Komplex számok

Komplex számok bevezetése

A valós számok körét a következőképpen építettük fel. Először a természetes számokat vezettük be. Itt két művelet volt, az összeadás és a szorzás (ismételt összeadás)[1] Az összeadás inverzeként értelmezett kivonás már kivezetett a természetes számok köréből. Az egész számokat éppen úgy kaptuk, hogy a természetes számokat úgy bővítettük, hogy az összeadás invertálható legyen.

Hasonló törekvés a szorzás esetében a racionális számokat eredményezi, ugyanis a szorzás inverzének a keresése a törtekkel való bővítéshez vezetett. Az osztás „kivezetett" az egész számok köréből. Így jutunk a racionális számokhoz, melyek mindegyike felírható két egész szám hányadosaként. (ratio=arány, hányados).

Már az ókorban is ismeretes volt azonban, hogy vannak olyan számok, amelyek megszerkeszthetők, és így rá lehet rajzolni őket a számegyenesre, de nem tudták őket mégsem definiálni. Ilyen szám pl. a $\sqrt{2}$ Ezt a számot könnyen meg tudták szerkeszteni, hiszen ez az egységnyi oldalú négyzet átlójának hossza. Tehát, ezeknek a számoknak megvan a helye a számegyenesen, noha nem írhatók fel két egész szám hányadosaként. Vagyis a gyökvonás művelete „kivezet" a racionális számok köréből, ezek az irracionális számok.

Ha a számkör bővítésének eddigi menetét nézzük, a recept egyszerű: azokat az objektumokat, „valamiket", amiket valamilyen művelet (illetve „inverz " művelet) végrehajtásakor kapunk, azokat számokként kezeljük, és hozzávesszük a már meglévő számainkhoz.

Az analízis fejlődésével kiderült, hogy minden (irracionális) szám értelmezhető valamely sorozat határértékeként. Ennek egyik példája az ***e*** szám, amely szintén irracionális. Bebizonyítható az is, hogy nincs üres hely a számegyenesen, a racionális és irracionális számok azt teljesen lefedik.

Ha azonban a gyökvonás „műveleténél" maradunk, e számkörünk még mindig nem teljes: negatív számokból nem tudunk négyzetgyököt vonni. Ráadásul, a másodfokú egyenlet gyökeinek keresésekor kiderült, hogy van létjogosultsága azoknak a számoknak, aminknek a négyzete negatív szám. De ha vannak ilyen számok, azok nem lehetnek a fentiek értelmében a számegyenesen.

Ezért a további bővítéskor kilépünk az ún. számsíkra, vagy másképpen az $\mathbf{R}^2$ lineáris tér geometriai interpretációjába. Mivel ezen új számkörben várhatóan a számpároknak a bevezetendő szorzás újszerű volta miatt más tulajdonságai is lesznek, nem $\mathbf{R}^2$-vel, hanem **C**-vel jelöljük és komplex (Complex) számoknak nevezzük az új számhalmazt.

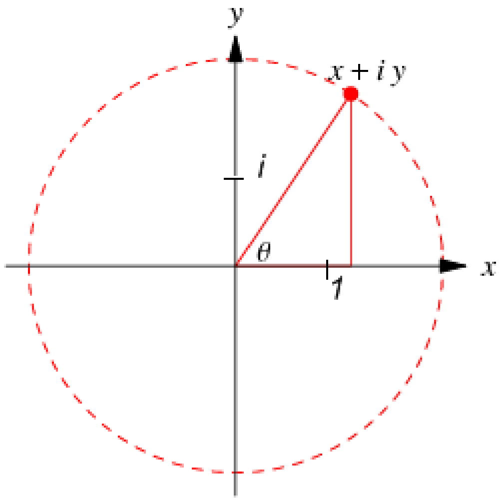
Kiterjesztés

Úgy terjesztjük ki a számfogalmunkat, hogy legyen az $x^2 = -1$ egyenletnek megoldása. Egy megoldást jelöljünk ***i***-vel. Vagyis $i = \sqrt{-1}$

[1] E két művelet asszociatív, kommutatív, de egységeleme csak a szorzásnak van, az 1, inverz elem pedig egyik műveletre sem létezik.

Komplex szám megadása

A komplex számmező a **C** (sík összes pontja) minden elemét megadhatjuk egy (x,y) valós számpárral, melyhez a $x+iy$ komplex számot rendeljük, ahol ***i*** a komplex egység



Algebrai alak

A komplex szám algebrai (másképpen kanonikus) alakja

$z = x + iy$, ahol *x és y valós számok.*

x-t a ***z*** szám **valós rész**ének nevezzük és ***Re z***-vel jelöljük, ***y***-t a *z* szám immaginárius részének nevezzük és ***Im z***-vel jelöljük. Tehát:

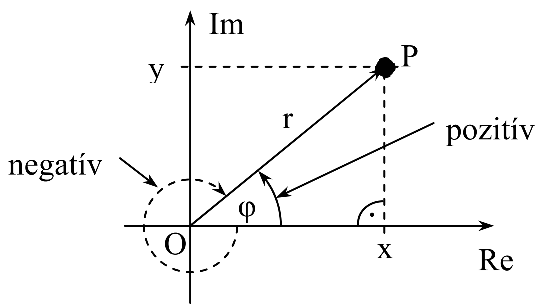
$$z = \operatorname{Re} z + i \cdot \operatorname{Im} z$$

A komplex számok halmazán abszolútértéket is bevezetünk,

ha z = x + yi, akkor z abszolút értéke $\sqrt{x^2 + y^2}$, jelben $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Az ábrázolás már sugallja, hogy a komplex számhoz helyvektort rendelhetünk. A vektor koordinátái a komplex szám valós- és képzetes részei-

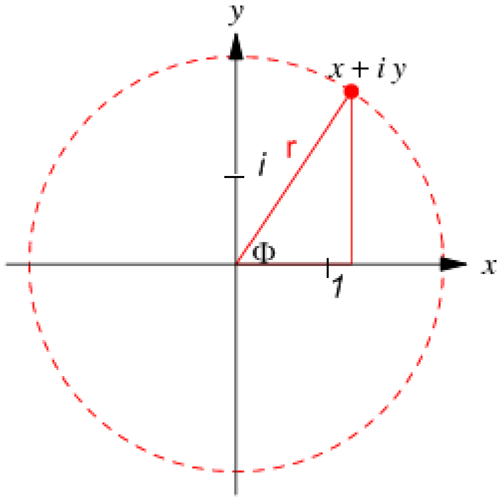
A vektor geometriai adatait könnyen felírhatjuk a komplex szám algebrai alakjának segítségével, ha felhasználjuk a Pitagorasz tételt.



Komplex szám trigonometrikus alakja

A komplex szám algebrai alakja ($\boldsymbol{z=x+iy}$) és a sík pontjainak megfeleltetéséből adódik, hogy egy komplex számnak van abszolútértéke[1] és *irányszöge* vagy arkusza, mely a valós tengellyel bezárt irányszöge.

Könnyen látható, hogy



$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$z = r\cos\varphi + r\sin\varphi\cdot i = r\left(\cos\varphi + i\cdot sin\varphi\right)$$

A komplex szám trigonometrikus alakja:

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$$

$$\varphi = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, y \geq 0 \\ \pi + arctg\dfrac{y}{x}, y < 0 \end{cases}$$

és

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Nevezetes komplex számok algebrai és trigonometrikus alakban

Az alábbi táblázat tartalmazza a nevezetes irányszögű, egység hosszú komplex számok irányszögét, algebrai és trigonometrikus alakját

Abszolút érték (r)	φ fokban	φ radiánban	Komplex szám algebrai alakban	Komplex szám trigonometrikus alakban
1	0°	0	1	$\cos 0 + i \sin 0$
1	30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$	$\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$
1	45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$	$\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}$
1	60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$	$\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}$
1	90°	$\frac{\pi}{2}$	i	$\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$
1	120°	$2\frac{\pi}{3}$	$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$	$\cos\left(2\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(2\frac{\pi}{3}\right)$
1	135°	$3\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$	$\cos\left(3\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(3\frac{\pi}{4}\right)$
1	150°	$5\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$	$\cos\left(5\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(5\frac{\pi}{6}\right)$
1	180°	π	-1	$\cos\pi + i\sin\pi$
1	210°	$7\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$	$\cos\left(7\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(7\frac{\pi}{6}\right)$
1	225°	$5\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$	$\cos\left(5\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(5\frac{\pi}{4}\right)$
1	240°	$4\frac{\pi}{3}$	$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$	$\cos\left(4\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(4\frac{\pi}{3}\right)$
1	270°	$3\frac{\pi}{2}$	$-i$	$\cos\left(3\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(3\frac{\pi}{2}\right)$
1	300°	$5\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$	$\cos\left(5\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(5\frac{\pi}{3}\right)$
1	315°	$7\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$	$\cos\left(7\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(7\frac{\pi}{4}\right)$
1	330°	$11\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$	$\cos\left(11\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(11\frac{\pi}{6}\right)$
1	360°	2π	1	$\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)$

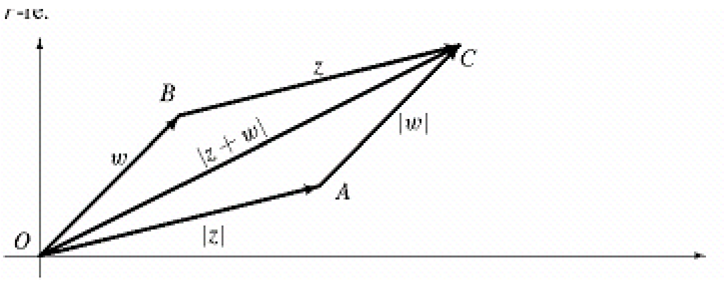
Műveletek a komplex számok körében

A komplex számok közötti műveleteket úgy definiáljuk, hogy minden valós számokra érvényes műveleti szabály érvényben maradjon. [2]

Minden **a**, **b** esetén összegük is komplex szám a+b=c
Az összeadás asszociatív: (a+b)+c=a+(b+c)
Az összeadás kommutatív: **a**+**b**=**b**+**a**
Minden **a**, **b** esetén egy és csak egy **x** van, amelyre **a**+**x**=**b**
Minden **a**, **b** esetén szorzatuk is komplex szám: **a b**=**c**
A szorzat asszociatív: (**a b**) **c**=**a** (**b c**)
A szorzás kommutatív: **a b=b a**
Minden **a**, **b** esetén, ha a≠0 egy és csak egy **x** van, amelyre **a x=b**
Minden **a**, **b** és **c** esetén igaz a disztributivitás: **a (b+c)=a b+a c**

Komplex számok összeadása

A geometriai interpretáció - a sík pontjai és a komplex számok megfeleltetése - alapján a komplex számok összeadását a nekik megfelelő pontba mutató helyvektorok összege alapján definiáljuk. Azaz ha:



$$z_1 = x_1 + iy_1$$
$$z_2 = x_2 + iy_2$$

akkor:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = ((x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2))$$

---

[2] Absztrakt algebrai fogalommal számtestet alkossanak.

Szorzás algebrai alakban

A szorzás definíciója algebrai alakban megadott komplex számra

Azt szeretnénk, hogy a szorzás disztributív legyen az összeadásra nézve, ezért $z_1 \cdot z_2$ -t úgy definiáljuk, ahogy az algebrai alakjukból, minden tagot minden taggal megszorozva adódik. Felhasználjuk még, hogy $i^2 = -1$

Legyen: $z_1 = a+bi$; $z_2 = c+di$;

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = ?$$

$$z_3 = (a+bi)\cdot(c+di) = ac + adi + (bi)\cdot c + bd\cdot(i^2) = ac + (ad+bc)i+bd(-1)\mathbf{z_1 \cdot z_2 =}$$

$$\mathbf{z_1 z_2 = (ac-bd) + (ad+bc)i}$$

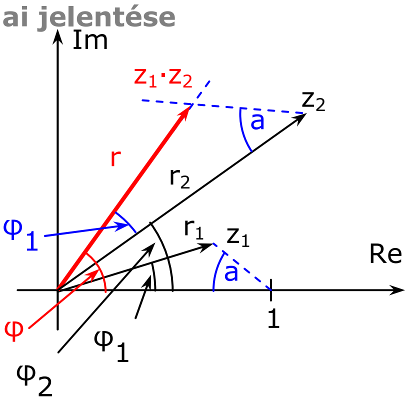
Szorzás trigonometrikus alakban

Az abszolút értékek összeszorzódnak, a szögek össze adódnak

$$z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)$$
$$z_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)$$
$$z_1 z_2 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right) r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)$$
$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 i\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 (i)^2\right)$$
$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + (\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)i\right)$$
$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$$

$$\varphi = \arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 = \varphi_1 + \varphi_2$$

A szorzás geometriai jelentése



Az abszolút érték tulajdonságai

1. Minden z komplex számra

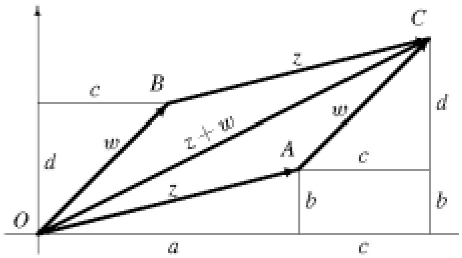
$$|z| \geq 0, \quad \left(|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0\right)$$

2. Minden z és w komplex számra

$$|zw| = |z||w|$$

3. Minden z és w komplex számra

$|z+w| \leq |z|+|w|$ háromszög egyenlőtlenség

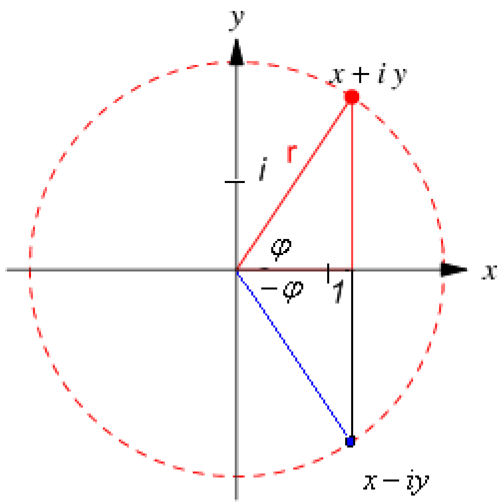


A komplex szám konjugáltja

Definíció: z konjugáltja $\bar{z} \doteq x - iy$

$\bar{z} \doteq x - iy$ A z komplex szám konjugáltja is értelmezhető geometriailag:

az eredeti komplex szám valós tengelyre vonatkozó tükörképe.



A konjugált tulajdonságai

$$\overline{(z+w)} = \overline{z} + \overline{w}$$
$$\overline{(zw)} = \overline{z}\,\overline{w}$$
$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$$, ha w nem nulla

$\overline{z} = z$ akkor és csakis akkor, ha *z* valós

$$|\overline{z}| = |z|$$
$$|z|^2 = z\overline{z}$$

ha $z \neq 0$, $\quad z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

Az osztás definíciója

Definíció: Az osztást a szorzás inverzeként definiáljuk.

Azaz $\dfrac{z_1}{z_2}$ definíció szerint az a komplex szám, mellyel z_2 -t megszorozva z_1 - et kapunk.

Osztás algebrai alakban

Felhasználva azt, hogy z és a konjugáltjának a szorzata valós szám (az abszolút értékének négyzete azaz: $z \cdot \bar{z} = |z|^2$) az algebrai alakban megadott komplex számok osztását vissza lehet vezetni szorzásra. Ha mind a számlálót, mind a nevezőt megszorozzuk a nevező konjugáltjával, akkor a nevezőben valós szám lesz.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z}_2}{\overline{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{1}{|z_2|^2}\left(z_1 \cdot \overline{z}_2\right)$$

Felhasználtuk, hogy:

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

Bizonyítás:

$$(x+iy)\cdot(x-iy) = x^2 + xyi - xyi - i^2y^2 = x^2 + y^2$$

Osztás trigonometrikus alakban

Az osztást a szorzás inverzeként vezettük be, könnyű látni, hogy

$$\frac{r_1}{r_2}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

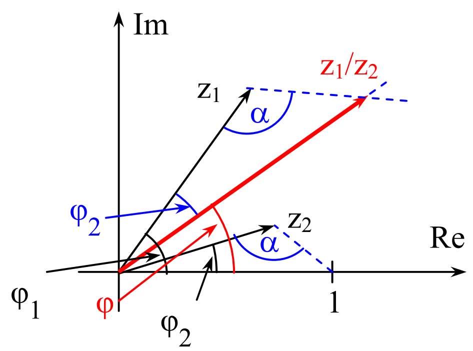
olyan szám, melyet -t z_2 -vel megszorozva z_1 - et kapjuk.

Az osztás egyértelműsége a szorzás egyértelműségéből következik, tehát:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$$

Szavakban az "az abszolút értékeket osztjuk, a szögeket kivonjuk"

Az osztás geometriai jelentése



Hatványozás algebrai alakban

Az algebrai alakban megadott komplex szám szorzására vonatkozó tételt és a binomiális tételt alkalmazva kapjuk:

$(x+iy)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (iy)^{n-k}$ Gyakorlatban a használata nehézkes.

Hatványozás trigonometrikus alakban

A trigonometrikus alakban adott komplex szám szorzására szorzásra vonatkozó tételt általánosítjuk tetszőleges számú szorzó tényezőre.

$$z_1 z_2 z_3 \ldots z_n = r_1 r_2 r_3 \cdots r_n \left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n\right) + i \sin\left(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n\right)\right)$$

Bizonyítás teljes indukcióval:

n=1 re igaz az állítás, hiszen $z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)$

Tegyük fel, hogy n=k ra is igaz:

$z_1 \cdot z_2 \cdots z_k = r_1 \cdot r_2 \cdots r_n \left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_k\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_k\right)\right)$, és szorozzuk meg mindkét oldalt z_{k+1}-el, ekkor

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_k \cdot z_{k+1} = \left(r_1 \cdot r_2 \cdots r_n \left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_k\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_k\right)\right)\right) \cdot r_{k+1}\left(\cos\varphi_{k+1} + i\sin\varphi_{k+1}\right) =$$

$$= r_1 \cdot r_2 \cdots r_{k+1}\left(\cos\left(\varphi_1 + .. + \varphi_{k+1}\right) + i\sin\left(\varphi_1 + .. + \varphi_{k+1}\right)\right)$$

ami bizonyítandó volt.

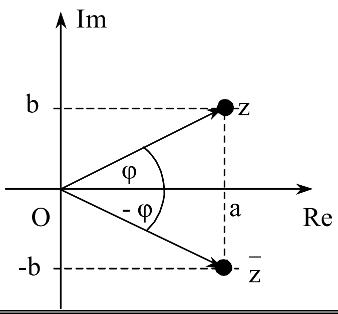
A fenti összefüggést a $z = z_1 = z_2 = \ldots = z_n$ speciális esetre alkalmazva kapjuk a következő

azonosságot (Moivre tétele):

$$z^n = r^n \left(\cos n\varphi + i \sin n\varphi\right)$$

$z^n = r^n \left(\cos n\varphi + i \sin n\varphi\right)$

Nevezetes azonosságok

	Azonosság	Bizonyítás
a,	$\lvert z\rvert = 0, \Rightarrow z = 0$	$\sqrt{a^2+b^2} = 0 \Rightarrow a^2+b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0 \Rightarrow z = 0$
b,	$\lvert z\rvert^2 = z\cdot\bar{z}$	$\lvert z\rvert^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = a^2+b^2$; $z\cdot\bar{z} = (a+bj)(a-bj) = a^2+b^2$
c,	$\lvert z\rvert = \lvert\bar{z}\rvert$	$\lvert z\rvert = \sqrt{a^2+b^2}$; $\lvert\bar{z}\rvert = \sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$
d,	$\overline{(z_1\cdot z_2)} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$	$\overline{(z_1\cdot z_2)} = \overline{(a+bj)(c+dj)} = \overline{(ac-bd)+(ad+bc)j} = (ac-bd)-(ad+bc)j$ $\overline{z_1}\cdot\overline{z_2} = (a-bj)(c-dj) = (ac-bd)+(-ad-bc)j = (ac-bd)-(ad+bc)j$
e,	$\lvert z_1\cdot z_2\rvert = \lvert z_1\rvert\cdot\lvert z_2\rvert$	$\lvert z_1\cdot z_2\rvert = \sqrt{(z_1\cdot z_2)\overline{(z_1\cdot z_2)}} = \sqrt{z_1\cdot z_2\cdot\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}} = \sqrt{(z_1\cdot\overline{z_1})(z_2\cdot\overline{z_2})} = \lvert z_1\rvert\cdot\lvert z_2\rvert$ b, illetve d, felhasználásával
f,	e, általánosítható: $\lvert z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n\rvert = \lvert z_1\rvert\cdot\lvert z_2\rvert\cdot\ldots\cdot\lvert z_n\rvert$	teljes indukcióval bizonyítható
g,	$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$	f, alapján, ha minden $\boldsymbol{z}_i$ azonos (i=1,2,…,n)
h,	$\left\lvert\frac{z_1}{z_2}\right\rvert = \frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$; $z_2 \neq 0$	$\left\lvert\frac{z_1}{z_2}\cdot z_2\right\rvert = \left\lvert\frac{z_1}{z_2}\right\rvert\cdot\lvert z_2\rvert$, de $\left\lvert\frac{z_1}{z_2}\cdot z_2\right\rvert = \lvert z_1\rvert$ a jobboldalakból az állítás adódik
i,	$-\arg\bar{z} = \arg z$	 $\arg z = \varphi$ $\arg\bar{z} = -\varphi$

Definíció: A gyökvonás műveletét a hatványozás inverzeként definiáljuk. Az $\sqrt[n]{z}$ definíció szerint olyan komplex szám, melynek az n-edik hatványa **z**.

Gyökvonás trigonometrikus alakban

Legyen $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$, mivel a szinusz és a koszinusz függvények 2π szerint periodikusak,

$$z = r\left(\cos(\varphi + k \cdot 2\pi) + i\sin(\varphi + k \cdot 2\pi)\right)$$

ahol, $k \in Z$

és mivel a gyökvonást a hatványozás inverzeként vezettük be, könnyű látni, hogy a

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}\right) \quad k = 0,1,2,...n-1$$

n különböző komplex szám, melyek mindegyikének az n-edik hatványa z.

Megvizsgálva a gyököket látjuk, hogy mindegyikük abszolút értéke azonos $\sqrt[n]{r}$, és egymással bezárt szögük $\frac{2\pi}{n}$ többszöröse.

Ez azt jelenti, hogy a komplex számsíkon egy origó középpontú $\sqrt[n]{r}$ sugarú körön egyenletesen helyezkednek el. Ha ezen pontokat összekötjük, akkor egy n oldalú szabályos sokszöget kapunk. Pl: $\sqrt[3]{z}$

Az n-edik gyökvonás n értékű művelet,

Kidolgozott feladatok

Adja meg algebrai alakban a következő komplex számokat!

$$\frac{(1+i)^4}{(1-i)^2}=?$$

$$\frac{(1+i)^4}{(1-i)^2}=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^4\left(\cos 4\frac{\pi}{4}+i\sin 4\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2\left(\cos\left(2\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)+i\sin\left(2\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)}=2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-2i$$

$$i^{2008}=?$$

$$i=\cos\frac{\pi}{2}+isin\frac{\pi}{2}$$

$$i^{2008}=\cos\left(2008\frac{\pi}{2}\right)+isin\left(2008\frac{\pi}{2}\right)$$

$$2008\frac{\pi}{2}=502\cdot 4\cdot\frac{\pi}{2}=502\cdot 2\pi$$

$$i^{2008}=\cos(502\cdot 2\pi)+isin(502\cdot 2\pi)=\cos 0+i\sin 0$$

$$i^{2008}=1$$

$$\sqrt[3]{1}=?$$

$$\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{1(\cos 0+i\sin 0)}=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{0+2\pi\cdot k}{3}+i\sin\frac{0+2\pi\cdot k}{3}\right)$$, ahol k=0,1,2

$$k=0\ \Rightarrow z_1=1\left(\cos\frac{0+2\pi\cdot 0}{3}+i\sin\frac{0+2\pi\cdot 0}{3}\right)=1(\cos 0+i\sin 0)=1(1+i\cdot 0)=1$$

$$k=1\ \Rightarrow z_2=1\left(\cos\frac{0+2\pi\cdot 1}{3}+i\sin\frac{0+2\pi\cdot 1}{3}\right)=1\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k=2\ \Rightarrow z_3=1\left(\cos\frac{0+2\pi\cdot 2}{3}+i\sin\frac{0+2\pi\cdot 2}{3}\right)=1\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Házi feladatok

Hozzuk algebrai alakra az alábbi kifejezéseket!

(a) $3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

(b) $4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

(c) $(1+6i) - i(-4+5i)$

(d) $(1+i)\overline{(2-3i)}$

(e) $\frac{1}{(1-i)^2}$

(f) $\frac{2+i}{i(1-4i)}$

Írjuk fel a következő komplex számok trigonometrikus alakját:

(a) $1 + i\sqrt{3}$

(b) $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

(c) $3 + i$

Végezzük el a következő hatványozásokat:

(a) $(1+i\sqrt{3})^3$;

(b) $(1-i)^4$;

(c) $(1+i)^8$.

Végezzük el a hatványozást úgy is, hogy a hatvány alapját trigonometrikus alakban írjuk fel.

Oldjuk meg a komplex számok halmazán a következő egyenleteket:

(a) $z^3 = 1 + i$;

(b) $|z| - z = 1 + 2i$;

(c) $|\overline{z}| = -4z$;

(d) $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$;

(e) $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$.

Végezzük el a következő gyökvonásokat:

(a) $\sqrt[3]{1}$;

(b) $\sqrt[4]{-16}$;

(c) $\sqrt[3]{-4\sqrt{2} + i4\sqrt{2}}$.