Sztochasztika hallgatói szeminárium 2006 ősz: Laplace-transzformáció, felújításelmélet és alkalmazások

2006. augusztus 26.

1. Bevezetés

A szeminárium alatt feldolgozásra szánt témaköröket írom itt le. Nem bontom még fel előadás hosszúságú blokkokra, mert még lehet, hogy így túl sok, és el kell dobni belőle. Igyekeztem leírni, hogy kábé hány percnyi előadás szerintem 1-1 rész, de ahol nem értettem meg jól a bizonyítást, ott csak tippeltem és (?)-et tettem a becslés mellé. Inkább a sorrend a fontos az alábbi listában, mert egymásra épül az anyag.

A tananyagot a következő könyvekből vettem:

William Feller: An introduction to probability theory and its applications II., 1966

Samuel Karlin-Howard M. Taylor: Sztochasztikus folyamatok, 1985

Az évszámokat az oldalszámozás miatt adtam meg. A Feller II.-ből jön a felújításelmélet egy része és a Laplace-trafós anyag (angolul), és a Karlin-Taylor pedig magyarul tartalmazza a felújításelméletet és némelyik alkalmazást. Persze sok az átfedés, érdemes mindkettőt elolvasni.

Rövidítések: Feller II. kötet helyett F2, Karlin-Taylor helyett KT.

Azt is odaírom, hogy a tananyag könnyű, közepes vagy nehéz. Attól közepesen nehéz valami, ha más anyagra épül vagy kell némi önálló munka hozzá (pl. ilyenek a könyvekből vett fejezetvégi feladatok) és nehéz valami, ha hosszú a bizonyítása és más anyagra épül. Bár a leghosszab biz is max 3 oldalas, szóval nem túl nehéz.

2. A tananyag

Fontos: nem kell mindent előadni, aminek az oldalszámát leírom, sok a redundancia! Ezek csak témakörök, és hogy honnan lehet felkészülni rájuk. Mostantól ebben a szövegben „témakör” az ennek a fejezetnek az alfejezeteit jelenti, pl: a 2.3 témakör az a „Felújítási folyamatok, CHT” című témakör (alfejezet).

2.1. Felújítási folyamatok definíciója

KT: 173.o-176.o teteje, könnyű, 30 perc

hátralevő élettartam = residual waiting time

eddigi élettartam = spent waiting time

A KT könyv jelöléseit használjuk a szemináriumon a KT 176. oldal tetejének fogalmaira, mert a F2-ben nincs rá külön jelölés.

2.2. A felújítási paradoxon

könnyű, 40 perc

Hossztorzító mintavétel = size-biased sampling

KT: 178.o-180.o

F2: 10.o-13.o

F2: 185.o

Érdemes átismételni a F2 10.o a Gamma-eloszlásokat is, szükség lesz rá.

2.3. Felújítási folyamatok, CHT

KT:210.o-211.o

2.4. Felújításelm. alkalmazás: II. típusú számlálóberendezés-modell

KT: 182.o-185.o, könnyű, 20 perc, explicit POI-foly számolás

könnyű feladat: hova konvergál a (3.11)-es képlet? Azaz:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M_R(t)}{t} = ?$$

KT: 231.o/8.feladat, de mi a szemléletes jelentése?

2.5. Laplace-trafó, a folytonossági tétel

F2: 407.o-414.o, közepes, 90 perc

Legyen a szemináriumon: 408.oldal/Thm 1., Thm2., de kell hozzá emlékeztető a mértékek gyenge konvergenciájáról és kompaktságáról (a Határeloszlástételek-óra tananyaga), és arról, hogy a folytonos függvények terének duális tere a mértékek tere és hogy a polinomok sűrű halmazáról már egyértelműen terjed ki egy lineáris funkcionál.

Legyen: F2 410.o teteje: translation principle

Legyen: F2: 411.o: multiplication rule, de ellenpélda: F2 51.o teteje és F2 98.o alján az 1. feladat.

Legyen: F2: 411.o alja: Gamma-eloszlások Laplace-trafója

Legyen: F2 412. oldal teteje: a transaltion principle alkalmazása

F2 412/ (2.8) formula különösen érdekes, főleg $\lambda \to 0$ esetén, már ez is tulajdonképp egy Tauber-tétel (F2 418. oldal alján elmondja, miért)

Legyen: 412. o alján: change of scale, NSZGyT kipottyan.

Legyenek a F2 413.o (a) és (b) példái jól elmondva, mert mindkettőre szükségünk lesz később: az (a) példára a 2.28 témakörénél, és a (b) példára a 2.33 témakörnél.

F2 414.o/ (c) egyszerű, de fontos, és használjuk is majd a 2.9 témakörnél.

Nem kell a F2 414.o/(d) és a F2 415.o/(e)

2.6. Felújítási függvény, felújítási egyenlet

KT 185.o-186.o: felújítási fv létezik

A KT 186.o alján van egy *-os lábjegyzet, a Feller II. is ezzel a konvencióval él, mi a szemináriumon kétféle könyvből dolgozunk, figyeljünk, hogy épp melyiket használjuk!

KT: 186.o-188.o: felújítási gondolatmenet

KT: 188.o-191.o : felújítási egyenlet és alkalmazás: a Wald-azonosság egy spec esete

Hol is van itt a martingál, megállási idő?

2.7. A felújítási egyenlet Laplace-transzformáltja

KT:238.o/27.feladat, könnyű, 10 perc

F2: 441.o-443.o közepe, Persze itt még nem tudjuk a Tauber-tételeket, az még most nem kell.

2.8. Néhány explicit számolás a felújítási egyenlettel, 2 paraméterű gamma-eloszlással

KT: 231.o/4. feladat, 5.feladat, 6.feladat,7. feladat, 13.feladat, közepes

Ezeknek a feladatoknak van közük egymáshoz, mert a 6. feladat olyan, hogy egy Poisson-folyamatból minden második pontot eldobjuk. Ebből a szemléletes jelentésből kijön a 6. feladat? Laplace-transzformáltak segítségével kijön a 6. feladat? És a 7. feladat?

Megjegyzés: a KT 231/6. feladatból leolvasható erre a speciális esetre a felújítási tétel és a felújítási függvény aszimptotikus sorfejtése, lásd a 2.11 témakört.

2.9. Laplace-trafó alkalmazása felújításelméletben: Ritkított felújítási folyamat átskálázva Poisson-folyamathoz konvergál

„change of scale"

KT: 234/19., 20., 21., 22. feladatok, könnyű, 15 perc

2.10. A felújítási tétel kimondása, ekvivalens alakjainak kimondása

könnyű,

KT 193.o-196.o teteje. F2 346.o-349.o

Tehát a F2 347.o/Thm 1. ekvivalens a F2 349.o/Thm 2.-vel. Legyenek a szemináriumon az ellenpéldák is a közvetlenül Riemann-integrálhatóságra: 349.o/(a),(b),(c),(d)

Elemi felújítási tétel következik a felújítási tételből.

Mit is jelent a felújítási tétel? (A KT-könyvbeli konvenciót használva M(t)-re, lásd 2.6 ttémakör)

$$A(t) = a(t) + \int_0^t a(t-x)dM(x) = \mathbb{E}(\sum_{n=0}^{\infty} a(t-S_n)) \approx \frac{1}{\mu}\int_0^{\infty} a(x)dx$$

Mivel ez egy véletlen (Monte-Carlo) alappontokkal vett Riemann-féle közelítőösszeg, ahol az alappontok $\frac{1}{\mu}$ sűrűen vannak.

2.11. A felújítási tétel alkalmazása: a hátralevő élettartam hosszú idő utáni eloszlása

KT: 196.o-198.o: $\delta(t), \gamma(t), \beta(t)$ valváltozók hosszú idő utáni eloszlása, a felújítási paradoxon újabb jele, Schwartz-egyenlőtlenséggel

KT:199.o-200.o: a felújítási függvény aszimpotikus sorfejtése, könnyebben is el lehet intézni, mint ahogy ott le van írva, hiszen $\mathbb{E}(\gamma(t))$ explicite számolható.

Szemléletesen is kijön ugyanez (ha megsejtjük, hogy size-biased sampling kell):

$$\int_z^\infty \frac{1}{\mu} \cdot x \cdot f(x) \cdot (\frac{x-z}{x}) dx = \cdots = \frac{1}{\mu} \int_z^\infty (1-F(y)) dy$$

$\mathbb{E}(\gamma(t))$-nek is van szemléletes jelentése size-biased sampling alapján! $\mathbb{E}(\gamma(t))$ lehet kisebb és nagyobb is, mint $\mathbb{E}(X_1(t))$!

2.12. Kapcsolat Markov-láncokkal

KT 233.o/10.feladat

Ha feltesszük, hogy X_k f.a.e. egészértékű, korlátos valváltozók, akkor $\delta(t)$ egész időpontokban nézve egy véges állapotterű, irreducibilis Markov-láncot alkot, ami aperiodikus akkor és csak akkor, ha a felújítási folyamat periódusa 1. A Markov-lánc egyértelmű stacionárius eloszláshoz konvergál. Vezessük le, hogy ez azonos azzal, amit a 2.11 témakörben kaptunk $\delta(t)$ hosszú idő utáni eloszlására, és vezessük le ebből erre a speciális esetre a felújítási tételt, ami ebben a spec esetben ekvivalens ezzel:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(\text{t-kor felújítás történik}) = \mu^{-1}$$

2.13. Felújításelm. alkalmazás: Készletezéselmélet

KT:219.o-220.o, könnyű, a hosszú idő utáni eloszlás-tételeket kell alkalmazni

2.14. Késleltetett felújítási folyamat, a stacionárius felújítási folyamat ekvivalens jellemzései

könnyű, 25 perc

KT:200.o-203.o

F2: 353.o-355.o

Amiről a Feller beszél a 355.o/(3.11) után, arról for szólni a 2.33 témakör!

2.15. A felújítási tétel ekvivalens alakjainak ekvivalenciájának bizonyítása

közepes (?)

F2 349.o alja-350.o közepe

2.16. A felújítási tétel bizonyítása

nehéz

F2 350.o közepe-353.o közepe

Ha a bizonyítás utáni apró betünek hiszünk, akkor martingálkonvergenciatétellel bizonyítható? Lelkes szemináriumi előadó utánakereshetne, lásd F2 353.oldal 9-es lábjegyzet.

2.17. Felújításelm. alkalmazás: I. típusú számlálómodell

KT 182.o-183.o

Geiger-Müller-számláló: hosszú távon mi a beérkező és az észlelt részecskék részaránya?

Közepes, kell hozzá felújítási tétel

KT: 204.o-206.o

2.18. Felújításelm. alkalmazás: Az optimális villanykörtecsere

Mondjuk olcsóbb villanykörtét cserélni, ha még nem égett ki (pl. az operában a csillárt a legutóbbi csere után fél évvel automatikusan újra cserélik, de ha kiég, akkor soron kívül és sürgősen kell munkaidőn kívül kihívni a szerelőt, és az drágább)

KT 180.o-181.o, 206.o, 230.o/5.feladat

közepes, kell hozzá felújítási tétel

2.19. Felújítási egyenlet és függvény és tétel még egy alkalmazása

KT: 237.o/26.feladat, közepes, 10 perc

2.20. N(t) szórásnégyzete

KT: 234.o/16., 17. feladatok., közepes-nehéz

Hova konvergál $t \to \infty$ esetén a t-vel leosztott szórásnégyzet?

Lásd KT 231.o/3.feladat. Lásd 2.3 témakör.

Mi a köze az inverzfüggvény második deriváltjához? (Lagrange-féle inverzió-tétel és N(t) magasabb momentumai?).

Meghatározható-e N(t) eloszlásának Laplace-transzformáltja a felújítások közt eltelt idő eloszlásának Laplace-transzformáltjából? nehéz?

2.21. Véget érő felújítási folyamatok

terminating (transient) renewal processes.

Azért hívják tranziensnek, mert a tranziens bolyongás visszatérési időpontjai alkotnak tranziens felújítási folyamatot.

KT: 207.o-209.o

F2: 360.o-363.o

Hangsúlyozzuk, hogy a translation principle-t alkalmaztuk (lásd F2 410. oldal).

Hasonló módszerrel bizonyítható nagy-eltérés-szerű tétel arra, hogy $t \to \infty$ esetén $\mathbb{P}(S_{\text{utolsó}} \geq t)$ hogyan cseng le? Lásd F2 361.o/Thm 1.

2.22. Felújításelm. alkalmazás: A tönkremenés-probléma a biztosításelméletben

nehéz (?)

tönkremenés-probléma = ruin problem

KT: 211.o-213.o

F2: 179.o-181.o, 363.o-364.o, és használja a 2.21 témakör eredményeit.

F2: 444.o/(b)-445.o

2.23. Elágazó folyamatok

KT:218.o-219.o

Malthus-féle arányszám = Malthusian parameter

2.24. A Laplace-transzformáltak pontosan a teljesen monoton függvények

F2: 415.o közepe-418.o közepe. Mehet az egész, 60 perc

A poén kedvéért itt még ne mondjuk el, hogy az inverzfüggvényes képlet a F2 417.o alján hogy jön ki az elágazó folyamatokból.

2.25. Elágazó folyamatok teljes populáció-nagyságának eloszlása

közepes

F2 448.o-449.o, Busy periods

Érdemes lenne vizsgálni $c\mu$ függvényében a $\beta(\lambda)$ értelmezési tartományát: szuperkritikus, kritikus, szubkritikus elágazó folyamat (ha az értelmezési tartomány negatív λ-kra is kiterjed, akkor exponenciálisan cseng le a busy period hossza)

Számoljuk ki Poisson-folyamatos esetben is, ekkor explicite felírható a $\beta(\lambda)$ függvény.

2.26. A Poisson-folyamat ekvivalens jellemzései

Ez nem túl érdekes témakör, ne foglalkozzunk vele túl sokáig. Arról szól az egész, hogy örökifjú és ez az egyetlen olyan felújítási folyamat, ami késleltetés nélkül is stacionárius. Tehát pl az is jellemzi, hogy $M(t) = \frac{t}{\mu}$, ezt is vegyük be a jellemzések közé.

Még egy jellemzés: KT: 237.o/25.feladat, közepes.

2.27. Felújítási folyamatok szuperpozíciója

F2:355.o-366.o, könnyű

KT:222.o-227.o

Szerintem ez nem túl érdekes téma és elég azon a szinten elintézni, ahogy a Feller-könyvben van és nem kell részletesen. De azért van érdekes a KT könyvben is: a 227.o/9.2 tétel a Poi-folyamat még egy ekvivalens jellemzése.

2.28. Felújításelm alkalmazás: waiting time for a large gap, covering theorems

30 perc, nehéz

F2 186.o-187.o: bevezetés, felújítási egyenlet

Volt egy explicit számolás a 2.5 témakörben, azaz a F2 413.o/(a) példájában, egyenletes eloszlások konvolúciójának eloszlására. Vesd össze a a F2 26.o-27.o covering theorem-jeivel, esetleg, ha lelkes a szemináriumi előadó, akkor előbányászhatná a 28.o lábjegyzetében említett geometriai szemléletű bizonyítást. Vesse össze a F2 216.o/ 12. feladatával! A feladat megoldása: F2 443.o-444.o

2.29. Tauber-tételek

Jó lenne, ha ez a nehéz témakör lemenne 90 perc alatt.

F2: 418.o-423.o, ezt az egészet úgy, ahogy van és kell még hozzá egy kevés a lassan változó függvények elméletéből: F2: 268.o-269.o

2.30. Kritikus elágazó folyamatok teljes populáció-nagyságának lecsengése

közepes, 20 perc

Lásd a 2.25 témakört. Ha $c\mu = 1$, akkor ez egy kritikus elágazó folyamat. Ekkor még 1 valószínűséggel véget ér minden busy period, de a várható értéke már végtelen. Tauber-tétel segítségével határozzuk meg a $\beta(\lambda)$ 0 körüli viselkedéséből a a busy period hosszának lecsengését. Érdemes a F2 418.o legalja-419.o legteteje összefüggésből kiindulni.

Érdemes tekinteni a Galton-Watson-féle elágazó folyamatok (egyszerűbb) esetét is, sőt, lehetne venni előre. Ekkor ha $F(z)$ jelöli az utódok eloszlásának generátorfüggvényét, akkor az összes leszármazottak számának eloszlásának generátorfüggvénye megegyezik a $\frac{z}{F(z)}$ függvény inverzfüggvényével. Használjuk a F2 423.o/Theorem 5.-nek az (5.24)-es összefüggését!

2.31. Tauber alkalmazás: Nemnegatív stabilis eloszlások

Ezt csak akkor vegyük be a szeminárium programjába, ha marad rá idő!

F2 424.o-425.o, 30 perc (?), közepes (?)

2.32. Tauber alkalmazás: felújítási függvény aszimptotikája

közepes, 10 perc

Lásd a 2.7 témakört.

Ha a felújítási időnek nincs várhatóértéke, akkor az elemi felújítáasi tétel (lásd KT 192.o-193.o, ott a biz, de azt nem fogjuk venni szemináriumon) abba megy át, hogy a felújítási függvény t-vel osztva 0-hoz tart. Használjunk Tauber-tételt!

Lásd F2 446.o./(3.3)

2.33. Határeloszlás-tételek $\delta(t)$-re, $\gamma(t)$-re heavy-tail felújítási idők esetén

F2 445.o alja-447.o

Nehéz (?) témakör, 40 perc (?)

Olyanok ezek, mint Paul Lévy arcsin-törvényei. Speciális esetként ki is fog jönni valamelyik. Lásd F2 413.o/(b): Ott a generátorfüggvénye az egyszerű bolyongásnál az origóba való első visszatérés idejének (könnyű rekurzió, vezessük is le szemináriumon). Használjunk Taubert lecsengés kiszámolására, kijön, hogy $\alpha = \frac{1}{2}$.