=0}^{N-1} f(X_n)}{\sqrt{N}}\Big) = 2\langle f, (I-P)^{-1} f\rangle_\pi - \langle f, f\rangle_\pi$$

Megj: A Markov láncokra vonatkozó CHT-ben ez a határeloszlásként adódó normális eloszlás szórásnégyzete.

(d) Mit ad a formula, ha $P_{x,y} = \pi(y)$? Mi ennek a valószínűségszámítási jelentése?

(e) Tegyük fel, hogy a Markov lánc reverzibilis. Lássa be lineáris algebrai eszközökkel is, hogy $\sigma^2 \geq 0$.

(f) Tegyük fel, hogy a Markov lánc reverzibilis. Adjon felső becslést σ^2 értékére a spektrális rés segítségével. Éles ez a felső becslés?

1.82. Tekintsünk egy aszimmetrikus bolyongást egy fán, azaz: G egy irányítatlan, összefüggő, körmentes gráf, a Markov lánc állapottere $S = V(G)$, és $P_{x,y} > 0$ akkor és csak akkor, ha $\{x, y\} \in E(G)$ vagy $x = y$.

(a) A Markov-lánc NSZT és a 1.29. feladat segítségével adjon magyarázatot arra, hogy miért reverzibilis ez a Markov lánc.

(b) Adja meg a stacionárius eloszlását.

1.83. Legyen $N(t)$ annak a száma, ahányszor Kovácsék kidobták az újságos kupacukat az első t nap alatt (lásd 1.8. feladat). Mi az az m és σ, amire $\frac{N(t)-mt}{\sigma\sqrt{t}}$ eloszlása $N(0,1)$-hez konvergál? A választ számolja ki kétféleképpen is: a felújítási folyamatokra vonatkozó CHT, valamint Markov lánc CHT és a Green-Kubo formula segítségével. Mindkét számoláshoz használhat szoftvert.

1.84. *A közegellenállásról*

Tekintsük a következő bolyongást periodikus közegben: a bolyongás állapottere $\mathbb{Z}$, az egész számok halmaza. Csak első szomszédba tud lépni a bolyongó (vagy helyben marad).

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_{n+1} = x - 1 \mid X_n = x) &= p(x)\\ \mathbf{P}(X_{n+1} = x + 1 \mid X_n = x) &= q(x)\\ \mathbf{P}(X_{n+1} = x \mid X_n = x) &= r(x)\end{aligned}$$

Ahol $p(x) + q(x) + r(x) = 1$, továbbá a közeg periódusa M, azaz $p(x + M) = p(x)$, $q(x + M) = q(x)$, $r(x + M) = r(x)$. A bolyongó $X_0 = 0$-ból indul.

(a) Jelölje $\mathbf{P}_{x,\infty}$ annak a valószínűségét, hogy a bolyongó valaha eléri a $-x$ pontot. Számítsa ki $\psi := \lim_{x\to\infty}(\mathbf{P}_{x,\infty})^{\frac{1}{n}}$ értékét. $\log(\psi)$-t nevezzük a közeg aszimptotikus (jobbra való) lejtésének.

(b) Legyen $Y_n := X_n$ mod M aszimmetrikus bolyongás a maradékosztályokon. Lássa be a Markov lánc NSZT segítségével, hogy van olyan $w \in \mathbb{R}$, hogy minden x maradékosztályra

$$\pi(x - 1) \cdot q(x - 1) = \pi(x) \cdot p(x) + w$$

ahol π az Y_n Markov lánc stacionárius eloszlása (tehát Y_n "majdnem" reverzibilis).

(c) Legyen X_0 kezdeti eloszlása olyan, hogy Y_0 stacionárius eloszlású legyen. Fejezze ki $\mathbf{E}(X_{n+1} - X_n)$ értékét w segítségével.

(d) Számolja ki w értékét.

(e) Számolja ki a bolyongó aszimptoikus sebességét, azaz $\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n}$ értékét.

(f) Lássa be, hogy $\psi < 1$ akkor és csak akkor, ha $w > 0$.

(g) Lássa be, hogy az ugyanolyan aszimptotikus lejtésű közegek közül a homogén közegben mozgó részecske aszimptotikus sebessége a legnagyobb.

1.9. Bolyongások és differenciaegyenletek

Sok az egybeesés eközött az alfejezet és a 1.1. alfejezet között.

1.85. Legyen X_t, $t = 0, 1, 2\ldots$ egyszerű szimmetrikus bolyongás az egydimenziós $\mathbb{Z}$ egész rácson. Legyen $\tau_a := \inf\{t \geq 0 : X_t = a\}$, az $a \in \mathbb{Z}$ rácspont első elérésének ideje. Legyen $a < b$ két rögzített rácspont. Számoljuk ki az

$$f_{[a,b]} : [a, b] \cap \mathbb{Z} \to [0, 1], \qquad f_{[a,b]}(x) := \mathbf{P}(\tau_a < \tau_b | X_0 = x)$$

$$g_{[a,b]} : [a, b] \cap \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \qquad g_{[a,b]}(x) := \mathbf{E}(\min(\tau_a, \tau_b)|X_0 = x)$$

függvényeket.

1.86. Határozzuk meg azt az $f : \{0, 1, 2, \ldots, 10\} \to \mathbb{R}$ függvényt, amely kielégíti az

$$f(n) = \frac{1}{4}f(n - 1) + \frac{3}{4}f(n + 1), \qquad n = 1, 2, \ldots, 9,$$

differencia egyenletet és a az $f(0) = 0$, $f(10) = 1$ peremfeltételeket. Adjunk valószínűségszámítási értelmezést az f függvénynek.

1.87. (a) Legyenek $a > 0$ rögzített egész szám. Oldjuk meg a következő peremérték problémát: $\lambda \in (0, 1)$ rögzített paraméter és $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ kielégíti a következő feltételeket:

$$\frac{1}{2}f(x + 1) + \frac{1}{2}f(x - 1) = \lambda^{-1}f(x), \qquad \text{ha } -a < x < a,$$

$$f(-a) = 1 = f(a).$$

Adjunk valószínűségszámítási értelmezést az f függvénynek.
(b) Oldjuk meg ugyanezt a feladatot az $[a, b]$ intervallumban, ahol $a < b$ egész számok.

1.88. Határozzuk meg azt az $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ függvényt, amely kielégíti az

$$f(n) = \frac{1}{3}f(n-1) + \frac{1}{3}f(n+1) + \frac{1}{3}f(n+2), \qquad n = 1, 2, \dots$$

differencia egyenletet és az

$$f(0) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} f(n) = 1$$

peremfltételeket. Adjunk valószínűségszámítási értelmezést az f függvénynek.

1.89. Határozzuk meg azokat az $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyek kielégítik az

$$f(n) = \frac{1}{2}f(n+1) + \frac{1}{2}f(n-1) - 1$$

differenciaegyenletet.
Útmutatás: Előbb mutassuk meg, hogy $f(n) = n^2$ megoldása a fenti egyenletnek, majd feltéve, hogy f_1 és f_2 megoldás, írjunk fel differencia egyenletet $g = f_2 - f_1$-re.

1.10. A tükrözési elv

1.90. A fagylaltosnál egy gombóc fagyi ára 10 peták. $(m + n)$ ember áll sorba fagyiért, véletlen sorrendben. Ezek közöl m-nek van 10 petákos érméje, n-nek viszont csak 20 petákos érméje van $(m \geq n)$, mindannyian egy gombóc fagyit akarnak venni. Feltesszük, hogy kezdetben üres a fagylaltos kasszája. Mennyi annak a valószínűsége, hogy senkinek sem kell várakoznia a visszajáró pénzére.

Az alábbi feladatokban tekintsük az egy dimenziós, origóból kiinduló egyszerű bolyongási trajektóriákat. a, b, c és n pozitív egész számokat jelölnek. Az $\binom{x}{y}$ kifejezésre a megszokott konvenciók érvényesek

1.91. (a) Bizonyítandó, hogy azon n-lépéses trajektóriák száma, amelyek nem érik el a $-b$ szintet és az a szinten végződnek, egyenlő a következő kifejezéssel:

$$\binom{n}{\frac{n+a}{2}} - \binom{n}{\frac{n+a+2b}{2}}.$$

(b) Tegyük fel, hogy $b > a$. Bizonyítandó, hogy azon n-lépéses trajektóriák száma, amelyek nemérik el a b szintet és az a szinten végződnek, egyenlő a következő kifejezéssel:

$$\binom{n}{\frac{n+a}{2}} - \binom{n}{\frac{n+2b-a}{2}}.$$

1.92. Tegyük fel, hogy $a < c$ Bizonyítandó, hogy azon n-lépéses trajektóriák száma, amelyek előbb elérik a c szintet, majd az n-edik lépéskor az a szinten végződnek, úgy, hogy a c szint első elérése után a $-b$ szintet már nem érik el, egyenlő a következő kifejezéssel:

$$\binom{n}{\frac{n+a-2c}{2}} - \binom{n}{\frac{n+a+2b+2c}{2}}.$$

1.93. Legyen X_n egyszerű szimmetrikus bolyongás $\mathbb{Z}$-n, mely az origóból indul, $X_0 = 0$. Bizonyítandó, hogy

$$\mathbf{P}\Big(X_{2n} = 0, \max_{0<j<2n} X_j \geq k\Big) = \mathbf{P}\Big(X_{2n} = 2k\Big).$$

2. A Poisson-folyamat

2.94. Egy radioaktivitást mérő számlálóberendezés ezredmásodpercenként tud ugrani, és akkor ugrik egyet a $t = \frac{k}{1000}$ időpontban, ha volt beérkező alfa-részecske a $(t - \frac{1}{1000}, t]$ időintervallumban. Jelölje $T(n)$ azt a véletlen időpontot, amikor először mutat n értéket a számláló. Jelölje $N(t)$ a számlálóberendezés állását a t időpontban.

(a) *(A felújításelmélet alaptrükkje)* Melyik igaz a következő két állítás közül?

$$\mathbf{P}(N(t) \le n) = \mathbf{P}(T(n) \ge t), \quad \mathbf{P}(N(t) < n) = \mathbf{P}(T(n) > t)$$

(b) Lássa be, hogy $\mathbf{P}(N(t) = n) = \mathbf{P}(T(n) \le t) - \mathbf{P}(T(n+1) \le t)$!

(c) Fejezze ki $T(n)$ eloszlásfüggvényét az $N(t)$ eloszlásának segítségével!

(d) Tegyük fel, hogy egy ezredmásodperc alatt $p = \frac{1}{500}$ valószínűséggel érkezik alfa-részecske, a múlttól függetlenül. Határozza meg $T(n)$ és $N(t)$ eloszlását!

(e) Milyen abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változóval közelítsük a számlálóberendezés két egymás utáni ugrása közt eltelt időt?

(f) Adjon $T(3)$ eloszlásfüggvényére egyszerű közelítő formulát a (c) pont és a Binomiális eloszlás Poisson-approximációja segítségével. Milyen (nevezetes) abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye ez?

2.95. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek sűrűségfüggvénye xe^{-x}, ha $x \ge 0$, és 0 egyébként. Legyen továbbá $S_0 = 0$ és $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, valamint legyen $N(t) = \max\{n : S_n < t\}$

(a) Adja meg S_2 sűrűségfüggvényét!

(b) Határozza meg $N(t)$ eloszlását, azaz $k = 0, 1, 2, \ldots$-ra $\mathbf{P}(N(t) = k)$ értékét! (Számolás nélkül is megy, az előadáson tanultakra kell hivatkozni)

2.96. Van két kutya (egy vizsla és egy labrador), és közöttük ide-oda ugrál négy bolha. Minden bolha a többitől függetlenül λ rátával ugrik át az egyik kutyáról a másikra. Kezdetben a vizslán van mind a négy bolha. Határozza meg a t időpontban a vizslán levő bolhák számának eloszlását.

2.97. (a) Van egy felújítási folyamat, $EXP(\lambda)$ eloszlású felújítási időkkel. Lássuk be, hogy amellet a feltétel mellett, hogy a $[0, t]$ intervallumban pontosan n darab felújítás történt, az n darab felújítási időpont együttes eloszlása (tehát az együttes sűrűségfüggvényük) olyan, mint ha n darab független egyenletes eloszlású pontot vettünk volna a $[0, t]$ intervallumon és nagyság szerint sorba rendeztük volna őket.

(b) Vegyünk a $[0, T]$ intervallumon $\lambda \cdot T$ darab független, egyenletes eloszlású pontot, rendezzük őket sorba és nézzük az első n darabot közülük. n fix, de ugyanezt a kísérletet megismételjük egyre nagyobb és nagyobb T-kkel, $T \to \infty$. Lássuk be, hogy az első n pont együttes eloszlása (tehát az együttes sűrűségfüggvényük) kovergál egy $EXP(\lambda)$ paraméterű felújítási folyamat első n pontjának együttes eloszlásához.

2.98. Tekintsünk a számegyenesen egy λ paraméterű homogén Poisson folyamatot, jelöljük $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \ldots$-vel a folyamat pontjainak koordinátáit (az egymásutáni események bekövetkezésének időpontjait). Képezzünk ebből egy újabb pontfolyamatot a következő módon: az eredeti Poisson folyamatban az egymás utáni események történési időpontjai közötti intervallumok felezőpontjaiba leteszünk egy-egy pontot, majd töröljük az eredeti Poisson folyamat pontjait. Azaz: az új follyamat pontjainak koordinátái: $S_i = (T_{i-1} + T_i)/2$, $i = 1, 2, 3, \ldots$.
(a) Poisson folyamat lesz-e az így képezett pontfolyamat?
(b) Mi lesz az újonnan képezett folyamat egymásutáni pontjai közötti időtartam hosszának sűrűségfüggvénye, várható értéke és szórása?
(c) Határozzuk meg két egymásutáni ilyen intervallum-hossz kovarianciáját és korrelációhányadosát.
(d) Bizonyítsuk be, hogy két nem egymásutáni intervallum hossza független egymástól.

2.99. Egy telefonközpontba a hívások Poisson folyamat szerint érkeznek, óránként átlagosan 4 hívás.
(a) Mi a valószínűsége annak, hogy az első órában kettőnél kevesebb hívás érkezik?
(b) Feltéve, hogy az első órában hat hívás érkezik, mi annak a valószínűsége, hogy a második órában legalább két hívás érkezik?
(c) A központ kezelője reggeli munkakezdéskor úgy dönt, hogy megvárja a tizenötödik beérkező hívást, majd elmegy ebédelni. Mennyi az ebédjéig kivárandó idő várható értéke?
(d) Feltéve hogy pontosan nyolc hívás érkezik az első két órában, mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek közül pontosan öt érkezik az első órában?
(e) Feltéve, hogy pontosan k hívás érkezik az első négy órában, mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek közül pontosan j érkezik az első órában?

2.100. Hogy ott mindig világosság légyen, ablaktalan folyosónk lámpájába azonnal becsavarjuk az új égőt, ha az előző kiég. Az izzók élettartamai egymástól függetlenek, és külön-külön exponenciális eloszlást követnek λ paraméterrel. $t = 0$-kor csavarjuk be az első égőt. Tekintsük annak az izzónak a teljes élettartamát, amelyik a t időpillanatban ég ($t > 0$ fix). Mennyi ennek a teljes élettartamnak a várható értéke,

(a) Ha tudjuk, hogy a 0 időponttól számítva ez az izzó a k -adik.

(b) Ha nem tudjuk, hogy hányadik. $t \to \infty$ esetén mihez konvergál a t-edik időpontban égő villanykörte teljes élettartamának várható értéke?

2.101. Legyen adva egy λ paraméterű Poisson folyamat. Feltéve, hogy a $[0, t)$ intervallumba esik pont, számítsuk ki az első pont koordinátájának sűrűségfüggvényét.

2.102. Az eső évente átlagosan 100-szor esik, továbbá tegyük fel, hogy a záporok pillanatszerűek és egy Poisson-folyamat szerint jönnek. Egy kertész akkor locsol, ha 48 órája nem érte víz (azaz eső vagy locsolás) a kertet. Két locsolás közt várhatóan hányszor esik az eső? Két locsolás között várhatóan mennyi idő telik el? Körülbelül hányszor locsol évente?

2.103. Legyenek $0 = T_1 < T_2 < T_3 < \dots$ λ paraméterű Poisson folyamat egymásutáni eseményeinek időpontjai. Legyen továbbá adott egy $\varrho : [0, \infty) \to (0, 1)$ függvény. A Poisson folyamatot $t = 0$-kor elkezdjük megfigyelni és megfigyelését a T_i (véletlen) időpontban folytatjuk $\varrho(T_i)$ valószínűséggel, abbahagyjuk $1 - \varrho(T_i)$ valószínűséggel ($i = 0, 1, 2, \dots$). Határozzuk meg a folyamat megfigyelési idejének eloszlásfüggvényét.

2.104. Tekintsünk egy homogén, λ paraméterű Poisson folyamatot, és legyen $X(a, b)$ az (a, b) intervallumban lévő pontok száma. Határozza meg $\mathbf{Cov}(X(a, b), X(c, d))$ értékét!

2.105. Egy üzlet pénztáránál sorban állnak a vásárlók. A vásárlók érkezési ideje λ paraméterű Poisson folyamatot alkot. Az egyes vásárlók kiszolgálási idejének várható értéke m.

(a) Egy vásárló kiszolgálásának ideje alatt mennyi a sorhossz növekedésének várható értéke?

(b) Az elágazó folyamatok elméletéről tanultak felhasználásával mondja meg, hogy milyen relációnak kell fennállnia λ és m között, ha boltos szeretne néha cigarettaszünetet tartani.

(c) Ha az egymásutáni vásárlók érkezése közötti idő várható értéke fél perc és az egyes vásárlók kiszolgálási idejének várható értéke három perc, és a kiszolgálási idő exponenciális eloszlású, akkor hány pénztárat kell működtetni, ahhoz, hogy ne legyen nagy a morgás?

2.1. Ritkítás, címkézés, egyesítés

2.106. Tekintsünk n független $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ paraméterű Poisson folyamatot. Képezzünk ezekből egy újabb pontfolyamatot, melynek pontjai az előbbi független Poisson folyamatok pontjainak uniója. Igazoljuk, hogy az így definiált pontfolyamat szintén Poisson, melynek paramétere $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$

2.107. Az A és B üzletbe a vásárlók X_t, illetve Y_t független Poisson folyamatok szerint érkeznek, melyeknek paramétere λ, illetve μ. (Az időt órákban mérjük.) Mindkét üzlet reggel nyolckor nyit.
(a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy reggel előbb érkezik vásárló az A üzletbe, mint a B-be?
(b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a nyitás utáni első két órában a két üzletbe együttesen pontosan négy vásárló érkezik?
(c) Feltéve, hogy a két üzletbe együttesen a nyitás utáni első két órában összesen négy vásárló érkezett, mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek mindegyike az A üzletbe ment?
(d) Jelöljük T-vel a B üzletbe belépő első vásárló érkezésének (véletlen) idejét. Ekkor X_T azon vásárlók száma, akik az A üzletben jártak *mielőtt* az első vásárló a B üzletbe betette volna a lábát. Írjuk fel az X_T valószínűségi változó eloszlását. Számítsa ki a megoldást kétféleképp is: a folytonos teljes valószínűség tételével (azaz integrálással), illetve az adódó nevezetes eloszlás definiáló tulajdonságának belátásával.

2.108. *Miért érdemes megvárni a következő metrót?*

A 4-es metrók és az utasok is Poisson folyamat szerint érkeznek a Gellért téri megállóba, a metrók átlagosan 5 percenként jönnek, az utasok átlagosan 1 másodpercenként. A metró már régóta működik, éjjel-nappal egyfolytában.

(a) Megérkeztem a megállóba, hagyom elmenni a következő metrót, majd az azután következőre felszállok (az összes többi utas az első metróra száll, amit meglát). Mi a velem együtt felszálló utastársaim számának várható értéke, eloszlása?

(b) Megérkeztem a megállóba (a többi utastól függetlenül), és felszállok az első metróra. Mi a velem együtt felszálló utastársaim számának várható értéke, eloszlása (azaz mekkora a valószínűsége, hogy pontosan k másik utassal utazom együtt)?

2.109. Az A és B telefonokhoz a hívások X_t, illetve Y_t független Poisson folyamatok szerint érkeznek, melyeknek paraméterei λ, illetve μ. Legyen $Z_t := X_t + Y_t$ a két telefonhoz *együttesen* érkező hívások folyamata.
(a) Mutassuk meg, hogy Z_t is Poisson folyamat. Mennyi a Z_t folyamat paramétere?
(b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első hívás az A telefonhoz érkezik?
(c) Jelölje T azt a (véletlen) időt, amikor az első hívás érkezik a későbben megszólaló telefonhoz. Tehát: T az a legkorábbi időpont, amikor már hívás érkezett mindkét telefonhoz. Írjuk fel a T valószínűségi változó sűrűségfüggvényét (sok szenvedés árán, aszerinti esetszétválasztással, hogy melyik csörgött előbb, különböző paraméterű exponenciális eloszlások konvolúciójával) és eloszlásfüggvényét (szenvedés nélkül).

2.110. Legyen $n = 1, 2, \ldots$-re $\mathbf{P}(\nu = n) = (1-p)^{n-1}p$ és legyenek $X_1, X_2, \ldots$ azonos eloszlású $EXP(\lambda)$ eloszlású valószínűségi változók, és legyen minden mindentől független. Lássa be Poisson-folyamatok felhasználásával, hogy a $\sum_{n=1}^{\nu} X_n$ véletlen tagszámú összeg is exponenciális eloszlású!

2.2. Útkereszteződések

A következő feladatokban egy útkereszteződés járműforgalmának egy lehetséges matematikai modelljéről lesz szó. A főútvonalon egymást követő járművek elhaladásának időpontjait Poisson folyamattal modellezzük. A főútvonalon mozgó járműveknek a kereszteződésen való áthaladása ebben az egyszerűsített modellben nem vesz időt igénybe. A mellékútvonalon érkező és a főútvonalat keresztezni akaró jármű áthaladása pozitív időt vesz igénybe, ezért neki addig kell várakoznia, míg a főútvonalon érkező járművek között megfelelő hosszú szabad intervallum nincsen. A főútvonal belátható.

2.111. A főútvonalon egyirányú a forgalom és a járművek elhaladása λ paraméterű Poisson folyamat. A keresztező mellékútvonalon az áthaladás a időt vesz igénybe. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a mellékútvonalon érkező autós k járműnek kell elsőbbséget adjon, mielőtt áthaladhat a kereszteződésen?

2.112. A fenti paraméterek függvényében határozzuk meg azon autók számának várható értékét és szórását, melyeket a mellékútvonalon várakozó autósnak el kell engednie, mielőtt áthaladhat.

2.113. Legyen számszerűen 10 másodperc az mellékútvonalon áthaladás ideje és 5 másodperc a főútvonalon egymásután érkező autók közötti idő várható értéke.
(a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a mellékútvonalon érkező autósnak *legfeljebb* 2 főútvonalon érkezőnek kell elsőbbséget adnia?
(b) Mennyi a megvárandó autók számának várható értéke és szórása?

2.114. Tegyük fel, hogy a főútvonalon kétirányú forgalom van: mindkét irányból λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek a járművek. A mellékútvonalon érkező autósnak $2a$ időre van szüksége az áthaladáshoz. Válaszoljuk meg ilyen körülmények között az előbbi feladatokban feltett kérdéseket.

2.115. A főútvonalon kétirányú a forgalom: mindkét irányból λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek a járművek. A mellékútvonalon áthaladó járműnek mindkét sávon való áthaladásra (egyenként) a időre van szüksége. Ám most a két sáv között elég széles járdasziget van, ahhoz, hogy a mellékútvonalon közlekedő áthaladó jármű a két sáv között megállhasson: először csak a balról érkező járműveknek kell elsőbbséget adnia, míg megfelelő rést nem kap, majd a jobbról érkezőknek ad elsőbbséget. Határozzuk meg a teljes várakozási idő várható értékét és szórását. Hasonlítsuk össze az eredményt az előző feladatéval.

2.116. Tekintsünk egy λ paraméterű Poisson folyamatot. Legyenek $t > 0$ és $a > 0$ rögzített számok. Jelöljük $P(\lambda, a, t)$-vel annak a valószínűségét, hogy a $(0, t)$ intervallumban van olyan a hosszúságú részintervallum, amelybe nem esik a Poisson folyamatnak pontja. Határozzuk meg a $P(\lambda, a, t)$ függvényt.

2.117. Tekintsünk egy λ paraméterű Poisson folyamatot. Legyenek $\mu > 0$ és $a > 0$ rögzített számok, és ξ egy μ paraméterű (μ^{-1} várható értékű) exponenciális eloszlású valószínűségi változó, amely független a Poisson folyamattól. Jelöljük $W(\lambda, a, \mu)$-vel annak a valószínűségét, hogy a $(0, \xi)$ (véletlen hosszúságú) intervallumban van olyan a hosszúságú részintervallum, amelybe nem esik a Poisson folyamatnak pontja. Határozzuk meg a $W(\lambda, a, t)$ függvényt.

2.118. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független, azonos λ paraméterű *csonka exponenciális eloszlású* valószínűségi változók: $\mathbf{P}(\xi_j < x) = (1 - e^{-\lambda x})/(1 - e^{-\lambda a})$, ha $x \in [0, a]$; $\mathbf{P}(\xi_j < x) = 0$, ha $x \in (-\infty, 0)$; $\mathbf{P}(\xi_j < x) = 1$, ha $x \in (a, \infty)$. Határozzuk meg $\eta_n := \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ eloszlását.

2.3. Tejút

A következő feladatok síkbeli és térbeli Poisson pontfolyamatra vonatkozik. A $\mathbb{R}^n$-beli λ paraméterű (vagy sűrűségű, vagy intenzitású) homogén Poisson pontfolyamat egy olyan véletlen ponteloszlás $\mathbb{R}^n$-ben amleyet a következő tulajdonság jellemez:
Ha adottak $k \in \mathrm{N}$ és $A_1, A_2, \dots, A_k \subset \mathbb{R}^n$ diszjunkt, Borel-mérhető és véges Lebesgue mértékű részhalmazai $\mathbb{R}^n$-nek, akkor az ezekbe a halmazokba eső pontok számai független Poisson eloszlású valószínűségi változók melyeknek paraméterei (várhatóértékei) rendre $\lambda|A_1|, \lambda|A_2|, \dots, \lambda|A_k|$.
Gondoljunk a csillagok elhelyezkedésére az égen, az ibolyák elhelyezkedésére egy hatalmas réten, stb.

2.119. Tekintsünk az $\mathbb{R}^2$ síkon egy λ sűrűségű, homogén Poisson pontfolyamatot. Válasszuk ki a sík egy tetszőleges, de rögzített pontját (az origót) és határozzuk meg a hozzá legközelebb eső véletlen pont távolságának sűrűségfüggvényét.

2.120. A fenti feladat körülményei között jelöljük $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \dots$-al a véletlen pontok távolságait az origótól, növekvő sorrendben. Határozzuk meg ρ_n sűrűségfüggvényét, várható éretékét és szórását.

2.121. Jelölje H az égboltnak azt a részét, ami 10 fényévnél távolabb van tőlünk, de 20 fényévnél közelebb. Tegyük fel, hogy egy köbfényévnyi nagyságú térrészbe várhatóan 1 csillag esik, és minden csillag egyforma fényes. Egy 10 fényévre levő csillag fényereje egységnyi nagyságúnak látszik. Mi a H-ból a szemünkbe érkező fény mennyiségének várható értéke, szórásnégyzete?

Súgás: osszuk H-t koncentrikus, infinitezimális vastagságú karélyokra...

2.122. Miért nem világos az éjszakai égbolt? Alkossunk matematikai modellt a világegyetemben lévő csillagok helyzetére és az éjszakai égbolt látványára. (Különös tekintettel a Tejútra ...)

3. Folytonos idejű Markov láncok

3.123. Legyen G egy véges állapotterű, irreducibilis, folytonos idejű Markov lánc infinitezimális generátora. Ekkor a G mátrix átlós elemei negatívak, nem-átlós elemei nem-negatívak és sorösszegei nullák.
(a) Legyen a olyan pozitív szám, amely (szigorúan) nagyobb a G mátrix minden átlós elemének abszolút értékénél. Legyen $P := a^{-1}G + I$. Mutassuk meg, hogy P ugyanazon véges állapottér feletti irreducibilis és aperiodikus diszkrét idejű Markov lánc átmenet valószínűségeinek mátrixa.
(b) A (a)-beli eredmény felhasználásával bizonyítsuk be, hogy a G mátrixnak 0 egyszeres sajátértéke, melyhez tartozó baloldali sajátvektor (sorvektor) valószínűségi eloszlás az állapottéren és G minden további sajátértékének negatív a valós része.

3.124. Legyen N_t egy λ paraméterű Poisson-folyamat és X_n egy diszkrét idejű Markov lánc az S véges állapottéren, aminek átmenetvalószínűség-mátrixa Q, azaz $Q_{i,j} = \mathbf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$. Tekintsük az $Y_t = X_{N_t}$ folytonos idejű Markov láncot.

(a) Legyen $i, j \in S$-re $P^t_{i,j} = \mathbf{P}(Y_t = j \mid Y_0 = i)$. Fejezze ki a P^t mátrixot Q és t függvényeként.

(b) Legyen $S = \{1, 2\}$, $\lambda = 2$, $Q_{1,1} = \frac{1}{2}, Q_{1,2} = \frac{1}{2}, Q_{2,1} = \frac{1}{3}, Q_{2,2} = \frac{2}{3}$. Határozza meg azoknak a $\hat{\lambda}$ paramétereknek a halmazát, amikhez van olyan $\hat{Q}$ átmenetmátrix, hogy az $\hat{Y}_t = \hat{X}_{\hat{N}_t}$ folytonos idejű Markov lánc $\hat{P}^t_{i,j} = \mathbf{P}(\hat{Y}_t = j \mid \hat{Y}_0 = i)$ átmenetvalószínűség-mátrixaira $\hat{P}^t = P^t$ teljesül minden $t \geq 0$-ra!

3.125. Legyen X_t folytonos idejű Markov lánc a $\{1, 2\}$ állapottéren, melynek ugrási rátái: $\lambda(1 \to 2) = 1$, illetve $\lambda(2 \to 1) = 4$.

(a) Írjuk fel az átmenet valószínűségek P^t félcsoportját.

(b) Ha $X_0 = 1$, akkor mi X_t eloszlása? Körülbelül mekkora legyen t, hogy X_t eloszlása 10 tizedesjegyig egyezzen a stacionárius eloszlással?

3.126. Egy üzemben 5 gép és 5 szerelő van. A gépek hibátlan üzemelésének ideje 1 paraméterű exponenciális eloszlású. Ha egy gép elromlik, akkor egy szerelő azonnal elkezdi javítani a gépet. A szerelés ideje exponenciális eloszlású 2 paraméterrel. A működési és szerelési idők függetlenek egymástól, eredetileg minden gép működik. Határozza meg a t időpontban működésben levő gépek számának eloszlását, azaz annak a valószínűségét, hogy t-kor pontosan k gép üzemel, $k = 0, \dots, 5$.

3.127. Legyen X_t irreducibilis folytonos idejű Markov lánc egy véges vagy megszámlálható S állapottéren. Bizonyítsuk be, hogy bármely $\alpha, \beta \in S$ és $t > 0$ esetén $\mathbf{P}(X_t = \beta | X_0 = \alpha) > 0$.

3.128. Legyen X_t folytonos idejű Markov lánc az $S = \{1, 2, 3, 4\}$ állapottéren, melynek infinitezimális generátora

$$G = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Írjuk fel az X_t Markov lánc stacionárius (invariáns) eloszlását.
(b) Tegyük fel, hogy a Markov lánc az 1 állapotból indul. Mennyi az első ugrásig eltelt idő várható értéke?
(c) Újból tegyük fel, hogy a Markov lánc az 1 állapotból indul. Mennyi a 4 állapot első elérési idejének várható értéke?

3.129. Egy üzemben 3 gép és 2 szerelő van. A gépek hibátlan üzemelésének ideje λ paraméterű exponenciális eloszlású. Ha egy gép elromlik, és van legalább egy szabad szerelő, akkor egy szerelő azonnal elkezdi javítani a gépet. Ha nincs szabad szerelő, akkor várni kell addig, ameddig valamelyik szerelő felszabadul. A szerelés ideje exponenciális eloszlású 2λ paraméterrel. A működési és szerelési idők függetlenek egymástól. Legyen $X(t)$ a t -kor működő gépek száma ($t > 0$).

(a) Adja meg ennek a folyamatnak az infinitezimális generátorát!

(b) Nagy idő eltelte után kb. mennyi a valószínűsége annak, hogy egy adott pillanatban pontosan k gép üzemel ($k = 0, 1, 2, 3$) ?

3.130. Egy pénzváltó irodához 3 -paraméterű homogén Poisson folyamat szerint érkeznek az ügyfelek. Az irodában egyetlen kiszolgáló dolgozik, és egy-egy ügyfél kiszolgálásának az időtartama 5 -paraméterű exponenciális eloszlást követ. Az iroda olyan kicsi, hogy egyidejűleg csak 2 ügyfél lehet az irodában. Ha az iroda tele van, akkor az újabb ügyfelek a konkurens céghez mennek. Az iroda nyitásától számítva sok idő eltelte után érek oda.

(a) Mi a (közelítő) valószínűsége annak, hogy az irodában van hely a számomra?

(b) Tegyük fel, hogy bejutok az irodába. Emellett a feltétel mellett az irodában eltöltött időmnek mennyi a várható értéke, és

(c) mi az időtartam eloszlásának a sűrűségfüggvénye?

3.131. Egy boltba λ -paraméterű homogén Poisson folyamat szerint érkeznek a vásárlók. A boltban egyetlen eladó dolgozik. Egy-egy ügyfél kiszolgálásának az időtartama μ-paraméterű exponenciális eloszlást követ, $\mu > \lambda$. Sok idő eltelte után betoppanok én és beállok a sorba. Mi az eloszlása annak az időtartamnak, amit a boltban töltök? Lásd 2.110. feladat.

3.132. *A Yule-folyamat*

Egy petricsészében $t = 0$-kor van egy amőba. Egy amőba $EXP(1)$ idő elteltével kettéosztódik, és lesz belőle két ugyanolyan amőba, mint az eredeti. Lássa be, hogy a t időpontban a petricsészében lévő amőbák $X(t)$ száma $GEO(e^{-t})$ eloszlású (az a fajta geometriai, amikor nemcsak a kudarcokat számoljuk, hanem beleszámítjuk a sikeres próbálkozást is).

(a) Először lássa be oly módon, hogy felírja az $X(t)$ folyamat infinitezimális generátorát, és leellenőrzi, hogy az amőbák eloszlásának időbeli fejlődésére felírható differenciálegyenlet-rendszert és a $\mu_k(0) = \delta_{k,1}$ kezdeti feltételt valóban kielégítik a $\mu_k(t) = (1 - e^{-t})^{k-1} e^{-t}$ függvények.

(b) Majd annak a felhasználásával, hogy ha $U_1, \dots, U_n$ független és $EXP(1)$ eloszlású valószínűségi változók, akkor $\max\{U_1, \dots, U_n\}$ ugyanolyan eloszlású, mint a $V_1 + \dots + V_n$ független összeg, ahol $V_i \sim EXP(i)$.

3.133. Legyen X_t folytonos idejű születési/halálozási folyamat, melynek születési rátái $\lambda_n = 1 + (n+1)^{-1}$, halálozási rátái $\mu_n = 1$. Tranziens-, null rekurrens- vagy pozitív rekurrens-e ez a folyamat? És ha $\lambda_n = 1 - (n+2)^{-1}$?

3.134. Az $X_t \in \mathrm{N}$ Markov folyamat egy populáció méretének időbeli fejlődését modellezi. A populáció minden egyes egyede a többiektől függetlenül λ rátával szül egy új egyedet és μ rátával elhal. Azaz: X_t születési/halálozási folyamat, melynek születési rátái $\lambda_n = n\lambda$, halálozási rátái $\mu_n = n\mu$.

(a) Mely λ és μ paraméter értékek mellett hal ki egy valószínűséggel a populáció?

(b) Legyen $f : \mathrm{N} \to \mathbb{R}$. Lássa be, hogy

$$\lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h}\mathbf{E}\big(f(X_{t+h}) - f(X_t) \mid X_t = k\big) = \big(f(k+1) - f(k)\big)\cdot k \cdot \lambda + \big(f(k-1) - f(k)\big)\cdot k \cdot \mu$$

(c) Legyen $\mu = \lambda = 1$, legyen $X_0 = 1$. Lássa be, hogy ha $G(t,z) := \mathbf{E}(z^{X_t})$, akkor $G(t,z)$ megoldja az alábbi elsőrendű homogén lineáris parciális differenciálegyenletet:

$$\partial_t G(t,z) = (z-1)^2 \partial_z G(t,z)$$

Segítség: alkalmazza az előző részfeladat gondolatmenetét az $f(x) = z^x$ függvényre.

(d) Oldja meg az egyenletet a $G(0,z) = z$ kezdeti feltétellel. Segítség: ha $\dot{z}(t) = -\left(z(t)-1\right)^2$, akkor $\frac{d}{dt}G(t,z(t)) = 0$. Ennek segítségével lássa be, hogy $X_0, X_1, X_2, \ldots$ az egy kritikus Galton-Watson-féle elágazó folyamat, melynek utódeloszlása $GEO(\frac{1}{2})$!

3.135. Módosítsuk az előbbi populáció modellt úgy, hogy a populáció egyedeinek születése és elhalása mellett ν rátával egy bevándorló érkezik kívülről. Így olyan születési/halálozási folyamatot kapunk, melynek születési rátái $\lambda_n = n\lambda + \nu$, halálozási rátái pedig változatlanul $\mu_n = n\mu$. Mely λ, μ, ν paraméter értékek mellett lesz a folyamat tranziens, null rekurrens, illetve pozitív rekurrens?

3.136. Tekintsünk egy születési/halálozási folyamatot, melynek születési rátái $\lambda_n = 1/(n+1)$, halálozási rátái pedig $\mu_n = 1$. Mutassuk meg, hogy a folyamat pozitív rekurrens és találjuk meg a stacionárius (invariáns) eloszlását.

3.137. Jelöljön X_t egy folytonos idejű, irreducibilis, stacionárius Markov láncot a véges S állapottéren. Jelölje G az infinitezimális generátorát, π a stacionárius eloszlását. Lássa be (a 1.78. feladat jelöléseivel), hogy ha $f : S \to \mathbb{R}$, akkor

$$-\langle f, Gf\rangle_\pi = \frac{1}{2}\lim_{h\to 0_+}\frac{1}{h}\mathbf{Var}\big(f(X_{t+h}) - f(X_t)\big)$$

3.138. Egy parkolóhelyen N autó számára van férőhely. Tegyük fel, hogy az egyes autók parkolási ideje egymástól független μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. A parkolni szándékozó autók érkezési ideje λ paraméterű Poisson folyamatot alkot, mely független a parkolási időktől. Jelölje P_n a következő valószínűséget a *stacionárius állapotban*:
(1) ha $0 \le n \le N$, $P_n = \mathbf{P}$(a parkolóhelyen n autó parkol),
(2) ha $n > N$, $P_n = \mathbf{P}$(a parkolóhely tele van és további $n - N$ autó várakozik a bejutásra).
Határozzuk meg a P_n, $n \ge 0$ valószínűségeket a következő három esetben:
(a) Ha egy autós olyankor érkezik a parkolóhelyhez, amikor az tele van, addig várakozik, amíg hely nem ürül.
(b) Ha egy autós olyankor érkezik a parkolóhelyhez, amikor az tele van, azonnal távozik.
(c) Ha egy autós olyankor érkezik a parkolóhelyhez, amikor az tele van, maximum egy véletlen — ν paraméterű exponenciális eloszlású — ideig várakozik. Ha addig nem jut be a parkolóhelyre, távozik.

4. Martingálok

4.1. A feltételes várható érték

4.139. Két kockával dobunk. Legyen X az egyik kocka eredménye, Z pedig a kettő összege. Számolják ki $\mathbf{E}(X \mid Z)$-t.

4.140. Legyen X egy N-értékű valószínűségi változó, amire $\forall n \in$ N-re $\mathbf{P}(X = n) > 0$. Lássa be, hogy ha Y ugyanazon a valószínűségi mezőn értelmezett véges várható értékű valószínűségi változó, és $\mathcal{F} = \sigma(X)$ pedig az X által generált szigma-algebra, akkor

$$\mathbf{E}(Y \mid \mathcal{F}) = \sum_{n \in \mathrm{N}} \frac{\mathbf{E}\big(\mathbb{1}[X = n] \cdot Y\big)}{\mathbf{P}(X = n)} \cdot \mathbb{1}[X = n]$$

Segítség: azt kell belátni, hogy az egyenlőségjel jobb oldalán levő valószínűségi változó kielégíti a feltételes várhatóérték absztrakt definícióját.

4.141. Lássa be, hogy az X valószínűségi változó által generált $\sigma(X)$ szigma-algebra szerint mérhető Y valószínűségi változók majdnem biztosan felírahatóak $Y = \varphi(X)$ alakban, ahol $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető-függvény.

Segítség: legyen először Y olyan, hogy $\mathbf{P}(Y = 0 \text{ vagy } Y = 1) = 1$.

4.142. Legyenek X és Y valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn értelmezve, és jelölje $\mathcal{F}$ az X által generált σ-algebrát. Bizonyítandó, hogy X es Y akkor és csak akkor függetlenek, ha tetszőleges $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ korlátos, mérhető függvényre

$$\mathbf{E}(\varphi(Y)|\mathcal{F}) = \mathbf{E}(\varphi(Y))$$

4.143. Legyen X és Y együttesen abszolút folytonos eloszlású, legyen az együttes sűrűségfüggvényük $f(x, y)$. Lássa be, hogy

$$\mathbf{E}(Y|X) = \mathbf{E}(Y|\sigma(X)) = \frac{\int y f(X, y) dy}{\int f(X, y) dy}$$

4.144. Legyen Y mérhető a $\mathcal{G}$ szigma-algebra szerint. Bizonyítandó, hogy

$$\mathbf{E}(X|\mathcal{G}) \geq Y \iff \forall A \in \mathcal{G} \quad \mathbf{E}(\mathbb{1}_A X) \geq \mathbf{E}(\mathbb{1}_A Y)$$

4.145. Minden konvex $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényhez és minden $x_0 \in \mathbb{R}$-hez van olyan $a, b \in \mathbb{R}$, hogy minden x-re $ax + b \leq f(x)$, és $f(x_0) = ax_0 + b$ (például $b = \lim_{h \to 0_+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ megteszi). Ennek segítségével lássa be a feltételes várhatóérték Jensen-egyenlőtlenségét:

$$\mathbf{E}(f(X) \mid \mathcal{F}) \geq f(\mathbf{E}(X \mid \mathcal{F}))$$

4.146. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ függetlenek és azonos eloszlásúak. Legyen $m \leq n$ esetén $S_m = \sum_{k=1}^{m} X_k$. Határozza meg $\mathbf{E}(S_m|S_n)$ értékét!

4.147. A ketyeregyár n darab ketyerét gyártott, mindegyik ψ valószínűséggel hibás. A minőségellenőrzés minden hibás ketyeréről δ valószínűséggel állapítja meg, hogy hibás. Jelölje X a hibás ketyerék számát, Y pedig a minőségellenőrzés által hibásnak nyilvánítottak számát. Mutassa meg, hogy

$$\mathbf{E}(X|Y) = \frac{n\psi(1-\delta) + (1-\psi)Y}{1 - \delta\psi}$$

4.148. Legyen $X_1, X_2, \ldots$ homogén Markov lánc a véges S állapottéren, aminek az átmenetmátrixa P. Legyen $f : S \to \mathbb{R}$.

$$\mathbf{E}\big(f(X_n)|\sigma(X_1, \ldots, X_{n-1})\big) = ?$$

4.149. Tekintsünk egy homogén, λ paraméterű Poisson folyamatot, és legyen $X(a, b)$ az (a, b) intervallumban lévő pontok száma. Legyen az (a, b) intervallum a (c, d) intervallum belsejében.

(a) Határozza meg az $\mathbf{E}(X(c, d)|X(a, b))$ feltételes várható értéket!

(b) Határozza meg az $\mathbf{E}(X(a, b)|X(c, d))$ feltételes várható értéket!

4.150. Az A és B telefonokhoz a hívások X_t, illetve Y_t független Poisson folyamatok szerint érkeznek, melyeknek paraméterei λ, illetve μ. Legyen $Z_t := X_t + Y_t$ a két telefonhoz *együttesen* érkező hívások folyamata. Legyen $0 < a < c < b < d$. Legyen $X(a, b) = X_b - X_a$, stb.

(a) $\mathbf{E}\left(X(c, d)|X(a, b)\right) = ?$

(b) $\mathbf{E}\left(Z(c, d)|X(a, b)\right) = ?$

(c) $\mathbf{E}\left(X(c,d)|Z(a,b)\right) = ?$

4.151. *A feltételes szórásnégyzet Pithagorasz-tétele*

Legyen $\mathbf{Var}(X|\mathcal{G}) := \mathbf{E}\big((X - \mathbf{E}(X|\mathcal{G}))^2|\mathcal{G}\big)$. Lássa be, hogy $\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}(\mathbf{Var}(X|\mathcal{G})) + \mathbf{Var}(\mathbf{E}(X|\mathcal{G}))$.

4.152. Legyen X es Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \frac{\exp(-x/y)\exp(-y)}{y}\mathbb{1}[0 < x, 0 < y]$$

Számítsa ki $\mathbf{Var}(X)$ értékét (minél kevesebb integrálással)! Segítség: egy m várható értékű exponenciális eloszlású valószínűségi változó szórásnégyzete m^2.

4.153. Egy villamos elindulási időpontja egyenletes a $[0,t]$ intervallumon. Az utasok egy λ paraméterű Poisson-folyamat szerint érkeznek. Számítsa ki a villamosra felszálló utasok számának szórásnégyzetét!

4.154. Tekintsünk egy $\lambda = p$ rátájú X_t Poisson-folyamatot és egy tőle független $\mu = 1 - p$ rátájú Y_t Poisson-folyamatot. A 2.107. feladatból tudjuk, hogy ha Z-vel jelöljük azt, ahányszor Y_t ugrott X_t első ugrásáig, akkor $Z \sim GEO(p)$. Számítsa ki a geometriai eloszlás szórásnégyzetét 4.151. feladat felhasználásával. Emlékeztető: Ha U Poisson eloszlású, akkor $\mathbf{D}^2(U) = \mathbf{E}(U)$, ha V exponenciális eloszlású, akkor $\mathbf{D}^2(V) = \mathbf{E}(V)^2$.

4.155. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ függetlenek és azonos eloszlásúak és ν tőlük független N-értékű valószínűségi változó. Legyen $Y = \sum_{k=1}^{\nu} X_k$. Fejezze ki $\mathbf{Var}(Y)$ értékét $\mathbf{E}(X_1)$, $\mathbf{E}(\nu)$, $\mathbf{Var}(X_1)$, $\mathbf{Var}(\nu)$ segítségével!

4.156. Tekintsük a következő folytonos időben fejlődő véletlen gráfot 4 csúcson: minden él kikapcsolt vagy bekapcsolt állapotban tud lenni minden időpontban. A kikapcsolt élek λ rátával kapcsolódnak be, továbbá minden csúcsba egy-egy μ rátájú Poisson-folyamat szerint villámok csapnak, és ha egy csúcsba belecsapott egy villám, akkor a tűz a bekapcsolt élek mentén terjed és elégeti azokat: a csúcs bekapcsolt összefüggő komponensének összes éle azonnal kikapcsolódik. Jelölje $\mathcal{C}_k(t)$ a k nagyságú komponensek számát t-kor. Ekkor az

$$X(t) := \Big(\mathcal{C}_1(t), \mathcal{C}_2(t), \mathcal{C}_3(t), \mathcal{C}_4(t)\Big)$$

véletlen vektor időbeli fejlődése önmagában is Markov láncot alkot (ezt nem kell belátni).

(a) Írja fel a Markov lánc infinitezimális generátorát (ami egy 5×5-ös mátrix lesz).

(b) Tegyük fel, hogy $\lambda = \mu = 1$, és hogy $X(0) = (2,1,0,0)$. Számítsa ki a Markov lánc második ugrásáig eltelt idő szórásnégyzetét (elég egy olyan formuláig eljutni, amit már egy négyműveletes számológéppel is ki lehet számolni)!

4.2. A martingál-tulajdonság

4.157. Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ együttesen abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változók, legyen az együttes sűrűségfüggvényük $f(x_1, \ldots, x_n)$ és $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ az általuk generált természetes filtráció. Milyen feltételeknek kell teljesülnie f-re hogy $X_1, \ldots, X_n$ martingált alkosson?

4.158. Legyen $M_1, M_2, \ldots$ martingál $\big(\mathcal{F}_n\big)_{n=1}^{\infty}$-re nézve. Legyen $\mathcal{G}_k = \sigma(M_1, M_2, \ldots, M_k)$ az általuk generált természetes filtráció. Mutassa meg, hogy M_n martingál $\big(\mathcal{G}_n\big)_{n=1}^{\infty}$-re nézve is.

4.159. Lássa be, hogy ha X_n szupermartingál és C_n korlátos, nemnegatív, jósolható folyamat, akkor $Y_n = \sum_{k=1}^{n} C_n \cdot (X_k - X_{k-1})$ is szupermartingál.

4.160. Legyenek $X_1, X_2, X_3, \ldots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók és $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ az általuk generált természetes filtráció. Legyen $m(\gamma) := \mathbf{E}(e^{\gamma X_i})$ e valószínűségi változók (közös) momentum generáló függvénye. Tegyük fel, hogy valamely rögzített $\gamma \in \mathbb{R}$-re $m(\gamma)$ véges. Legyen $S_0 = 0$ és $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, ha $n > 0$. Értelmezzük az

$$M_n := m(\gamma)^{-n} \exp(\gamma S_n)$$

valószínűségi változókat. Bizonyítandó, hogy M_n *martingál* az $\mathcal{F}_n$ természetes filtrációra nézve.

4.161. Legyen X_i, $i = 1, 2, \dots$ véges várhatóértékű valószínűségi változók sorozata adaptált az $\left(\mathcal{F}_n\right)_{n=1}^{\infty}$ filtrációra nézve, ahol $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Bizonyítandó, hogy a

$$M_0 := 0, \qquad M_n := \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mathbf{E}(X_i|\mathcal{F}_{i-1}))$$

valószínűségi változó sorozat nulla várhatóértékű martingál.

4.162. *Diszkrét idejű Doob-Meyer-dekompozíció*

Egy $Y_1, Y_2, \dots$ sztochasztikus folyamatról azt mondjuk, hogy jósolható az $\left(\mathcal{F}_n\right)_{n=0}^{\infty}$ filtrációra nézve, ha Y_n mérhető $\mathcal{F}_{n-1}$-re nézve ($\mathcal{F}_0$ legyen a triviális szigma-algebra). Lássa be, hogy ha az $X_1, X_2, \dots$ az $\mathcal{F}_n$-hez adaptált sztochasztikus folyamatra teljesül $\mathbf{E}(|X_n|) < +\infty$, akkor X_n egyértelműen állítható elő egy jósolható Y_n folyamat és egy 0 várható értékű M_n martingál összegeként.

4.163. Legyen $X_0, X_1, X_2, \dots$ Markov lánc az S véges állapottéren, jelöljük P-vel az átmenetmátrixát. Legyen $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ a sztochasztikus folyamat által generált természetes filtráció. Legyen $f : S \to \mathbb{R}$. Mutassa meg (a 4.161. és 4.148. feladatok segítségével), hogy az alább definiált M_n martingál erre a filtrációra nézve.

$$M_n = f(X_n) + \sum_{k=1}^{n-1} ((I - P)f)(X_k) - (Pf)(X_0)$$

4.164. (a) Lássa be a 4.151. feladat segítségével, hogy ha $M_0, \dots, M_n$ martingál, akkor

$$\mathbf{Var}(M_n) = \mathbf{Var}(M_0) + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{Var}(M_k - M_{k-1})$$

(b) Legyen $X_0, X_1, X_2, \dots$ irreducibilis, aperiodikus, stacionárius Markov lánc az S véges állapottéren, jelöljük P-vel az átmenetmátrixát, π-vel a stacionárius eloszlását. Legyen $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ a sztochasztikus folyamat által generált természetes filtráció. Legyen $f : S \to \mathbb{R}$. Tegyük föl, hogy $\langle \mathbb{1}, f \rangle_\pi = 0$. Lássa be, hogy van olyan $g : S \to \mathbb{R}$, hogy $\langle \mathbb{1}, g \rangle_\pi = 0$ és $g - Pg = f$. A 4.163. feladat és az előző részfeladat segítségével lássa be a Green-Kubo-formulát (lásd 1.81. feladat), azaz a következő két egyenlőséget:

$$\lim_{N \to \infty} \mathbf{Var}\left(\frac{\sum_{n=0}^{N-1} f(X_n)}{\sqrt{N}}\right) = \langle g, g \rangle_\pi - \langle Pg, Pg \rangle_\pi = 2\langle f, (I - P)^{-1} f \rangle_\pi - \langle f, f \rangle_\pi$$

Segítség: Bizonyítás közben jól jön a szórás-háromszög-egyenlőtlenég, és a belőle levezethető

$$|\mathbf{D}(X) - \mathbf{D}(Y)| \le \mathbf{D}(X - Y)$$

4.165. m (1-től m -ig számozott) golyót helyezünk el k (1-től k-ig számozott) urnában. Diszkrét időegységenként véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) kiválasztunk egy golyót, kiemeljük a helyéről és áthelyezzük egy másik urnába, melyet véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) választunk ki. Legyen X_n az első urnában lévő golyók száma az n-edik lépés után és $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$
(a) Határozzuk meg $\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$-et.
(b) Értelmezzünk Z_n valószínűségi változókat, melyek martingált alkotnak $\mathcal{F}_n$-re nézve.

4.166. Legyen Z_n, $n = 0, 1, 2 \dots$ elágazó folyamat. Tegyük fel, hogy egy szülő gyermekei számának μ várható értéke és σ^2 szórásnégyzete véges. Jelöljük $\mathcal{F}_n$-nel a természetes filtrációt.
(a) Bizonyítandó, hogy

$$M_n := \frac{Z_n}{\mu^n}$$

martingál.
(b) Bizonyítsák be, hogy

$$\mathbf{E}(Z_{n+1}^2 \,|\, \mathcal{F}_n) = \mu^2 Z_n^2 + \sigma^2 Z_n.$$

(c) A (b) pontbeli eredmény felhasználásával bizonyítsák be, hogy

$$N_n := M_n^2 - \frac{\sigma^2}{\mu^{n+1}} \frac{\mu^n - 1}{\mu - 1} M_n$$

szintén martingál.
(d) Az előző pont eredményének felhasználásával bizonyítsák be, hogy $\mu > 1$ esetén az M_n martingál egyenletesen korlátos L^2-ben (azaz $\sup_n \mathbf{E}(M_n^2) < \infty$), míg $\mu \leq 1$ esetén $\mathbf{E}(M_n^2) \to \infty$. A szuperkritikus elágazó folyamatokból származtatott martingál L^2-korlátossága akkor jön jól, ha be akarjuk látni, hogy az M_n martingál majdnem biztosan konvergál egy M_∞ valószínűségi változóhoz.

4.167. Legyen $X_1, X_2, \ldots$ az $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots$ filtrációhoz adaptált valószínűségi változó sorozat és a_n, b_n valós számok sorozata. Tegyük fel, hogy

$$\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = a_n X_n + b_n.$$

Találjunk A_n, B_n valós szám sorozatot úgy, hogy $Z_n := A_n X_n + B_n$ martingál legyen.

4.168. *A log-optimális portfólió*

Az n-edik fogadás során egységnyi fogadási összeg nyereménye ξ_n, ahol $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek közös eloszlása $\mathbf{P}(\xi_n = +1) = p$, $\mathbf{P}(\xi_n = -1) = q$, $q + p = 1$, $p > 1/2$. Magyarul: $q < 1/2$ valószínűséggel elveszítjük a befizetett összeget és $p = 1 - q > 1/2$ valószínűséggel a dupláját nyerjük vissza. Az n-edik fogadás során C_n összegre fogadunk. Y_0 a kezdeti vagyonunk és Y_n-el jelöljük az n-edik fogadás eredményhirdetése utáni teljes vagyonunkat. Nyilván: $0 \leq C_n \leq Y_{n-1}$, $n > 0$. Célunk: rögzített N számú fogadás során maximalizálni az $\mathbf{E}(\log Y_N - \log Y_0)$ *várható nyereség rátánkat.* $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ a folyamat természetes filtrációja.

(a) Bizonyítandó, hogy tetszőleges *jósolható* C_n fogadási stratégia mellett $Z_n := \log Y_n - n\alpha$ szupermartingál, ahol $\alpha = p \log p + q \log q + \log 2$. Ebből következik, hogy $\mathbf{E}(\log Y_N - \log Y_0) \leq N\alpha$.

(b) Ám létezik olyan fogadási stratégia, amely mellett a fenti Z_n martingál. Tehát a várható nyereség ráta fenti optimális felső korlátja megfelelő stratégia választással elérhető.

4.169. *A Pólya féle urna modell*

Egy urnában piros és kék golyók vannak. Kezdetben egy-egy mindkét színből. Minden egyes $n \in \mathbb{N}$ diszkrét időpontban kihúzunk egy véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) kiválasztott golyót az urnából, majd visszatesszük a kihúzottat és még egy ezzel azonos színű golyót is beteszünk az urnába. Így az n-edik menet után $n+2$ golyó lesz az urnában. Jelöljük ρ_n-nel, illetve β_n-nel az első n húzás során kihúzott piros, illetve kék golyók számát. ($\rho_0 = \beta_0 = 0$ és $\rho_n + \beta_n = n$. Az n-edik húzás után $\rho_n + 1$, illetve $\beta_n + 1$ piros, illetve kék golyó van az urnában.) A folyamat természetes filtrációja $\mathcal{F}_n$. Legyen $M_n := (\beta_n + 1)/(n + 2)$ az urnában lévő kék golyók aránya az n-edik menet után.

(a) Bizonyítsuk be, hogy M_n martingál.

(b) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{P}(\beta_n = k) = 1/(n+1)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Azaz a piros/kék golyók száma minden egyes lépés után *egyenletes eloszlású.*

(c) Hamarosan belátjuk az u.n. martingál konvergencia tételt, amelyből következik, hogy $\lim_{n\to\infty} M_n =: M_\infty$ egy valószínűséggel létezik. Ezt feltéve, milyen eloszlású M_∞?

4.170. SZÁMÍTÓGÉPES SZIMULÁCIÓ. Írjanak egy szimuláló programot a Pólya féle urnamodell szimulálására. Egy-egy kék és piros golyóval indulva végezzenek 1000 húzást és jegyezzék fel a kék golyók arányát az ezredik menet után. E kísérletet végezzék el 2000-szer és végezzenek elemi statisztikai elemzést: az esetek hanyad részében esik a kék golyók végső aránya a $[0, 0.1), [0.1, 0.2), \ldots, [0.9, 1]$ részintervallumokba? Igazolja-e a kompjuteres vizsgálat az előző feladat (d) pontjában kapott eredményt?

4.171. (Pólya-féle urnamodell, még egyszer.)
Az 5. feladat feltételeit és jelölését használjuk. Legyen $\theta \in [0, 1]$ rögzített paraméter. Bizonyítandó, hogy

$$N_n(\theta) := \frac{(n+1)!}{\beta_n!(n-\beta_n)!} \theta^{\beta_n} (1-\theta)^{n-\beta_n}$$

martingál.

4.172. *Bayes urna — A β-eloszlás*

Érmedobást játszunk a következő képpen: először választok egy Θ véletlen számot egyenletes eloszlással a $[0, 1]$ intervallumból. A Θ számot *nem közölve* adok magának egy olyan *hamis* érmét, amely Θ valószínűséggel mutat fejet és $(1 - \Theta)$ valószínűséggel mutat írást. Maga a Θ értéket nem ismeri, csak a fej-írás sorozatot figyeli meg. Legyen β_n az első n dobás során megfigyelt 'fej'-ek száma.

(a) Bizonyítandó, hogy az itt leírt β_n, $n = 1, 2, \ldots$ folyamat eloszlása azonos az 4.169. feladatban szintén β_n-el jelölt folyamatéval.

(b) Bizonyítandó, hogy a 4.171. feladatban bevezetett $N_n(\theta)$ pontosan a Θ valószínűségi változó feltételes sűrűségfüggvénye, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ megfigyelés mellett.

4.173. *Kis statisztika*
Egy érme θ valószínűséggel mutat FEJet és $1-\theta$ valószínűséggel mutat ÍRÁSt. A $\theta \in (0,1)$ értéket nem ismerjük. Legyen $a, b \in (0,1)$ és két lehetséges hipotézisünk:

$$A := \{\theta = a\}, \qquad B := \{\theta = b\}$$

Legyen

$$Z_n := \frac{\mathbf{P}(X_1, X_2, \ldots, X_n | A)}{\mathbf{P}(X_1, X_2, \ldots, X_n | B)},$$

ahol $\mathbf{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n | A)$ (illetve $\mathbf{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n | B)$) az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ FEJ-ÍRÁS sorozat megjelenésének valószínűsége az A (illetve B) hipotézis mellett. Mutassuk meg, hogy a Z_n sorozat pontosan akkor martingál, ha a B hipotézis igaz.

4.174. Tekintsük az S véges állapottéren az irreducibilis, szubsztochasztikus P mátrixot, és a hozzá tartozó Markov láncot (amit úgy kapunk, hogy hozzáveszünk az állapottérhez egy elnyelő $\hat{x}$ állapotot, és a maradék valószínűségekkel mindenhonnan az elnyelő állapotba lépünk). A *Perron-Frobenius*-tétel miatt P legnagyobb abszolútértékű λ sajátértéke $0 < \lambda < 1$, a sajátérték egyszeres, a hozzá tartozó jobb oldali $\mathbf{v}$ sajátvektor csupa pozitív elemből áll, és a többi sajátártékhez tartozó sajátvektor nem ilyen. Lássa be, hogy

$$\frac{\mathbf{v}(X_0)}{\mathbf{v}_{max}}\lambda^n \leq \mathbf{P}(X_n \neq \hat{x}) \leq \frac{\mathbf{v}(X_0)}{\mathbf{v}_{min}}\lambda^n$$

ahol $\mathbf{v}_{min}$ a $\mathbf{v}$ vektor legkisebb és $\mathbf{v}_{max}$ a legnagyobb elemét jelöli. Ez az 1.63. feladat "Körülbelül hány nullával kezdődik..." kérdésére adott precíz válasz és egyben a 1.20. feladatbeli lehető legjobb ρ.

4.175. *A Wright-Fisher modell*

Van m golyó egy dobozban, az n-edik lépésben X_n darab piros és $m - X_n$ darab kék. Az $n+1$-edik golyó-leosztást úgy kapjuk, hogy m-szer húzunk visszatevéssel az n-edik dobozból, és olyan színű golyókat rakunk az új dobozba, amilyeneket kihúztunk. Ekkor X_n Markov lánc az $S = \{0, 1, \ldots, m\}$ állapottéren.

(a) A Markov láncnak van két elnyelő állapota: 0 és m. Fejezze ki X_0 függvényeként $\mathbf{P}(T_0 < T_m)$ értékét, azaz annak a valószínűségét, hogy előbb éri el a csupa kék állapotot a folyamat, mint a csupa pirosat.

(b) Lássa be, hogy $\frac{X_n(m-X_n)}{(1-\frac{1}{m})^n}$ martingál. A 4.174. feladat segítségével mondjon olyan n-et, hogy a 1000 piros és 1000 kék golyót tartalmazó állapotból indított Markov lánc az n-edik lépésben már legalább $\frac{1}{2}$ valószínűséggel valamelyik egyszínű állapotban lesz és olyat is, amikor még legfeljebb $\frac{1}{2}$ annak a valószínűsége, hogy csupa egyforma színű golyók vannak a dobozban.

4.3. A martingál-megállítási tétel és alkalmazásai

4.176. Lássa be, hogy ha T_1 és T_2 megállási idők az $(\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ filtrációra nézve, akkor $T_1 \wedge T_2$ is megállási idő.

4.177. Legyenek X_i, $i = 1, 2, \ldots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek közös eloszlása $\mathbf{P}(X_i = 1) = p$, $\mathbf{P}(X_i = -1) = q$, $\mathbf{P}(X_i = 0) = r$, ahol $p + q + r = 1$ és $p, q > 0$. Legyen $S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

(a) Milyen C-re lesz $M_n := C^{S_n}$ martingál?

(b) $a \in$ N esetén jelölje $T_a = \min\{n : S_n = a\}$ az a elérési idejét. A martingál-megállítási tétel segítségével számolja ki a $\mathbf{P}(T_{-a} < T_b)$ valószínűséget, ahol $a, b > 0$.

(c) Mely $C > 0$ és $\lambda > 0$ választások mellett lesz

$$Z_n := C^n \lambda^{S_n}$$

martingál? Melyik korábbi feladat átfogalmazása ez?

4.178. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású, véges μ várhatóértékű valószínűségi változók és ν tőlük független, véges várható értékű nemnegatív egész értékű valószínűségi változó. Legyen

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n, \nu \cdot \mathbb{1}[\nu \leq n])$$

Lássa be, hogy $M_n = S_n - n\mu$ martingál és ν megállási idő az $\mathcal{F}_n$ filtrációra nézve, és hogy $\mathbf{E}(\sum_{n=1}^{\nu} X_n) = \mathbf{E}(\nu)\mu$.

Súgás: Az egyik órán tanult martingál-megállítási tétel sem jó ide, viszont ha $\mathbf{P}(X_i \geq 0) = 1$, akkor a monoton konvergenciatétellel kijön, majd ezt és a dominált konvergencia-tételt használva az általános eset is belátható.

4.179. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású, véges μ várhatóértékű, pozitív valószínűségi változók, $T(n) = \sum_{k=1}^{n} X_k$ az n-edik felújítási időpont és $N(t) = \max\{n : T(n) \leq t\}$ a $(0, t]$ intervallumba eső felújítások száma. $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sigma(T(1), T(2), \ldots, T(n))$.

(a) Mutassa meg, hogy tetszőleges t-re $N(t) + 1$ megállási idő, és hogy

$$\mathbf{E}\big(T(N(t) + 1)\big) = \mathbf{E}\big(N(t) + 1\big)\mu$$

Segítség: Igaz, hogy semelyik órán tanult martingál-megállítási tételt nem tudjuk itt alkalmazni, de monoton kovergencia-tétellel belátható...

(b) Igaz-e, hogy $\mathbf{E}\big(T(N(t))\big) = \mathbf{E}\big(N(t)\big)\mu$? Lásd 1.37. feladat.

4.180. Ez az 1.35. feladat folytatása. Az ott bevezetett jelöléseket használva azt kell belátni, hogy

$$\mathbf{E}\Big(\sum_{i=1}^{T} \mathbb{1}_{\{X_i = y\}}\Big) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{T} \sum_{x \in S} \mathbb{1}_{\{X_{i-1} = x\}} P_{x,y}\right)$$

Segítség: $\sum_{i=1}^{n} \big(\mathbb{1}_{\{X_i = y\}} - \mathbf{E}\big(\mathbb{1}_{\{X_i = y\}} | \mathcal{F}_{i-1}\big)\big)$ korlátos növekményű martingál és T véges várható értékű (lásd 1.20. feladat) megállási idő a természetes filtrációra nézve.

4.181. Egy szerencsejátékos minden fogadási menetben egyenlő valószínűséggel nyer vagy veszít 1 petákot. Azzal a szilárd elhatározással kezd el játszani, hogy amikor n petáknyi nyereséget vagy m petáknyi veszteséget ér el, abbahagyja a játékot.

(a) Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy nyereséggel távozik.

(b) Számoljuk ki fogadásainak várható számát.

4.182. (a) Tekintsük azt a bolyongást, ami az origóból indul, $\frac{3}{8}$ valószínűséggel lép balra, $\frac{3}{8}$ valószínűséggel lép jobbra és $\frac{1}{4}$ valószínűséggel marad helyben. Legyen T az a véletlen időpont, amikor először kerül az origótól 100 távolságra a bolyongó. $\mathbf{E}(T) =$?

(b) Tekintsünk egy négyzetrácsot, amin egy király bolyong (egyenletesen választ a lehetséges 8 lépés közül). A bolyongást az origóból kezdi. Adjon minél jobb alsó és felső becslést arra, hogy várhatóan hány lépést tesz meg, amíg átlépi az origó középpontú 100 sugarú nyílt körlap határát (tehát azt a lépést is beleszámítjuk, amikor átlépte).

Súgás: ha csak a király vízszíntes vagy függőleges elmozdulását figyelnénk, akkor az előző részfeladatbeli "lusta" bolyongást kapnánk. A becslés pontatlansága abból származik, hogy miután a király átlépte a körlap határát, nem tudjuk egész pontosan megmondani az origótól vett távolságát.

4.183. Jelölje $\mathbf{P}_x$ az $x \in \mathbb{Z}$-ből indított egyszerű, szimmetrikus bolyongás szerinti valószínűséget és T_y az $y \in \mathbb{Z}$ elérési idejét. A feladat célja a következő egyenlőtlenségek bizonyítása:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \mathbf{P}_1(T_0 > n) \leq 2 \frac{1}{\sqrt{n}}$$

(a) A felső becslés bizonyításához súgás: Legyen $y \in \mathrm{N}$ tetszőleges. Figyeljük a bolyongást addig, amíg bele nem ütközik az y magas és n széles doboz falába valahol. Lássa be, hogy

$$\mathbf{P}_1(T_0 > n) \leq \mathbf{P}_1(\text{A doboz oldalába vagy a tetejébe ütközik}) \leq \mathbf{P}_1(T_0 \wedge T_y > n) + \mathbf{P}_1(T_y < T_0)$$

majd alkalmazza a Markov-egyenlőtlenéget.

(b) Az alsó becsléshez lássa be először, hogy tetszőleges $y \in \mathrm{N}$-re

$$\mathbf{P}_y(T_0 \le n) = \mathbf{P}_0(T_y \le n) \le \mathbf{P}_0(T_y \wedge T_{-y} \le n) \le \frac{n}{y^2}$$

Segítség: alkalmazza martingál-megállítási tételt az $S_k^2 - k$ martingálra, és legyen a megállási idő $T = T_y \wedge T_{-y} \wedge n$.

(c) Az alsó becslés bizonyításához: $\mathbf{P}_1(T_0 > n) \ge \mathbf{P}_1(T_0 > n \mid T_y < T_0)\mathbf{P}_1(T_y < T_0)$.

4.184. A "most piros" játék szabályai a következőek: a játékvezetőnél van egy jól megkevert franciakártya-pakli, aminek a lapjait egyenként megmutatja a játékosnak, akinek az utolsó lap megmutatása előtt valamikor azt kell mondania, hogy "most piros", és ha a következő lap színe tényleg piros, akkor a játékos nyert. Mi a legjobb stratégiája?

Segítség: Legyen $X_i = \mathbb{1}[\text{ az i-ediknek felmutatott lap piros }]$, ahol $1 \le i \le 52$. Először lássa be, hogy tetszőleges $1 \le i \le 52$-ra $\mathbf{E}(X_i \mid X_1, \ldots, X_{i-1}) = \mathbf{E}(X_{52} \mid X_1, \ldots, X_{i-1})$.

4.185. Legyen X_n diszkrét idejű születési-halálozási folyamat, melynek átmenet valószínűségei:

$$P_{i,i+1} = p_i, \qquad P_{i,i-1} = 1 - p_i =: q_i, \qquad p_0 = 1.$$

Értelmezzük a

$$g : \mathrm{N} \to \mathbb{R}_+, \qquad g(k) := 1 + \sum_{j=1}^{k-1} \prod_{i=1}^{j} \frac{q_i}{p_i}$$

függvényt.

(a) Bizonyítandó, hogy

$$Z_n := g(X_n)$$

martingál a természetes filtrációra nézve.

(b) Rögzítsük a $0 < i < n$ számokat. Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy az i állapotból indított folyamat előbb éri el az n állapotot, mint a 0-t.

4.186. *Elcserélt kalapok — turbo változat.*
n személy egy kupacba dobja a kalapját és véletlenszerűen kihúznak a kupacból egyet-egyet. Azok, akik a véletlenül éppen a saját kalapjukat húzták, boldogan hazamennek. A maradók újból egy kupacba dobják a náluk lévő kalapokat és újból véletlenszerűen kihúznak egyet-egyet. Akik most véletlenül pont a saját kalapjukat húzzák, hazamennek. Ez folytatódik, mindaddig, amíg mindenki meg nem találja a saját kalapját. Legyen R a menetek száma (pl. $R = 1$, ha az elsű húzásnál mindenki éppen a saját kalapját húzza). Számoljuk ki $\mathbf{E}(R)$-t.

4.187. Két (korrekt) kockával dobunk és feljegyezzük az számok összegét. Mindaddig dobunk ameddig a $7, 2, 12, 7, 2$ eredménysorzat meg nem jelenik. Mennyi a dobások számának várhatú értéke?

4.4. A martingál-konvergenciatétel

4.188. A 4.169. feladat feltételei mellett (Pólya urna, kezdetben egy piros és egy kék golyó) Mutassuk meg, hogy annak a valószínűsége, hogy a piros golyók aránya valaha is eléri a $3/4$-et, kisebb mint $2/3$.

4.189. *Szubharmonikus függvények és tranziencia II.*

Ez a feladat a 1.77. feladat folytatása, az ott bevezetett jelöléseket használjuk.

(a) Legyen X_n Markov lánc az S-en, melynek átmenetmátrixa P, de tegyük a z állapotot elnyelővé. Lássa be, hogy $f \in \mathcal{A}_z$ esetén $f(X_n)$ szupermartingál.

(b) Legyen $M_n = g_z(X_n)$. A martingál konvergenciatétel és a dominált konvergenciatétel segítségével lássa be, hogy $g_z(x) \ge \hat{g}_z(x)$.

(c) A fentiek segítségével lássuk be a következő tételt:

Tétel. Legyen egy S diszkrét állapotterű irreducibilis Markov lánc átmenet mátrixa P. Ha létezik egy $z \in S$ állapot és egy $f : S \to \mathbb{R}$ függvény, melyre igaz, hogy

(i) $\forall y \in S :\ 0 \le f(y) \le 1$ és $f(z) = 1$,

(ii) f szuperharmonikus az $S \setminus \{z\}$ halmazon,

(iii) valamely $y \ne z$-re $f(y) < 1$.

Ekkor a Markov lánc tranziens.

4.5. Azuma

4.190. *Azuma-egyenlőtlenség, avagy nagy eltérés-becslés martingálokra*

Legyenek $X_1, \dots, X_n$ független valószínűségi változók. Legyen φ olyan n változós függvény, hogy tetszőleges $x_1, \dots, x_n$-re és $1 \leq k \leq n$-re és $\hat{x}_k$-ra

$$|\varphi(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) - \varphi(x_1, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n)| \leq 1$$

Legyen $Y := \varphi(X_1, \dots, X_n)$.

Bizonyítandó, hogy tetszőleges $a \geq 0$-ra

$$\mathbf{P}\left(Y - \mathbf{E}(Y) \geq a\right) \leq e^{-a^2/2n},$$
$$\mathbf{P}\left(Y - \mathbf{E}(Y) \leq -a\right) \leq e^{-a^2/2n}.$$

(a) Mutassa meg, hogy ha $M_k = \mathbf{E}\big(\varphi(X_1, \dots, X_n)|\mathcal{F}_k\big)$, akkor

$$\mathbf{P}\big(\,|M_k - M_{k-1}| \leq 1\big) = 1$$

(b) *Gauss-dominancia*

Legyen X olyan valószínűségi változó, amire $\mathbf{E}(X) = 0$ és $\mathbf{P}(|X| \leq 1) = 1$. Lássa be, hogy

$$\mathbf{E}(e^{\beta X}) \leq e^{\frac{\beta^2}{2}}$$

Súgás: vegye mindkét oldal logaritmusát, és alkalmazza a logaritmikus momentumgeneráló függvény első és második deriváltjának valószínűségszámítási jelentéséről tanultakat.

Megj: Azért hívják ezt Gauss-dominanciának, mert az egyenlőtlenség jobb oldalán a standard normális eloszlás momentumgenerálófüggvénye áll.

(c) Lássa be, hogy ha M_n martingál, $M_0 = 0$, és $\mathbf{P}\big(\,|M_k - M_{k-1}| \leq 1\big) = 1$, akkor

$$\mathbf{E}\left(e^{\beta M_n}\right) \leq e^{\frac{\beta^2}{2} n}$$

(d) Az előző részfeladat feltevései mellett lássa be, hogy

$$\mathbf{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} M_k \geq a\right) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}$$

4.191. Tekintsük az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz egy véletlen f leképezését önmagára, azaz $f(1), \dots, f(n)$ függetlenek és egyenletes eloszlásúak $\{1, 2, \dots, n\}$-en. Bizonyítandó, hogy

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{|\mathcal{R}(f)|}{n} - \left(1 - (1 - \frac{1}{n})^n\right)\right| \geq \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right) \leq 2\exp(-\frac{\lambda^2}{2})$$

4.192. n hosszú $0-1$ sorozatok Hamming távolsága egyenlő azon koordináták számával, ahol a két sorozat különbözik:

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

Legyen $\mathcal{A}$ tetszőleges részhalmaza az n hosszú $0-1$ sorozatok $\{0,1\}^n$ halmazának és $X_1, X_2, \dots, X_n$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek közös eloszlása $\mathbf{P}(X_i = 0) = 1/2 = \mathbf{P}(X_i = 1)$. Legyen

$$D_{\mathcal{A}} := \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{A}} \rho(\mathbf{X}, \mathbf{x}).$$

Tetszőleges $a > 0$-ra találjunk felső korlátot a $\mathbf{P}\left(|D_{\mathcal{A}} - \mathbf{E}(D_{\mathcal{A}})| \geq a\right)$ valószínűségre.

4.193. Vegyünk egy valószínűségi eloszlást a A, C, T, G (adenin, citozin, timin és guanin) betűk halmazán, és képezzünk két n hosszú i.i.d. sorozatot (DNS-molekulát) ilyen eloszlású betükből. Jelöljük a sorozatokat $u_1, \dots, u_n$-el és $v_1, \dots, v_n$-el. Azt mondjuk, hogy a két sorozatban van m hosszú közös részsorozat, ha van olyan $i_1 < \dots < i_m$ és $j_1 < \dots < j_m$, hogy $u_{i_1} = v_{j_1}, \dots, u_{i_m} = v_{j_m}$. Jelölje M_n a leghosszabb közös részsorozat hosszát.

(a) Lássa be, hogy a $\mathbf{E}(M_n)$ sorozatra teljesül a $\mathbf{E}(M_{n+m}) \geq \mathbf{E}(M_n) + \mathbf{E}(M_m)$ egyenlőtlenség, és ebből vezesse le, hogy $\mathbf{E}(\frac{M_n}{n})$ konvergál $\sup_n \mathbf{E}(\frac{M_n}{n})$-hez.

(b) Bizonyítsa be az alábbi becslést:

$$\mathbf{P}(|M_n - \mathbf{E}(M_n)| \geq \lambda\sqrt{n}) \leq 2e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$$

5. Sztochasztikus folyamatokról általában

5.194. Legyen $X : \mathbb{I} \times \Omega \to S$ egy sztochasztikus folyamat. Bizonyítandó, hogy ha a $t \in \mathbb{I}$ időparaméter *diszkrét* (azaz: $\mathbb{I} = \mathrm{N}$ vagy $\mathbb{I} = \mathbb{Z}$), akkor az $X : \mathbb{I} \times \Omega \to S$ leképezés mérhető (együttesen a két változóban).

5.195. Legyenek $A, \eta, \phi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy ϕ független az (A, η) pártól és egyenletes eloszlású a $[0, 2\pi]$ intervallumban. Bizonyítandó, hogy az $X_t = A\cos(\eta t + \phi)$ sztochasztikus folyamat stacionárius.

5.196. Ellenőrízzék, hogy a $\mathbb{R}^1$-beli Brown mozgás véges dimenziós eloszlásai eleget tesznek a kompatibilitási feltételnek és független- és stacionárius növekményű folyamatot határoznak meg.
Tömörített jelöléssel:

$$P_{t_1,\dots,t_n}(dx_1 \dots dx_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_k - t_{k-1})}} \exp\left(-\frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2(t_k - t_{k-1})}\right) dx_1 \dots dx_n,$$

ahol: $t_j \in \mathbb{R}_+$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, $x_j \in \mathbb{R}^1$ és $x_0 = 0$.

5.197. Ellenőrízzék, hogy a Poisson folyamat véges dimenziós eloszlásai eleget tesznek a kompatibilitási feltételnek és független- és stacionárius növekményű folyamatot határoznak meg.
Tömörített jelöléssel:

$$P_{t_1,\dots,t_n}(r_1 \dots r_n) = \prod_{k=1}^{n} e^{-\lambda(t_k - t_{k-1})} \frac{(\lambda(t_k - t_{k-1}))^{r_k - r_{k-1}}}{(r_k - r_{k-1})!},$$

ahol $t_j \in \mathbb{R}_+$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, $r_j \in \mathrm{N}$ és $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_n$.

5.198. Legyen S diszkrét (véges vagy megszámlálható) állapottér és $\mathbb{I} = \mathrm{N}$ diszkrét időparaméter. Ellenőrízzük a Markov tulajdonság alábbi definícióinak ekvivalenciáját.

(I) *A jelen állapot ismeretében, múlt és jövő függetlenek.* Azaz: tetszőleges $t \in \mathrm{N}$, $A \in \mathcal{F}_{\le t}, B \in \mathcal{F}_{\ge t}$ és $\alpha \in S$ esetén

$$\mathbf{P}(A \cap B | X_t = \alpha) = \mathbf{P}(A | X_t = \alpha)\mathbf{P}(B | X_t = \alpha).$$

(II) *A teljes múlt ismerete nem tartalmaz több információt a jövőre nézve, mint a jelen állapot ismerete.* Azaz: tetszőleges $t \in \mathrm{N}$, $B \in \mathcal{F}_{\ge t}$ és $\underline{\alpha}_0^n \in S^{n+1}$ esetén

$$\mathbf{P}(B | \underline{X}_0^t = \underline{\alpha}_0^t) = \mathbf{P}(B | X_t = \alpha_t).$$

6. Sztochasztikus félcsoportok

6.199. Legyenek A és B $n \times n$ méretű négyzetes (valós vagy komplex) mátrixok.
(a) Bizonyítandó, hogy ha A és B kommutálnak, akkor $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.
(b) Bizonyítandó, hogy a $t \mapsto S(t) := \exp(tA)$ mátrix értékű függvény kielégíti a

$$\frac{d}{dt} S(t) = AS(t) = S(t)A$$

elsőrendű (mátrix-) differenciálegyenletet, $S(0) = I$ kezdeti feltétellel.
(c) SZORGALMI. (Lie-Trotter formula. Ez nehezebb.)
Bizonyítandó, hogy *tetszőleges* A és B $n \times n$ méretű négyzetes mátrixra

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\exp(n^{-1}A)\exp(n^{-1}B)\Big)^n = \exp(A + B).$$

6.200. Legyen $t \mapsto P(t)$ sztochasztikus félcsoport véges állapottéren és $G := \lim_{h\to 0} h^{-1}(P(h) - I)$ a félcsoport infinitizimális generátora. A félcsoport tulajdonság kihasználásával bizonyítandó, hogy $P(t)$ differenciálható bármely pozitív t-ben, és

$$\frac{d}{dt} P(t) = GP(t) = P(t)G.$$

6.201. (A Poisson folyamat félcsoportja.)
Legyen $\lambda > 0$ rögzített paraméter és $t \mapsto P(t)$ a következő módon értelmezve: $P(t) := (P_{m,n}(t))_{m,n \in \mathbb{Z}_+}$, ahol

$$P_{m,n}(t) := \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad 0 \le n < m, \\ e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-m}}{(n-m)!} & \text{ha} \quad 0 \le m \le n. \end{cases}$$

(a) Bizonyítsuk be, hogy $[0, \infty) \ni t \mapsto P(t)$ sztochasztikus félcsoport a $\mathbb{Z}_+$ megszámlálható állapottér felett.
(b) Bizonyítandó, hogy a $P(t)$ félcsoport infinitizimális generátora a

$$G_{m,n} = \lambda(\delta_{m+1,n} - \delta_{m,n}), \qquad m, n \in \mathbb{Z}_+$$

mátrix. (A differenciálás mátrixelemenként értendő.)
(c) Ellenőrízzük közvetlen számolással a $P(t) = \exp(tG)$ azonosságot.

6.202. Adjunk példát olyan sztochasztikus magfüggvényre egy metrikus téren, amely nem rendelkezik a Feller tulajdonsággal. (Feller tulajdonság: a magfüggvény által definiált integrál operátor *korlátos folytonos függvényeket korlátos folytonos függvényekbe képez*).

Nevezetes folytonos idejű és állapotterű sztochasztikus félcsoportok:

(1) A **Brown mozgás**, más néven **Wiener folyamat** félcsoportja. Állapottér: $S = \mathbb{R}$. Rögzített paraméter: szórás vagy diszperzió: $\sigma > 0$ (standard választás: $\sigma = 1$).

$$p_t(x, A) := \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2 t}} dy.$$

(2) A **sodródó** (angolosan: **driftes**) **Brown mozgás** félcsoportja. Állapottér: $S = \mathbb{R}$. Rögzített paraméterek: szórás: $\sigma > 0$; sodródási együttható (vagy drift): $m \in R$.

$$p_t(x, A) := \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(y-x-mt)^2}{2\sigma^2 t}} dy.$$

(3) Origóban **tükrözött Brown mozgás** félcsoportja. Állapottér: $S = R_+$.

$$p_t(x, A) := \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \left(e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2 t}} + e^{-\frac{(y+x)^2}{2\sigma^2 t}} \right) dy.$$

(4) A **Cauchy folyamat** félcsoportja (standard paraméter választással). Állapottér: $S = \mathbb{R}$.

$$p_t(x, A) := \int_A \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + (y-x)^2} dy.$$

6.203. Ellenőrízzük a fenti magfüggvényekre a $p_{s+t}(x, A) = \int_S p_s(x, dy) p_t(y, A)$ félcsoport tulajdonságot.

6.204. Bizonyítsuk be a Csebisev-egyenlőtlenség felhasználásával, hogy a sodródó Brown mozgás esetében minden $x \in S$-re és minden $\varepsilon > 0$-ra

$$p_h(x, (x - \varepsilon, x + \varepsilon)) = 1 - o(h),$$

vagy, ami ugyanaz

$$p_h(x, S \setminus (x - \varepsilon, x + \varepsilon)) = o(h),$$

amint $h \to 0$. Mi a helyzet a Cauchy folyamattal?
(A bizonyítás tükrözött Brown mozgás esetén is működik.)

7. A Brown-mozgás

7.205. Konstruáljon (azaz adjon olyan algoritmust, ami megszámlálható sok független standard normális eloszlású valószínűségi változóból legyárt) egy olyan végtelen bináris fát, aminek a 0-dik szintjén van egy $N(m = 0, \sigma^2 = 1)$ eloszlású ős, az n-edik szinten 2^n darab független $N(m = 0, \sigma^2 = 2^{-n})$ eloszlású leszármazott, és minden csúcsra igaz, hogy az ott ülő valószínűségi változó a két gyerekének az összege. Ha az n-edik szint megvan, akkor az afeletti részt triviális megkonstruálni. Kicsivel nehezebb fentről lefelé. Miért ekvivalens ez a Brown-mozgás megkonstruálásával?

7.206. Legyenek $X_1^n, X_2^n, \ldots, X_n^n$ független, 0 várható értékű és $1/n$ szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változók és

$$W_{j/n}^n := X_1^n + X_2^n + \cdots + X_n^n, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

(a) Számoljuk ki a $W_{j/n}^n$ $j = 1, 2 \ldots, n$, valószínűségi változók várható értékeit és kovarianciáit.
(b) Mi lesz a $W_{j/n}^n$, $j = 1, 2 \ldots, n$, valószínűségi változók együttes eloszlása?
(c) Legyen

$$M_n := \max\{|X_1^n|, |X_2^n|, \ldots, |X_n^n|\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(M_n \geq \varepsilon) = 0.$$

Értelmezzük az eredményt.

7.207. Legyenek $X_1^n, X_2^n, \ldots, X_n^n$ független, $1/n$ várható értékű Poisson eloszlású valószínűségi változók és

$$Y_{j/n}^n := X_1^n + X_2^n + \cdots + X_n^n, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

(a) Számoljuk ki az $Y_{j/n}^n$, $j = 1, 2 \ldots, n$,valószínűségi változók várható értékeit és kovarianciáit.
(b) Mi lesz a $Y_{j/n}^n$, $j = 1, 2 \ldots, n$, valószínűségi változók együttes eloszlása?
(c) Legyen

$$M_n := \max\{|X_1^n|, |X_2^n|, \ldots, |X_n^n|\}.$$

Rögzített $\varepsilon \in (0, 1)$ mellett számoljuk ki a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(M_n \geq \varepsilon)$$

határértéket. Értelmezzük az eredményt.

7.208. (a) Legyenek $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ nulla várható értékű valószínűségi változók. Bizonyítandó, hogy akkor és csak akkor *együttesen* normális eloszlásúak, ha léteznek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *független* $N(0, 1)$ (standard normális) eloszlású valószínűségi változók és a_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ valós számok, úgy hogy

$$Y_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \cdots + a_{in}X_n.$$

(b) Legyen $B(t)$ standard Brown mozgás ás $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n$. Magyarázzuk meg, hogy miért következik a Brown mozgás értelmezéséből, hogy $B(s_1), B(s_2), \ldots, B(s_n)$ együttesen normális eloszlásúak, azaz adjuk meg azokat az a_{ij} együtthatókat, amiknek a segítségével előállíthatóak független standard normálisokból.
(c) Határozzuk meg az $B(s_1), B(s_2), \ldots, B(s_n)$ valószínűségi változók kovariancia mátrixát (Ha $[A]_{i,j} := a_{ij}$, akkor $C = AA^T$).

7.209. *A Brown mozgás skála invarianciája.*

Legyen X_t standard Brown mozgás és $Y_t := a^{-1/2}X_{at}$, ahol $a > 0$ rögzített konstans. Bizonyítandó, hogy Y_t is standard Brown mozgás.

7.210. *A Brown mozgás horizontális tükrözése*

Legyen $B(t)$ standard Brown mozgás a $[0, 1]$ intervallumon és $W(t) := B(1 - t) - B(1)$, Bizonyítandó, hogy W is standard Brown mozgás.

7.211. *A Brown mozgás időinverziója.*

Legyen X_t standard Brown mozgás és $Y_t := tX_{1/t}$. Bizonyítsa, hogy Y_t is standard Brown mozgás. Legyen különösen körültekintő, amikor azt bizonyítja, hogy Y_t folytonos a 0-ban. Érdemes a nagy számok erős törvényét kombinálni a 7.215. feladat becslésével.

7.212. Legyenek X_t és Y_t *független* standard egy dimenziós Brown mozgások. Bizonyítsák be, hogy $Z_t := X_t - Y_t$ szintén egy dimenziós Brown mozgás. Mennyi a Z_t Brown mozgás szórás (σ) paramétere?

7.213. Legyen X_t standard Brown mozgás. Határozzák meg – lehetőleg szenvedés nélkül – a

$$\mathbf{P}(X_2 > 0 | X_1 > 0)$$

feltételes valószínűséget. Függetlenek-e az $\{X_1 > 0\}$ és $\{X_2 > 0\}$ események?

7.214. (a) Jelölje B a standard Brown-mozgást. Lássa be, hogy

$$M(t) = \exp\left(\lambda B(t) - \frac{1}{2}\lambda^2 t\right)$$

martingál az $\mathcal{F}_t := \sigma(B(s) : 0 \leq s \leq t)$ természetes filtrációra nézve, azaz mutassa meg, hogy $s < t$ esetén $\mathbf{E}(M(t) \mid \mathcal{F}_s) = M(s)$.

(b) Jelölje T_x azt a véletlen időpontot, amikor a standard Brown-mozgás először éri el az x magasságot. Lássa be, hogy $\lambda \geq 0$ esetén $\mathbf{E}\left(\exp(-\lambda T_x)\right) = e^{-x\sqrt{2\lambda}}$, azaz határozza meg T_x eloszlásának Laplace-transzformáltját.

Segítség: Mutassa meg először, hogy van olyan (λ-tól és x-től függő) C konstans, hogy

$$\mathbf{P}(M(t \wedge T_x) \leq C) = 1$$

azaz korlátos a megállított martingál, és $\mathbf{P}(T_x < \infty) = 1$, tehát teljesülnek a martingál megállítási tétel feltételei.

(c) Jelölje F_x a T_x eloszlását. Lássa be kétféleképp (az előző részfeladat alapján, illetve a Brown-mozgás tulajdonságaiból levezetve), hogy

$$F_x * F_y = F_{x+y}$$

(d) Lássa be kétféleképp, hogy $x^2 \cdot T_1 \sim T_x$.

7.1. Tükrözési elv

7.215. Jelölje $\Phi(t)$ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét. Lássa be a tükrözési elv segítségével, hogy a standard Brown-mozgás $[0, t]$ intervallumon vett maximumának, M_t-nek az eloszlásfüggvénye $2\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - 1$, ha $x \geq 0$, továbbá azt is, hogy

$$\mathbf{P}(\max_{0 \leq s \leq t} |B_s| > x) \leq 4\exp(-\frac{x^2}{2t})$$

7.216. Jelölje B a standard Brown-mozgást. Mutassa meg, hogy $B(t)$ feltételes sűrűségfüggvénye

$$\frac{x}{t}\exp\left(\frac{-x^2}{2t}\right)\mathbb{1}\{x > 0\}$$

amellett a feltétel mellett, hogy $B(s) \geq 0$ minden $0 \leq s \leq t$-re.

Segítség: A feltétel valószínűsége nulla, így a tükrözési elv segítségével lássa be először, hogy $x, \varepsilon > 0$ esetén

$$\mathbf{P}\left(B(t) \geq x - \varepsilon \mid \min_{0 \leq s \leq t} B(s) \geq -\varepsilon\right) = \frac{\Phi\left(\frac{\varepsilon - x}{\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon - x}{\sqrt{t}}\right)}{2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}\right) - 1}$$

majd tartson ε-nal 0-hoz.

7.217. Jelölje T_x azt a véletlen időpontot, amikor a standard Brown-mozgás először éri el az $x > 0$ magasságot. Határozza meg T_x eloszlásfüggvényét és lássa be, hogy $\mathbf{P}(T_x > t) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x}{\sqrt{t}}$, ha $1 \ll t$.

7.2. Gauss-folyamatok

7.218. Legyenek $X, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ együttesen normális eloszlásúak. Legyen $\mathbf{E}(Y_i) = \mathbf{E}(X) = 0$. Jelölje $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ az $Y_1, \ldots, Y_n$ kovarianciamátrixát és a $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ oszlopvektor i-edik eleme legyen $\mathbf{Cov}(Y_i, X)$. Legyen $0 < \sigma^2 = \mathbf{Var}(X)$. Lássa be, hogy az $Y_1, \ldots, Y_n$ együttes feltételes eloszlása az $X = 0$ feltétel mellett együttesen normális, melynek várható érték vektora azonosan nulla és kovarianciamátrixa $\mathbf{C} - \frac{1}{\sigma^2}\mathbf{c}\mathbf{c}^T$.

Segítség: Cholesky-felbontás: minden pozitív szemidefinit szimmetrikus mátrix felírható AA^T alakban, ahol A egy alsó háromszög mátrix.

7.219. *A Brown-híd ekvivalens jellemzései*

Jelölje $B(t)$ a standard Brown-mozgást a $[0, 1]$ intervallumon. Mutassa meg, hogy az alábbi három sztochasztikus folyamat eloszlása azonos:

(a) $B(t)$ amellett a feltétel mellett, hogy $B(1) = 0$.

(b) $B(t) - tB(1)$.

(c) $(1 - t)B(t/(1 - t))$.

7.220. Ha g folytonosan differenciálható és f folytonos függvény, akkor az $\int_0^t f(s)dg(s)$ előjeles Riemann-Stieltjes integrál megegyezik a $\int_0^t f(s)g'(s)ds$ Riemann-integrálal. Mivel a Wiener-folyamat deriváltja a fehér zaj, így ezzel az eljárással nem definiálható $\int_0^t f(s)dB(s)$. Használja helyette a Riemann-integrál definíciójának ötletét:

(a) Ha $f \equiv 1$, akkor a nyilvánvaló definíció $\int_s^t f(u)dB(u) = B(t) - B(s)$. Úgyszintén nyilvánvaló elvárás, hogy $t_1 < t_2$-re $\int_0^{t_2} f(s)dB(s) = \int_0^{t_1} f(s)dB(s) + \int_{t_1}^{t_2} f(s)dB(s)$ teljesüljön. Ennek segítségével definiálja $\int_0^t f(s)dB(s)$ értékét lépcsős függvényekre.

(b) Közelítse f-et lépcsős függvényekkel, és mutassa meg a szórásra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség segítségével, hogy a közelítő lépcsős függvények segítségével definiált valószínűségi változó-sorozat az L^2 normára nézve Cauchy-sorozat!

(c) Lássa be, hogy $X(t) = \int_0^t f(s)dB(s)$ Gauss-folyamat és hogy $s < t$-re $\mathbf{Cov}(X(s), X(t)) = \int_0^s f^2(s)ds$

7.221. *A stacionárius Ornstein-Uhlenbeck-folyamat ekvivalens jellemzései*

(a) Jelölje $B(t), t \geq 0$ a standard Brown-mozgást. Lássa be a Brown-mozgás önhasonlóságának felhasználásával, hogy $\beta \in \mathbb{R}_+$ esetén az $X(t) := e^{-\beta t}B(e^{2\beta t}), t \in \mathbb{R}$ folyamat egy stacionárius sztochasztikus folyamat.

(b) Lássa be, hogy $X(t)$ időben homogén Markov folyamat, és határozza meg az átmenenetmagfüggvényét, azaz azt a $p_t(x, y)$ függvényt, amire

$$\mathbf{P}(X(s + t) \in A \mid X(s) = x) = \int_A p_t(x, y)dy$$

(c) Legyen $Y(0) \sim N(0, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ és $t \geq 0$-ra

$$Y(t) := e^{-\alpha t}Y(0) + e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s}dB(s)$$

Lássa be, hogy $Y(t)$ stacionárius Gauss-folyamat, amihez elég belátni, hogy $\mathbf{Cov}(s, t) = \mathbf{Cov}(0, t-s)$.

(d) Mely α, β értékek esetén azonos eloszlásúak az X és Y sztochasztikus folyamatok?

7.222. *A Cauchy-folyamat konstrukciója*

Legyenek $X(t)$ és $Y(t)$ független standard Brown-mozgások. $x > 0$ esetén jelölje T_x azt a véletlen időpontot, amikor X először éri el x-et.

(a) Lássa be, hogy $Y(T_1)$ standard Cauchy eloszlású.

(b) Lássa be, hogy $Z(x) = Y(T_x)$ standard Cauchy-folyamat.

8. Megoldások

1.12/b): Krumplikra bontjuk az eredeti allapotteret. Annak a feltetelnek kell teljesulnie, hogy egy tetszoleges krumpli barmelyik ket allapotabol ugyanakkora valoszinuseggel lepjunk akarmelyik masik krumpliba. Lásd 1.31. feladat.

1.16: A megfordított folyamatról triviálisan látszik, hogy Markov!

1.18/a): $p = \frac{1}{2}$ esetén Markov, amúgy nem.

1.36: Én nem találtam rá könnyű megoldást.

1.49: Össze kell tenni a 1.48. és a 1.35. feladatot az a) részhez. A b) részhez vegyük észre, hogy A-ból nézve B és C egyforma, és A-ból biztosan B-be vagy C-be lép a bolyongó.

1.58: Milyen értelemben voltak jók a tippek? Ha például a Markov lánc reverzibilis, és a második legnagyobb sajátérték $1 - \varepsilon$, akkor ennek a sajátértéknek az F-el való transzformáltja kábé $1 - F'(1)\varepsilon$.

1.60: Súgás: Azt kell belátni, hogy P spektruma tartalmazza $\hat{P}$ spektrumát.

1.75: Egy tartályban részecskék vannak. Minden lépésben minden bent levő részecske elbomlik p valoszinuseggel, és jön POI mennyiségű új részecske. Minden lépésben felírható a tartályban levő részecskék száma egy POI és tőle független BIN eloszlású vavá összegeként.

1.87: A róka menekül, és minden lépésben $1 - \lambda$ valószínűséggel találja el a vadász.

2.95: Ez egy felújítási folyamat, aminek a felújítási idejének az eloszlása két független exponenciális összege. Tehát úgy kapható a pontfolyamat, hogy egy Poisson-folyamat minden második pontját elhagyjuk.

2.96: Elég egy bolhára megoldani, hiszen függetlenül ugrálnak, így binomiális eloszlású lesz a vizslán levő bolhák száma. Könnyű kiszámolni annak a valószínűségét, hogy egy bolha mekkora valószínűséggel ugrott páros sokat: $\mathbb{1}[k \text{ páros}] = \frac{1+(-1)^k}{2}$.

2.108: Az a) kérdésre a válasz: geometriai. A b) kérdésre a válasz: két a) kérdésbeli geometriai konvolúciója (hiszen a megérkezésem pillanatában a múlt és a jövő fele nézve az utasok és metrók együttes folyamata pont ugyanúgy néz ki).

2.122: Paradox feladat: ha azt tennénk fel, hogy a csillagok 3D Poisson-folyamatot alkotnak, akkor fényes lenne az éjszakai égbolt.

3.126: Ugyanaz az alapötlet kell, mint a 2.96. feladathoz.

4.184: Bármilyen stratégia mellett $\frac{1}{2}$ a győzelem valószínűsége. A bizonyítás hasonlít a martingál megállítási tételéhez.

4.188: Állítsuk meg az M_n martingált, ha $\frac{3}{4}$ fölé nő. Legyen $\hat{M}_n = M_{n \wedge T}$. A megállított martingál konvergál, és $\hat{M}_\infty(\omega) \geq \frac{3}{4}$, ha $T(\omega) < \infty$. A dominált konvergenciatétel miatt $\mathbf{E}(\hat{M}_\infty) = \frac{1}{2}$.

5.195: Legyen $Z_t = Ae^{i(\eta t + \phi)}$. Ha Z_t staci, akkor a valós része is az. Ha be akarjuk látni, hogy a $\hat{Z}_t = Z_{t+s}$ folyamat ugyanolyan eloszlású, mint Z_t, akkor csak annyit kell belátni, hogy $e^{i(\eta s + \phi)}$ egyenletes eloszlású az egységkörön és független (A, η)-tól.

7.205: Ha $X \sim N(0,1)$ és még hozzásorsolunk egy tőle független $Y \sim N(0,1)$-et, akkor $U = \frac{X+Y}{2}$ és $V = \frac{X-Y}{2}$ is függetlenek, valamint $U + V = X$. Így kell megkonstruálni az apából a két fiát. Azért ekvivalens a Brown-mozgás konstrukciójával, mert a fa n-edik szintjén a $B((k+1)2^{-n}) - B(k2^{-n})$ növekmények állnak.